XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1971

УДК 519.21

НЕКОТОРЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

А. Алешкявичене

Пусть имеется последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимых неотрицательных одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F(x)$. Будем считать, что величины ξ_l принадлежат классу D_h, если они принимают значения только из некоторой арифметической прогрессии kh (h – максимальный шаг распределения, k – целое число). Величины ξ_l, удовлетворяющие условию Крамера

$$\overline{\lim_{z\to\infty}} \left| \int_0^\infty e^{izx}\,dF(x) \right| < 1, \tag{1}$$

будем называть величинами класса C. Не нарушая общности, можем предполагать, что ξ_l не равны константе с вероятностью единица.

Обозначим

$$S_0=0, \quad S_m=\sum_{l=1}^{m} \xi_l, \qquad m=1,\ 2,\ \ldots$$

Случайный процесс

$$N(t)=\max\{m : S_m<t\}, \qquad t\in [0,\infty), \tag{2}$$

принято называть процессом восстановления. Если величины ξ_l интерпретировать как длительности существования последовательности заменяемых элементов, то $N(t)$ будет числом восстановлений элемента за отрезок времени $[0, t)$. Следуя В. Л. Смиту (см. [4]), процесс восстановления будем называть дискретным, если ξ_l являются величинами класса D_h. Процесс восстановления, который не является дискретным, будем называть непрерывным.

В этой заметке будем говорить 1) о предельном распределении с различными уточнениями процесса $N(t)$, когда $t\to\infty$ и величины ξ_l принадлежат области притяжения нормального закона, 2) об асимптотических выражениях моментов и семиинвариантов процесса $N(t)$ при $t\to\infty$ и 3) о предельном распределении сумм $\sum_{l=1}^{m} N_l(t)$ независимых одинаково распределенных процессов восстановления $N_l(t)$, когда $t\to\infty$ и $n\to\infty$.

1) Хорошо известна интегральная предельная теорема В. Феллера ([1], см. также [2] и [3]) для процесса $N(t)$, в которой утверждается, что если $\mu_2 < \infty$, то равномерно по x

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{N(t)-\frac{t}{\mu_1}}{\bar{\sigma}\sqrt{t}} < x \right\} = \Phi(x),$$

где

$$\mu_r = \int_0^\infty x^r dF(x), \quad \bar{\sigma}^2 = \frac{\mu_2-\mu_1^2}{\mu_1^3} \quad \text{и} \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

Интегральная теорема подсказывает утверждение локальной предельной теоремы для $N(t)$. Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если случайные величины ξ_l принадлежат одному из классов D_1 или C и, кроме того, имеют конечные вторые моменты, то при $t\to\infty$ равномерно относительно k*

$$\mathbf{P}\{N(t)=k\} = \frac{1}{\bar{\sigma}\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x_{tk}^2}{2}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right),$$

где

$$x_{tk} = \frac{k-\mathbf{M}N(t)}{\bar{\sigma}\sqrt{t}}.$$

Заметим, что аналогичная локальная теорема в дискретном случае была доказана З. И. Шарагиной [6] в предположении, что величины ξ_l имеют третий конечный момент.

Сформулируем другие наши результаты.

Теорема 2. *Если случайные величины ξ_l принадлежат одному из классов D_1 или C и имеют конечные моменты до порядка r ($r\geqslant 3$) включительно, то при $t\to\infty$ равномерно по k*

$$\mathbf{P}\{N(t)=k\} = \frac{1}{\bar{\sigma}\sqrt{t}} \left\{ \varphi(x_{tk}) + \sum_{\nu=1}^{r-2} \frac{1}{t^{\nu/2}} P_\nu\left(-\varphi(x_{tk})\right) \right\} + o\left(\frac{1}{t^{\frac{r-1}{2}}}\right).$$

