XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1

1971

УДК 517. 537

ЗАМЕТКА О СХОДИМОСТИ РЯДА ДИРИХЛЕ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ СХОДИМОСТИ

В. Кабайла

Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z} \tag{1}$$

ряд Дирихле с действительными показателями λ_k, где $\lambda_{k+1}-\lambda_k \downarrow 0$. В настоящей заметке указаны точные (в определенном смысле) условия, достаточные для сходимости ряда (1) во всех конечных точках прямой, ограничивающей полуплоскость сходимости. Условия налагаются на λ_k и a_k.

Очевидно, линейной заменой переменной z можно добиться, чтобы абсцисса сходимости ряда (1) была равна нулю. Будем считать, что такая замена уже сделана и рассмотрим ряд (1), для которого абсцисса сходимости равна нулю. Тогда уравнение прямой сходимости будет $z=it$ (для любых действительных t).

Тривиальным достаточным условием сходимости ряда (1) во всех конечных точках прямой $z=it$ будет сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|,$$

тривиальным необходимым условием-сходимость ряда (1) в нулевой точке прямой сходимости, т.е. сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Лемма. *Пусть* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *— сходящийся ряд комплексных чисел,* $\{b_k\}$ *— ограниченная последовательность комплексных чисел. Тогда ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \tag{2}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_k (b_{k+1}-b_k) \quad \left(r_k = \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j\right) \tag{3}$$

оба вместе сходятся или расходятся.

Утверждение леммы легко следует из преобразования Абеля, именно, если обозначить сумму ряда Σa_k буквой A, то получается:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = Ab_1 - r_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} r_k (b_{k+1} - b_k),$$

откуда с помощью предельного перехода при $n \to \infty$ получается утверждение леммы.

Теорема 1. *Пусть* $\{\lambda_k\}$ *— произвольная последовательность действительных чисел,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{4}$$

— сходящийся ряд комплексных чисел и

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k. \tag{5}$$

Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |r_k| \cdot |\lambda_{k+1} - \lambda_k| \tag{6}$$

сходится, то и ряд (1) *сходится во всех конечных точках прямой* $z = it$ *(для любых действительных значений* t*); если же ряд* (6) *расходится и, кроме того,* $\lambda_{k+1} - \lambda_k \to 0$ *при* $k \to \infty$*, то для любого не равного нулю действительного числа* t_0 *существует такая последовательность комплексных чисел* $\{a'_k\}$*, что ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a'_k$ *сходится,*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a'_k \right| = |r_n| \tag{7}$$

и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a'_k e^{i\lambda_k t_0} \tag{8}$$

расходится.

Доказательство. Если ряд (6) сходится, то для любого действительного числа t ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_k (e^{i\lambda_{k+1} t} - e^{i\lambda_k t}) \tag{9}$$

сходится абсолютно, так как

$$|e^{i\lambda_{k+1} t} - e^{i\lambda_k t}| \leqslant |\lambda_{k+1} - \lambda_k| \cdot |t|.$$

Сходимость ряда (1) следует из леммы, если выбрать $b_k = e^{i\lambda_k t}$.

Пусть теперь ряд (6) расходится, $\lambda_{k+1}-\lambda_k\to 0$ при $k\to\infty$ и пусть t_0 — любое не равное нулю действительное число. Определим числа r'_n и a'_n равенствами:

$$|r'_n|=|r_n|,$$
$$\arg r'_n=-\arg\left(e^{i\lambda_{k+1}t_0}-e^{i\lambda_k t_0}\right),$$
$$a'_n=r'_{n-1}-r'_n.$$

Тогда

$$r'_k\left(e^{i\lambda_{k+1}t_0}-e^{i\lambda_k t_0}\right)=|r_k|\cdot|e^{i\lambda_{k+1}t_0}-e^{i\lambda_k t_0}|=|r_k|\cdot|\lambda_{k+1}-\lambda_k|\,(|t_0|+\alpha_k),$$

