УДК 513.7

О КОНТАКТНЫХ ОМБИЛИЧЕСКИХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ В ПРОСТРАНСТВЕ 0-ПАР

А. Л. Крищюнайте

В статье рассматривается многообразие 0-пар, которое, как известно, является метрическим многообразием. Показано, что оно является также пространством постоянной аналитической кривизны гиперболического типа. В этом пространстве, как частном случае S-пространства гиперболического типа, рассмотрены примеры контактных омбилических гиперповерхностей.

1. 0-парой n-мерного проективного пространства P_n, называется совокупность его точки (u^α), где $\alpha=0, 1, \ldots, n$, и непроходящей через нее гиперплоскости (v_α). Инцидентность точки (u^α) и гиперплоскости (v_α) определяется соотношением $u^\alpha v_\alpha=0$. $2n$-мерное многообразие M_{2n} 0-пар проективного пространства P_n является метрическим многообразием, причем линейный элемент имеет вид [2]:

$$ds^2 = c^2 \frac{(u^\alpha v_\alpha)(du^\alpha dv_\alpha)-(u^\alpha dv_\alpha)(v_\alpha du^\alpha)}{(u^\alpha v_\alpha)^2}, \tag{1}$$

где c — константа, действительная или чисто мнимая.

Положим $u^0=1$, $u^s=x^s$, $v_0=1$, $v_s=-y_s$, $s, t, \ldots=1, \ldots, n$, т.е. в пространстве P_n от однородных координат u^α, v_α перейдем к неоднородным координатам x^s, y_s точки и гиперплоскости, соответственно. Тогда при $c=\sqrt{2}\, i$ линейный элемент (1) многообразия 0-пар $M_{2n}(x^s, y_s)$ имеет вид:

$$ds^2=2G_{s\bar t}\, dx^s\, dy_t,$$

где

$$G_{s\bar t} = \frac{1}{\Delta^2}(\delta_s^t\Delta + x^t y_s) = \partial_s\partial_{\bar t} \ln\frac{1}{\Delta}, \tag{2}$$

$$G_{st}=G_{\bar s\bar t}=0,\quad \Delta=1-x^s y_s.$$

Отметим, что $\Delta\neq 0$, так как точка $X(1, x^s)$ 0-пары $\{X, Y\}$ не принадлежит гиперплоскости $Y(1, -y_s)$.

Величины

$$G^{st}=G^{\bar s\bar t}=0,\quad G^{s\bar t}=\Delta(\delta_s^t - y_t x^s) \tag{3}$$

удовлетворяют условиям $G^{ik}G_{kj}=\delta_j^i$, $i, j, \ldots=1, \ldots, n, \bar 1, \ldots, \bar n$ поэтому они являются компонентами тензора G^{ij}, взаимного метрическому тензору G_{ij} (2) многообразия M_{2n}.

Скобки Кристоффеля Γ_{ij}^k метрики G_{ij} вычисляются по известной формуле:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} G^{kl}(\partial_i G_{jl}+\partial_j G_{il}-\partial_l G_{ij}).$$

В силу (2), (3) коэффициенты Γ^k_{ij} римановой связности, определенной метрикой G_{ij}, имеют вид:

$$\Gamma^u_{st}=\frac{1}{\Delta}\,(\delta^u_s y_t+\delta^u_t y_s),\quad \Gamma^{\bar u}_{\bar s\bar t}=\frac{1}{\Delta}\,(\delta^u_s x^t+\delta^u_t x^s),$$

$$\Gamma^{\bar u}_{st}=\Gamma^{\bar u}_{\bar s t}=\Gamma^u_{\bar s t}=\Gamma^u_{\bar s\bar t}=0. \tag{4}$$

На многообразии $M_{2n}(x^s, y_s)$ можно ввести аффинор F^i_j

$$\begin{pmatrix} E_n & 0\\ 0 & -E_n\end{pmatrix}, \tag{5}$$

удовлетворяющий условию $F^2=1$. Из (2), (5) следует, что тензор $F_{ij}=F^k_i G_{kj}$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & G_{s\bar t}\\ -G_{\bar s t} & 0\end{pmatrix}. \tag{6}$$

Таким образом, F_{ij} является антисимметрическим тензором.