Здесь

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

и $P_\nu(-u)$ — полиномы степени 3ν относительно u, и коэффициенты которых зависят от первых $\nu+2$ моментов распределения $F(x)$, а $P_\nu\left(-\varphi(x)\right)$ вычисляются как $P_\nu(-u)$ с заменой u^s на

$$\varphi^{(s)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^s}{dx^s} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Теорема 3. *Если величины ξ_l принадлежат одному из классов D_h или C и имеют конечный третий момент, то при $t\to\infty$ равномерно по x*

$$F_t(x) = \mathbf{P}\left\{ \frac{N(t)-\mathbf{M}N(t)}{\bar{\sigma}\sqrt{t}} < x \right\} = \Phi(x) + \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi t}} Q_1(x) +$$

$$+ \frac{1}{\bar{\sigma}} S\left((x+a_t)\bar{\sigma}\sqrt{t}\right) e^{-\frac{x_2}{2}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right),$$

где

$$Q_1(x)=\frac{\mu_1^4+3(\mu_2-\mu_1^2)\mu_2-\mu_3\mu_1}{6\bar\sigma^3\mu_1^5}(1-x^2),$$

$$S(x)=[x]-x+\frac{1}{2}\quad \text{и}\quad a_t=\frac{\mathbf{M}N(t)}{\bar\sigma\sqrt{t}}.$$

Теорема 4. *Пусть случайные величины* ξ_l *принадлежат одному из классов* D_h *или* C. *Пусть, далее, существует такое число* $A>0$, *что*

$$\mathbf{M}e^{A|\xi_l|}<\infty. \tag{3}$$

Тогда при $t\to\infty$ *в интервале* $0<x\leqslant\bar\delta\bar\sigma\Delta_2\sqrt{t}$, $\bar\delta<\bar\delta_H$ *имеют место соотношения*

$$\frac{1-F_t(x)}{1-\Phi(x)}=e^{\frac{x^3}{\sqrt{t}}\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)}\left(1+f_1(\bar\delta,H)\frac{1+x}{\sqrt{t}}\right),$$

$$\frac{F_t(-x)}{\Phi(-x)}=e^{-\frac{x^3}{\sqrt{t}}\lambda\left(-\frac{x}{\sqrt{t}}\right)}\left(1+f_2(\bar\delta,H)\frac{1+x}{\sqrt{t}}\right).$$

Здесь

$$|f_i(\bar\delta,H)|<\frac{8H\left\{1+7,2\left(H+2\delta+\min\left\{\frac{1}{3}(1-\delta)^3H^{-1},\ \frac{1}{2}H^{-\frac{1}{4}}\right\}\right)\right\}}{(1-\delta)^4(1-\rho)^{3/2}},$$

$i=1,\ 2,$

$0<\delta<\delta_H$ определяется из уравнения $\bar\delta=\frac{\delta(1+\delta)}{2}$,

$$\rho=\frac{6H\delta}{(1-\delta)^3},\quad \bar\delta_H=\frac{\delta_H(1+\delta_H)}{2},$$

δ_H – действительный корень уравнения $\rho=1$, $\lambda(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k z^k$ – степенной ряд Крамера, построенный с помощью моментов величин ξ_l и сходящийся при $|z|<\bar\delta_H$, причем

$$|\lambda_k|\leqslant\frac{\delta_H}{(k+3)\,\bar\delta_H^{k+2}\,\Delta_2^{k+1}\,\bar\sigma^{k+1}},\qquad k=0,\ 1,\ \ldots,$$

$\Delta_2<A$ и H – постоянное (точное определение для Δ_2 и H в дискретном случае можно найти, напр., в [11]).