где $\alpha_k\to 0$ при $k\to\infty$. Следовательно, из расходимости ряда (6) следует расходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} r'_k\left(e^{i\lambda_{k+1}t_0}-e^{i\lambda_k t_0}\right)$$

и, на основе леммы, расходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a'_k\, e^{i\lambda_{k+1}t_0}.$$

Замечание. В частном случае, когда $\lambda_k=\ln k$, получается:

$$\lambda_{k+1}-\lambda_k=\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\sim\frac{1}{k},$$

поэтому в формулировке теоремы 1 для случая $\lambda_k=\ln k$ ряд (6) можно заменить рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|r_k|}{k}. \tag{6'}$$

С помощью теоремы 1 легко построить пример ряда Дирихле, сходящегося на всей прямой, ограничивающей область сходимости. Пусть, например, $\lambda_k=\ln k$ и a_k выбраны так, чтобы было $|r_k|=\ln^{-\alpha}k$, $\alpha>1$ для $k>1$ (очевидно, $a_k=r_{k-1}-r_k$). Тогда абсцисса сходимости

$$C=\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\ln|r_k|}{\ln k}=\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{-\alpha\ln\ln k}{\ln k}=0$$

и ряд (6′) сходится. По теореме 1 для выбранных λ_k и a_k ряд (1) сходится на всей прямой $z=it$. При этом, если $r_k=(-1)^k\ln^{-\alpha}k$, то $\Sigma\,|a_k|=\infty$.

Несколько изменяя способ доказательства можно получить и другие условия, достаточные для сходимости ряда (1) на всей границе области сходимости. Для простоты дальше ограничимся случаем $\lambda_k=\ln k$.

Пусть ряд $\Sigma\,a_k$ сходится. По лемме, ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\, e^{it\ln k} \tag{10}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_k [e^{it\ln(k+1)} - e^{it\ln k}] \tag{11}$$

(t — произвольное действительное число) оба вместе сходятся или расходятся. Заметим, что

$$e^{it\ln(k+1)} - e^{it\ln k} = \frac{it}{k} e^{it\ln k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

и $r_k \to 0$ при $k \to \infty$, поэтому

$$r_k [e^{it\ln(k+1)} - e^{it\ln k}] = it \cdot \frac{r_k}{k} e^{it\ln k} + O\left(\frac{|r_k|}{k^2}\right).$$

Так как ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|r_k|}{k^2},$$

очевидно, сходится, то ряд (11) и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k}{k} e^{it\ln k} \tag{12}$$

оба вместе сходятся или расходятся. Теперь применим преобразование Абеля для частичных сумм S_n ряда (12):

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} r_k \cdot \frac{e^{it\ln k}}{k} =$$

$$= \frac{r_1 + \cdots + r_n}{n} e^{it\ln n} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{r_1 + \cdots + r_k}{k} \left[\frac{k}{k+1} e^{it\ln(k+1)} - e^{it\ln k}\right].$$

Введем обозначение:

$$\tilde{r}_n = \frac{r_1 + \cdots + r_n}{n}. \tag{13}$$

Тогда

$$S_n = \tilde{r}_n e^{it\ln n} - \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{r}_k [e^{it\ln(k+1)} - e^{it\ln k}] + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\tilde{r}_k}{k+1} e^{it\ln(k+1)}. \tag{14}$$

Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\tilde{r}_k|}{k} \tag{15}$$

сходится, то правая часть равенства (14) для любого действительного числа t имеет конечный предел при $n \to \infty$ и, следовательно, ряд (12) сходится, а из сходимости ряда (12), как заметили раньше, следует сходимость ряда (11) и ряда (10), т.е. сходимость ряда Дирихле во всех точках прямой, ограничивающей область сходимости.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *— сходящийся ряд комплексных чисел,* S *и* S_n *— сумма и частичная сумма этого ряда и*

$$\tilde{r}_n = S - \frac{S_1 + \cdots + S_n}{n} = \frac{r_1 + \cdots + r_n}{n}$$

$(r_k = S - S_k)$. *Если ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\tilde{r}_k|}{k} \tag{16}$$

сходится, то и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{it \ln k} \tag{17}$$

сходится для всех конечных действительных чисел t.