Так как в силу (4), (5)

$$\nabla_k F^j_i=\partial_k F^j_i-\Gamma^l_{ki}F^j_l+\Gamma^j_{kl}F^l_i=0,$$

то многообразие 0-пар $M_{2n}(x^s, y_s)$ является S-пространством гиперболического типа [3].

В силу (2), (4) и известной формулы

$$R_{ijkm}=G_{ml}(\partial_i\Gamma^l_{jk}-\partial_j\Gamma^l_{ik}+\Gamma^l_{ih}\Gamma^h_{jk}-\Gamma^l_{jh}\Gamma^h_{ik})$$

тензор кривизны пространства 0-пар $M_{2n}(x^s, y_s)$ имеет вид:

$$R_{s\bar t u\bar v}=-G_{\bar v r}\partial_{\bar t}\Gamma^r_{su}=-\frac{1}{\Delta^4}\,[(\delta^s_v\delta^t_u+\delta^v_u\delta^t_s)\,\Delta^2+2x^t x^v y_u y_s+$$

$$+(\delta^s_v x^t y_u+\delta^t_s x^v y_u+\delta^v_u x^t y_s+\delta^t_u x^v y_s)\,\Delta], \tag{7}$$

$$R_{stuv}=R_{\bar s\bar t\bar u\bar v}=R_{st\bar u\bar v}=0.$$

Если тензор кривизны S-пространства M_{2n} (эллиптического типа) удовлетворяет условию ($K=\mathrm{const}$):

$$R_{ijkm}=K\,[-\omega\,(G_{im}G_{jk}-G_{ik}G_{jm})+F_{im}F_{jk}-F_{ik}F_{jm}-2F_{ij}F_{km}], \tag{8}$$

где $\omega=-1$, то M_{2n} называется пространством постоянной аналитической кривизны (эллиптического типа) [1]. Если же тензор кривизны S-пространства гиперболического типа удовлетворяет условию (8) при $\omega=1$, то M_{2n} будем называть пространством постоянной аналитической кривизны гиперболического типа.

В силу (7), (6), (2) соотношение (8) выполняется для всех значений индексов $i, j, \ldots$, при $\omega=1$, $K=\frac{1}{2}$. Таким образом, пространство 0-пар $M_{2n}(x^s, y_s)$ является пространством постоянной аналитической кривизны $\left(K=\frac{1}{2}\right)$ гиперболического типа.

2. В пространстве $M_{2n}(x^s, y_s)$ зададим гиперповерхность

$$y_n=f(x^s, y_a),\quad a, b, \ldots=1, \ldots, n-1. \tag{9}$$

Эта гиперповерхность в проективном пространстве P_n определяет соответствие, которое каждой точке $X(1, x^s)$ относит $(n-1)$-мерную последовательность гиперповерхностей $y(1, -y_s)$, в общем касающихся некоторой гиперповерхности в P_n.

В каждой точке гиперповерхности (9) существует репер (B^i_σ, C^i), $\tau, \sigma, \omega = 1, \ldots, n, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}$:

$$B^\tau_\sigma = \delta^\tau_\sigma, \quad B^{\bar{n}}_\sigma = f_\sigma, \quad C^i = \frac{N^i}{\sqrt{2\left|\frac{L}{\Delta}\right|}}\,; \tag{10}$$

и корепер $(\tilde{B}^\sigma_i, \tilde{C}_i)$:

$$\tilde{B}^\sigma_\tau = \delta^\sigma_\tau + \frac{f_\tau N^\sigma}{2L}, \qquad \tilde{B}^\sigma_{\bar{n}} = -\frac{N^\sigma}{2L}, \qquad C_\sigma = -\frac{f_\sigma}{L\sqrt{2\left|\frac{\Delta}{L}\right|}},$$

$$\tilde{C}_{\bar{n}} = \frac{1}{L\sqrt{2\left|\frac{\Delta}{L}\right|}}, \tag{11}$$