Теорема 5. *Если случайные величины* ξ_l *принадлежат одному из классов* D_h *или* C *и для некоторого положительного* $\alpha<\frac{1}{2}$ *удовлетворяют условию*

$$\mathbf{M}\exp\left\{|\xi_l|^{\frac{4\alpha}{2\alpha+1}}\right\}<\infty, \tag{4}$$

то при $t\to\infty$

$$\frac{1-F_t(x)}{1-\Phi(x)}=\exp\left\{\frac{x^3}{\sqrt{t}}\lambda^{[s+1]}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\right\}\left[1+O\left(\frac{1+x}{\sqrt{t}}\right)\right],$$

$$\frac{F_t(-x)}{\Phi(-x)}=\exp\left\{-\frac{x^3}{\sqrt{t}}\lambda^{[s+1]}\left(-\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\right\}\left[1+O\left(\frac{1+x}{\sqrt{t}}\right)\right]$$

равномерно относительно x в интервале $0 \leqslant x \leqslant t^{\alpha}/\rho(t)$, где $\rho(t)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию

$$\lim_{t\to\infty} \rho(t)=\infty. \tag{5}$$

Здесь s — целое неотрицательное число, определяемое неравенствами

$$\frac{s}{2(s+2)} \leqslant \alpha < \frac{s+1}{2(s+3)}, \tag{6}$$

и $\lambda^{[s+1]}(z)$ — отрезок ряда $\lambda(z)$, состоящий из его первых $s+1$ членов:

$$\lambda^{[s+1]}(z)=\lambda_0+\lambda_1 z+\ldots+\lambda_s z^s,\ s\geqslant 1,\ \lambda^{[0]}(z)\equiv 0.$$

Теорема 6. *Пусть случайные величины ξ_l принадлежат одному из классов D_1 или C и при некотором $A>0$ удовлетворяют условию* (3). *Тогда если положить*

$$x=x_{tk}=\frac{k-\mathbf{M}N(t)}{\sigma\sqrt{t}},$$

то при $x\geqslant 0$, $x=o(\sqrt{t})$ и $t\to\infty$ имеем

$$\frac{\sigma\sqrt{t}\,\mathbf{P}\{N(t)=k\}}{\varphi(x)}=\exp\left\{\frac{x^3}{\sqrt{t}}\,\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\right\}\left[1+O\left(\frac{x+1}{\sqrt{t}}\right)\right].$$

При $x>0$, $x=o(\sqrt{t})$ имеем

$$\frac{\sigma\sqrt{t}\,\mathbf{P}\{N(t)=k\}}{\varphi(x)}=\exp\left\{-\frac{x^3}{\sqrt{t}}\,\lambda\left(-\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\right\}\left[1+O\left(\frac{|x|+1}{\sqrt{t}}\right)\right].$$

Здесь $\lambda(z)$ — ряд, фигурирующий в теореме 4 и сходящийся при всех достаточно малых $|z|$.

Теорема 7. *Если случайные величины ξ_l принадлежат одному из классов D_1 или C и для некоторого α $\left(0<\alpha<\frac{1}{2}\right)$* удовлетворяют условию (4), *то при $t\to\infty$*

$$\frac{\sigma\sqrt{t}\,\mathbf{P}\{N(t)=k\}}{\varphi(x_{tk})}=\exp\left\{\frac{x^3}{\sqrt{t}}\,\lambda^{[s+1]}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\right\}\left[1+O\left(\frac{x+1}{\sqrt{t}}\right)\right]$$

в интервале $0\leqslant x=x_{tk}\leqslant t^{\alpha}/\rho(t)$, какова бы ни была функция $\rho(t)$, удовлетворяющая условию (5). *Здесь s — целое неотрицательное число, определяемое неравенствами* (6).

2) Значительная часть работ по теории восстановления посвящена нахождению асимптотических формул для моментов и семиинвариантов процесса $N(t)$. Почти все первые исследования из этой области (обзор работ см. в [5]) относятся к первому моменту $\mathbf{M}N(t)$. Сформулируем типичный результат, относящийся к $\mathbf{M}N(t)$ (см. [4]): если процесс $N(t)$ является непрерывным и $\mu_2<\infty$, то при $t\to\infty$

$$\mathbf{M}N(t)=\frac{t}{\mu_1}+\left(\frac{\mu_2}{2\mu_1^2}-1\right)+o(1).$$

В работе В. Феллера [1] для дискретного процесса, а в работе В. Смита [4] для непрерывного процесса получен следующий результат, касающийся дисперсии: если $\mu_2<\infty$, то при $t\to\infty$