Нетрудно заметить, что теорема 2 не является следствием теоремы 1. Если, например, $r_k = \frac{(-1)^k}{\ln \ln (k+1)}$ и, соответственно,

$$a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{\ln \ln k} - \frac{(-1)^k}{\ln \ln (k+1)} \qquad (k > 1),$$

то ряд (6′) расходится, а ряд (16) — сходится, так как

$$\frac{|\tilde{r}_k|}{k} = \frac{1}{k^2} \left| \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^j}{\ln \ln (j+1)} \right| = O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
30.I.1970

APIE DIRICHLĖ EILUTĖS KONVERGAVIMĄ KONVERGENCIJOS SRITIES KONTŪRO TAŠKUOSE

V. Kabaila

(Reziumė)

Šiame straipnyje yra nurodytos sąlygos, kad Dirichlė eilutė

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z} \tag{1}$$

su realiais rodikliais λ_k konverguotų visuose baigtiniuose konvergavimo srities kontūro taškuose; šios sąlygos yra tam tikra prasme tikslios. Nesusiaurinant klausimo, galima laikyti, kad (1) eilutės konvergavimo abscisė yra 0.

8. Leid. 11663.

1 teorema. *Sakysime,* $\{\lambda_k\}$ — *realių skaičių seka,* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — *konverguojanti eilutė ir* $r_k = \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j$. *Jeigu eilutė*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |r_k| \cdot |\lambda_{k+1} - \lambda_k| \tag{2}$$

konverguoja, tai ir (1) *eilutė konverguoja visuose baigtiniuose tiesės* $z = it$, $-\infty < t < +\infty$, *taškuose; jeigu* (2) *eilutė diverguoja ir, be to,* $\lambda_{k+1} - \lambda_k \to 0$, *kai* $k \to \infty$, *tai bet kokiam nelygiam nuliui realiam skaičiui* t_0 *egzistuoja tokia kompleksinių skaičių seka* $\{a_k'\}$, *kad eilutė* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k'$ *konverguoja,*

$$\left| \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j' \right| = |r_k|$$

ir eilutė

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k' e^{i\lambda_k t_0}$$

diverguoja.

Tuo atveju, kai $\lambda_k = \ln k$, (1) eilutės konvergavimui visuose baigtiniuose tiesės $z = it$ taškuose pakanka, kad konverguotų eilutė

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\bar{r}_k|}{k};$$

čia $\bar{r}_k = \frac{1}{k}(r_1 + \cdots + r_k)$.

ON THE CONVERGENCE OF DIRICHLET SERIES IN BOUNDARY POINTS OF CONVERGENCE DOMAIN

V. Kabaila

(*Summary*)

The author treats the conditions of convergence of Dirichlet series

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z} \tag{1}$$

with the real λ_k in all boundary points of the convergence do main.

Theorem 1. *Let* $\{\lambda_k\}$ *be a sequence of real numbers,* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *a convergent series of complex numbers and* $r_k = \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j$. *If*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |r_k| \cdot |\lambda_{k+1} - \lambda_k| < \infty, \tag{2}$$

then the series (1) *converges in all points* $z=it$, $-\infty<t<+\infty$; *if the series* (2) *diverges and* $\lim\limits_{k\to\infty}(\lambda_{k+1}-$ $-\lambda_k)=0$, *then for any real number* t_0 $(t_0\neq 0)$ *exists the complex numbers set* $\{a_k'\}$ *for which the series* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k'$ *converges,* $\left|\sum\limits_{j=k+1}^{\infty} a_j'\right|=|r_k|$ *and the series*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k' e^{i\lambda_k t_0}$$

diverges.

In the case $\lambda_k=\ln k$ the series (1) converges in all points $z=it$, $-\infty<t<+\infty$, if

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\bar{r}_k|}{k}<\infty$$

where $\bar{r}_k=\dfrac{1}{k}(r_1+\cdots+r_k)$.