где

$$L = -f_s N^s,$$

$$N^a = -f_{\bar{a}} - x^a(y_n - f_{\bar{b}} y_b),$$

$$N^n = 1 - x^n(y_n - f_{\bar{b}} y_b),$$

$$N_{\bar{s}} = -f_s + y_s f_t x^t,$$

$$f_s = \frac{\partial f}{\partial x^s}, \qquad f_{\bar{a}} - = \frac{\partial f}{\partial y_a}. \tag{12}$$

Так как в силу (2), (10)

$$G_{ij} C^i B^j_\sigma = 0, \qquad G_{ij} C^i C^j = \frac{L\Delta}{|L\Delta|} = \varepsilon = \pm 1,$$

то вектор C^i является ε — единичным и нормальным вектором гиперповерхности (9). Изотропные гиперповерхности будем исключать из рассмотрения, поэтому предположим, что $L \neq 0$.

Известно [3], что на гиперповерхности S-пространства гиперболического типа при нормальном оснащении возникает почти контактная метрическая структура (φ, ξ, η, g) гиперболического типа 1 рода:

$$\varphi^\tau_\sigma = B^i_\sigma F^j_i \tilde{B}^\tau_j, \qquad \xi^\tau = -\tilde{B}^\tau_i F^i_j C^j,$$

$$\eta_\sigma = B^i_\sigma F^j_i \tilde{C}_j, \qquad g_{\sigma\tau} = B^i_\sigma B^j_\tau G_{ij}.$$

В силу (2), (5), (10), (11) эта структура на гиперповерхности (9) пространства $M_{2n}(x^s, y_s)$ имеет вид:

$$\varphi^\sigma_s = \delta^\sigma_s + \frac{1}{L} f_s N^\sigma, \qquad \varphi^{\ \sigma}_{\ \bar{a}} = -\delta^\sigma_{\bar{a}};$$

$$\xi^t = -\frac{1}{\sqrt{2\left|\frac{L}{\Delta}\right|}} N^t, \qquad \xi^{\bar{b}} = \frac{1}{\sqrt{2\left|\frac{L}{\Delta}\right|}} N^{\bar{b}};$$

$$\eta_s = \frac{-\sqrt{2\left|\frac{L}{\Delta}\right|}}{L} f_s, \qquad \eta_{\bar{a}} = 0; \tag{13}$$

$$g_{st}=\frac{1}{\Delta^2}\,[(y_s f_t+y_t f_s)\,x^n+\delta^n_s f_t\,\Delta+\delta^n_t f_{\bar s}\,\Delta],$$

$$g_{s\bar a}=\frac{1}{\Delta^2}\,[(x^a+f_{\bar a}x^n)\,y_n+\delta^s_a\,\Delta+\delta^n_s f_{\bar a}\,\Delta],\qquad g_{\bar a\bar b}=0.$$

При оснащении гиперповерхности (9) нормальным вектором C^i (10) асимтотический тензор

$$h_{\sigma\tau}=\partial_\sigma B^k_\tau\,\tilde C_k+B^i_\sigma B^j_\tau\,\Gamma^k_{ij}\,\tilde C_k$$

в силу (4), (10), (11) имеем вид:

$$h_{st}=\frac{1}{L\sqrt{2\left|\frac{\Delta}{L}\right|}}\left(f_{st}+\frac{f_s\,(f_t x^n-y_t)+f_t\,(f_s x^n-y_s)}{\Delta}\right), \tag{14}$$

$$h_{s\bar a}=\frac{1}{L\sqrt{2\left|\frac{\Delta}{L}\right|}}\left(f_{s\bar a}+\frac{f_s\,(f_{\bar a}x^n+x^a)}{\Delta}\right),\qquad h_{\bar a\bar b}=\frac{1}{L\sqrt{2\left|\frac{\Delta}{L}\right|}}f_{\bar a\bar b}.$$

Контактной омбилической гиперповерхностью называется гиперповерхность в S-пространстве с индуцированной $(\varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ – структурой 1 рода, асимптотический тензор которой имеет вид

$$h_{\sigma\tau}=\alpha g_{\sigma\tau}+\beta\eta_\sigma\eta_\tau,$$

где $\beta=\mathrm{const}\neq 0$, β – произвольная функция.