$$\mathbf{D}N(t)=\frac{\mu_2-\mu_1^2}{\mu_1^3}\,t+o(t).$$

В 1959 году В. Смит [5] в предположении, что при некотором целом $m>0$ $\mathbf{P}\{S_m<x\}$ имеет абсолютно непрерывную компоненту, получил асимптотические формулы для старших моментов и семиинвариантов процесса $N(t)$. Нам удалось получить аналогичные результаты в дискретном случае, а в непрерывном случае — требование существования абсолютной компоненты распределения $\mathbf{P}\{S_m<x\}$ заменить условием (1).

Сформулируем наши основные результаты.

Теорема 8. *Если случайные величины ξ_l принадлежат одному из классов D_h или C и $\mu_{m+p+1}<\infty$, $m>0$, $p\geqslant 1$, то существуют постоянные $\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \gamma_{m+1}, a_m$ и b_m такие, что m-тый момент и m-тый семиинвариант процесса $N(t)$ равны соответственно*

$$\mathbf{M}N^m(t)=\gamma_1 t^m+\ldots+\gamma_m t+\gamma_{m+1}+\frac{\lambda_1(t)}{(1+t)^p}$$

и

$$\Gamma N^m(t)=a_m t+b_m+\frac{\lambda_1(t)}{(1+t)^p},$$

где $\lambda_1(t)$ — функция ограниченной вариации, $\lambda_1(t)\to 0$ при $t\to\infty$ для любого фиксированного $\beta>0$

$$\lambda_1(t)-\lambda_1(t-\beta)=0\,(t^{-1})$$

при $t\to\infty$, и, кроме того, для $p\geqslant 1$ $\frac{\lambda_1(t)}{1+t}$ принадлежит классу L_1.

Нужно еще заметить, что М. Лидбеттер в 1963 г. (см. [7]) получил разложение для моментов факториального типа $\Phi_m(t)=\mathbf{M}\big(N(t)+1\big)\ldots\big(N(t)+m\big)$ в случае, когда $F(x)$ можно представить степенным рядом. Дж. Тьюгэлз в 1967 г. (см. [8]) исследовал асимптотическое поведение моментов $\Phi_m(t)$ в случае, когда выполнено (1) и, кроме того, существуют постоянные $K>0$ и $\lambda>0$, удовлетворяющие условию

$$1-F(x)\leqslant Ke^{-\lambda x}.$$

3) Пусть, далее, имеется последовательность $N_1(t)$, $N_2(t)$, … независимых одинаково распределенных процессов восстановления (процессы $N_l(t)$ определяются соотношением (2)). Сумму $\sum\limits_{l=1}^{n} N_l(t)$ можно интерпретировать как число восстановлений за отрезок времени $[0, t)$ в системе, состоящей из n однородных элементов. Б. Григелионисом [9] в непрерывном случае (в предположении, что $F(x)$ имеет абсолютно непрерывную компоненту), а В. Лютикасом в дискретном случае была доказана асимптотическая нормальность сумм $\sum\limits_{l=1}^{n} N_l(t)$ при больших значениях n и t. Но в обоих работах требовалось, чтобы $\mu_4<\infty$. Нам удалось получить те же результаты при менее жестких условиях, а именно справедлива следующая

Теорема 9. *Если случайные величины ξ_l принадлежат одному из классов D_h или C и, кроме того, $\mu_2<\infty$, то равномерно относительно x*

$$\lim_{n,\,t\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{nt}}\sum_{l=1}^{n}\big(N_l(t)-\mathbf{M}N_l(t)\big)<x\right\}=\Phi(x).$$

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
4.XI.1969

Литература

1. W. Feller, Fluctuation theory of recurrent events, Trans. Amer. Math. Soc., **67** (1949), 98–119.
2. L. Takacs, On a probability theorem arising in the theory of counters, Proc. Camb. Phil. Soc., **52** (1956), 488–498.
3. W. L. Smith, Renewal theory and its ramifications, J. Roy. Stat. Soc., Ser. **B**, **20** (1958), 2, 242–302.
4. W. L. Smith, Asymptotic renewal theorems, Proc. Roy. Soc. Edinb., A **64**, 9–48.
5. W. L. Smith, On the comulants of renewal processes, Biometrica, **46**, 1–2 (1959), 1–29.
6. З. И. Шарагина, Локальные предельные теоремы для некоторых схем циклических процессов, канд. дисс., Москва.
7. M. R. Leadbetter, On series expansion for the renewal moments, Biometrica, 1963, **50**, No 1–2, 75–80.
8. J. L. Teugels, Exponential desoy in renewal theorems, Bull. Soc. Math. Belgique, **19**, 1967.
9. Б. Григелионис, О центральной предельной теореме для сумм процессов восстановления, Лит. матем. сб., **IV**, 2 (1964), 197–201.
10. В. Лютикас, О центральной предельной теореме для сумм дискретных процессов восстановления, Лит. матем. сб., **VI**, 3 (1966), 381–392.
11. А. Алешкявичене, Большие уклонения для числа появлений рекуррентного событя. Лит. матем. сб., **VII**, 2 (1967), 187–193.
12. А. Алешкявичене, Центральная предельная теорема для сумм процессов восстановления, Лит. матем. сб., **VIII**, 4 (1968), 617–631.
13. А. Алешкявичене, Вычисление моментов и семиинвариантов дискретного процесса восстановления, Лит. матем. сб., **IX**, 3 (1969), 441–454.
14. А. Алешкявичене, Асимптотические разложения для процессов восстановления, Лит. матем. сб., **IX**, 4 (1969), 713–729.

KAI KURIOS ATSTATYMO PROCESŲ RIBINĖS TEOREMOS

A. Aleškevičienė

Reziumė)

Tarkime, kad turime nepriklausomų neneigiamų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seką $\xi_1, \xi_2, \ldots$ Toliau sakysime,

$$S_0=0, \quad S_m=\sum_{l=1}^{m} \xi_l, \qquad m=1, 2, \ldots$$

Atsitiktinį procesą

$$N(t)=\max\{m: S_m<t\}, \quad t\in[0, \infty),$$

priimta vadinti atstatymo procesu.

Šiame straipsnyje nagrinėjama:

1) proceso $N(t)$ ribinis pasiskirstymas su įvairiais patikslinimais (asimptotiniai išdėstyma ntegralinėje ir lokalinėje ribinėse teoremose didelių nukrypimų integralinės ir lokalinės teoremos), kai $t\to\infty$ ir atsitiktiniai dydžiai ξ_l priklauso normalinio dėsnio traukos sričiai;

2) proceso $N(t)$ momentų ir semiinvariantų asimptotinis elgesys, kai $t\to\infty$;

3) nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atstatymo procesų sumų $\sum_{l=1}^{n} N_l(t)$ ribinis pasikirstymas.

ON LIMIT THEOREMS FOR THE RENEWAL PROCESSES

A. Aleškevičienė

(*Summary*)

Let $\xi_1, \xi_2, \ldots$ by a sequence of independent non-negative equally distributed random variables. Let

$$S_0=0, \quad S_m=\sum_{l=1}^{m} \xi_l, \qquad m=1, 2, \ldots$$

A stochastic process $N(t)=\max\{m: S_m<t\}$, $t\in[0\ \infty)$ is called the renewal process.

In this paper we investigate:

1) limit distribution asymptotic expansions in integral and local limit theorems asymptotic behaviour of the probability of large deviations for the process $N(t)$ when $t\to\infty$ and random variables ξ_l depend to the domain of attraction of stable law,

2) asymptotic behaviour of moments and comulants of the process $N(t)$ when $t\to\infty$,

3) limit distribution of sums $\sum_{l=1}^{n} N_l(t)$ of independent identically distributed renewal processes when $t\to\infty$ and $n\to\infty$.