Это определение дается как для эллиптического (см. напр. [1]), так и для гиперболического случая.

Имеет место теорема [3].

Теорема 1. *Для того, чтобы гиперповерхность в S-пространстве была контактной омбилической, необходимо и достаточно, чтобы индуцированная на гиперповерхности $(\varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ – структура I рода была нормальной и контактной метрической структурой.*

В случае пространства постоянной аналитической кривизны гиперболического типа можно доказать следующую теорему, аналогичную теореме для эллиптического случая, приведенной Таширо и Тачибаной [1].

Теорема 2. *Если в пространстве постоянной аналитической кривизны гиперболического типа существует контактная омбилическая гиперповерхность, то ее асимптотический тензор имеет вид*

$$h_{\sigma\tau}=\alpha g'_{\sigma\tau}-\frac{K}{\alpha}\,\eta_\sigma\eta_\tau.$$

Таким образом, контактные омбилические гиперповерхности (9) пространства 0-пар M_{2n} будем искать из системы дифференциальных уравнений, полученных из (13), (14) и соотношения

$$h_{\sigma\tau}=\alpha g_{\sigma\tau}-\frac{1}{2\alpha}\,\eta_\sigma\eta_\tau. \tag{15}$$

Из (15) при $\sigma=\bar a$, $\tau=\bar b$ в силу (13), (14) следует, что

$$f_{\bar a\bar b}=0.$$

Таким образом, контактная омбилическая гиперповерхность в пространстве M_{2n} имеет вид:

$$f=A\,(x^s)+A^a\,(x^s)\,y_a.$$

В проективном пространстве P_n эта гиперповерхность определяет соответствие, каждой точке $X(1, x^s)$ относящее пучок гиперповерхности $Y(1, -y_s)$ проходящих через точку $\tilde{X}\left(1, -\frac{A^a}{A}, \frac{1}{A}\right)$.

Приведем примеры таких соответствий $X \to \tilde{X}$ в P_n, которым отвечают контактные омбилические гипервоперхности в M_{2n}.

Пусть каждой точке $X(1, x^s)$ пространства P_n ставится в соответствие точка $\tilde{X}\left(1, \frac{x^s}{R(x^t)}\right)$, лежащая на прямой, проходящей через точку X и точку $O(1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n})$. Гиперповерхность в M_{2n}, отвечающая этому соответствию, имеет вид

$$f = \frac{R(x^s) - x^a y_a}{x^a}. \tag{16}$$

Подставляя (16) в (15), учитывая (13), (14), получим

$$R_{st} = 0,$$

и для $x^n \neq 0$

$$\alpha = -\frac{\varepsilon\varepsilon_1}{\sqrt{2\,|R - R_s x^s|}} \neq 0,$$

где

$$\varepsilon = \operatorname{sgn}(R - R_s x^s), \qquad \varepsilon_1 = \operatorname{sgn}(x^n), \qquad R_s = \frac{\partial R}{\partial x^s}.$$

Отсюда гиперповерхность

$$f = \frac{a_s x^s + a_0 - x^a y_a}{x^n},$$

$$a_\alpha = \mathrm{const}, \qquad x^n > 0,$$

удовлетворяет условию (15) для $\alpha = -\frac{\operatorname{sgn} a_0}{\sqrt{2\,|a_0|}}$.

В пространстве P_n соответствие $X(1, x^s) \to \tilde{X}\left(1, \frac{x^s}{a_t x^t + a_0}\right)$ определяет гомологию с гиперповерхностью неподвижных точек:

$$a_s x^s = 1 - a_0 \tag{17}$$

и неподвижной точкой $O(1, 0, \ldots, 0)$ (изолированной, если $a_0 \neq 1$). Точка $C\left(1, \frac{(1-a_0)x^s}{a_t x^t}\right)$ является точкой пересечения неподвижной гиперповерхности (17) и прямой OX. Нетрудно заметить, что

$$(O, C, X, \tilde{X}) = a_0.$$

Таким образом, контактную омбилическую гиперповерхность в M_{2n} можно задать следующим соответствием в P_n.

Зададим в пространстве P_n произвольную 0-пару. Без стеснения общности точку этой 0-пары можно отождествить с точкой $O(1, 0, \ldots, 0)$, а гиперповерхность, непроходящую через эту точку, можно задать уравнением

$$a_s x^s = 1. \tag{18}$$

Каждой точке $x(1, x^s)$ будем ставить в соответствие точку $\tilde{X}(1, \tilde{x}^s)$, лежащую на прямой OX так, чтобы

$$(O, C, X, \tilde{X}) = c = \mathrm{const} \neq 1,$$

где $C\left(1, \frac{x^s}{a_t x^t}\right)$ — точка пересечения гиперплоскости (18) и прямой OX. Тогда соответствие $X(1, x^s) \to \tilde{X}\left(1, \frac{x^s}{(1-c)a_t x^t + c}\right)$ определяет в пространстве $M_{2n}(x^s, y_s)$ контактную омбилическую гиперповерхность

$$f = \frac{(1-c)a_t x^t + c - x^a y_a}{x^n},$$

где

$$\alpha = -\frac{\operatorname{sgn} c}{\sqrt{2|c|}},$$

если $x^n > 0$. В частности, если любой точке X в пространстве P_n ставится в соответствие точка $\tilde{X}$, симметричная точке X относительно фиксированной 0-пары $\{O, a_s x^s = 1\}$, то $c = -1$, и гиперповерхность

$$f = \frac{2a_t x^t - 1 - x^a y_a}{x^n},$$

отвечающая этому соответствию $X \to \tilde{X}$, является контактной омбилической гиперповерхностью при $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. Условие

$$\varphi^\tau_\sigma h_{\tau\omega} + \varphi^\tau_\omega h_{\tau\sigma} = 0,$$

необходимое и достаточное [3], чтобы (φ, ξ, η, g) — структура была нормальной, для $n=2$ в силу (13), (14) приводит к следующей системе дифференциальных уравнений для функции

$$y_2 = f(x', x^2, y_1): \tag{19}$$

$$f_{11}f_2^2 - 2f_{12}f_1 f_2 + f_{22}f_1^2 = 0,$$

$$f_{ii} = 0, \qquad \partial_{\bar{1}}\left(\frac{\Delta}{L}\right) = 0, \tag{20}$$

$$f_1 f_{12} - f_2 f_{11} = -\frac{f_{\bar{1}}(f_2 y_1 - f_1 y_2)}{\Delta} + \frac{f_{\bar{1}}[f_1(1 - x^1 y_1) - f_2 x^2 y_1]}{L}(f_{\bar{1}2}f_1 - f_{\bar{1}1}f_2).$$

Условие [3]:

$$\partial_\sigma \eta_\tau - \partial_\tau \eta_\sigma = 2\alpha\varphi^\omega_\sigma g_{\omega\tau}, \qquad \alpha = \text{const} \neq 0,$$

необходимое и достаточное, чтобы (φ, ξ, η, g)-структура (13) была контактной метрической структурой, для $n=2$ имеет вид:

$$\partial_{\bar{1}}\left(\frac{f_1}{L\sqrt{2\left|\frac{\Delta}{L}\right|}}\right) = \alpha\frac{1 - x^2 y_2 + f_{\bar{1}} x^2 y_1}{\Delta^2},$$

$$\partial_{\bar{1}}\left(\frac{f_2}{L\sqrt{2\left|\frac{\Delta}{L}\right|}}\right) = \alpha\frac{f_{\bar{1}}(1 - x^1 y_1) + x^1 y_2}{\Delta^2}, \tag{21}$$

$$f_2\partial_1\left(\frac{1}{L\sqrt{2\left|\frac{\Delta}{L}\right|}}\right) - f_1\partial_2\left(\frac{1}{L\sqrt{2\left|\frac{\Delta}{L}\right|}}\right) = \alpha\frac{f_{\bar{1}}(1 - x^1 y_1) - f_2 x^2 y_1}{\Delta^2}.$$

Оказывается, что система (21) является следствием системы (20) и условия

$$\alpha = \frac{f_{\bar{1}2}f_1 - f_{1\bar{1}}f_2}{\sqrt{2\left|\frac{L}{\Delta}\right|^3}} = \text{const.} \tag{22}$$

Отсюда и из теоремы 1 следует следующая теорема.

Теорема 3. *Для того, чтобы гиперповерхность* (19) *в четырехмерном пространстве* 0-*пар* M_4 (x^1, x^2, y_1, y_2) *была контактной омбилической, необходимо и достаточно, чтобы* (φ, ξ, η, g) — *структура гиперболического типа* 1 *рода* (13), *индуцируемая на этой гиперповерхности при нормальном оснащении, была нормальной структурой и выполнялось соотношение*:

$$\frac{f_{\bar{1}2}f_1 - f_{1\bar{1}}f_2}{\left|\frac{L}{\Delta}\right|^{\frac{3}{2}}} = \text{const.}$$

Существуют соответствия $X(1, x^1, x^2) \to \tilde{X}(1, \tilde{x}^1, \tilde{x}^2)$ в P_2, приводящие к гиперповерхностям в M_4 с нормальной почти контактной метрической структурой. В качестве примеров можно указать следующие аффинные соответствия:

$$\begin{aligned}
&1)\ \tilde{x}^1 = x^1,\ \tilde{x}^2 = x^1 + x^2 + r;\\
&2)\ \tilde{x}^1 = x^1,\ \tilde{x}^2 = qx^2 + r;\\
&3)\ \tilde{x}^1 = ax^1 + c,\ \tilde{x}^2 = x^2;\\
&4)\ \tilde{x}^1 = ax^1 + c,\ x^2 = qx^2 + r.
\end{aligned} \tag{23}$$

Кроме того, для гиперповерхностей $f = \frac{1 - \tilde{x}^1 y_1}{\tilde{x}^2}$, отвечающих аффинным соответствиям (23), выполняется условие (22). В силу теоремы 3 эти гиперповерхности — контактные омбилические гиперповерхности.

Шяуляйский Государственный педагогический институт

Поступило в редакцию 8.XII.1969

Литература

1. Y. Tashiro, S. Tachibana, On Fubinian and *c*-Fubinian manifolds, Kodai Math. Sem. Repts., 15(1963), 176–183.
2. Б. А. Розенфельд, Проективная геометрия как метрическая геометрия, Тр. сем. по вект. и тенз. анализу, 8 (1950), 328–354.
3. А. Л. Крищюнайте, Об условиях нормальности и интегрируемости почти контактных структур на гиперповерхностях комплексного и двойного пространства, Уч. Зап. Казанск. ун-та 128, кн. 3, 1968, 55–75.

APIE KONTAKTINIUS UMBILINIUS HIPERPAVIRŠIUS 0-PORŲ ERDVĖJE

A. Kriščiūnaitė

(*Reziumė*)

Nagrinėjama 0-porų daugdara, kuri yra hiperbolinio tipo pastovaus analizinio kreivumo erdvė. Šioje erdvėje nagrinėjami kontaktinių umbilinių hiperpaviršių pavyzdžiai.

ON CONTACT UMBILIC HYPERSURFACES IN 0-PAIR SPACE

A. Kriščiūnaitė

(*Summary*)

Manifold of 0-pairs is viewed. It is the space of constant holomorphic sectional curvature (hyperbolic type). In this space some contact umbilic hypersurfaces are regarded.