X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1970

УДК–517.949.2

О ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЦЕЛЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА*)

III. НЕОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ

Л. НАВИЦКАЙТЕ

§ 5. Решение неоднородного уравнения в случае, когда $|A_1(z)|\neq 0$ и $|A_n(z)|\neq 0$

1. Рассмотрим неоднородное уравнение

$$\mathbf{L}[F(z)]\equiv A_1(z)F(z+\alpha_1)+A_n(z)F(z+\alpha_n)+\sum_{k=2}^{n-1}\sum_{l=0}^{s_k}\times$$

$$\times A_{kl}(z)F^{(l)}(z+\alpha_k)=G(z) \tag{1}$$

и предположим сначала, что выполнены следующие условия.

А. *Числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – действительные и $\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n$.*

Б. *Матрицы $A_1(z)$, $A_n(z)$ и $A_{kl}(z)$ целые и имеют конечный порядок не больше ρ.*

В. *Определители $|A_1(z)|$ и $|A_n(z)|$ ни в одной точке комплексной плоскости не равны нулю.*

М. *Матрица $G(z)$ – целая и имеет конечный порядок ρ_1.*

Теорема 3.1. *Если выполнены условия* А, Б, В *и* М, *то неоднородное уравнение* (1) *имеет целое решение конечного порядка.*

2. Доказательству этой теоремы предпошлем одну лемму.

Лемма 3.1. *Для любого положительного числа τ, $\tau>1$, существует целая функция $H(z,\tau)$, имеющая такие свойства:*

1) *порядок этой функции равен 2τ;*

2) *существует такое число M_1, что в достаточно малых углах U_1 и U_2 около положительной и отрицательной полуосей*

$$U_1\quad |\arg z|\leqslant\delta,$$

$$U_2:\pi-|\arg z|\leqslant\delta,\ \ \delta>0,$$

выполнены, соответственно, неравенства:

$$|H(z,\tau)-1|<M_1\exp(-|z|^{2\tau}),\qquad z\in U_1$$

$$|H(z,\tau)+1|<M_1\exp(-|z|^{2\tau}),\qquad z\in U_2. \tag{5.1}$$

*) Продолжение. Начало в „Литовском математическом сборнике" X, № 3 за 1970 год. Там же список литературы и резюме на литовском и немецком языках, а также и реферат.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$H_1(z,\tau)=\int_0^z G(z,\tau)\,dz, \tag{5.2}$$

где $G(z, \tau)$ – функция, определенная в лемме (2.3). Эта функция целая и имеет тот же порядок, что и функция $G(z, \tau)$, т. е. порядок 2τ.

Далее, интеграл по положительной оси $\int_0^\infty G(x, \tau)\,dx$ сходится. Так как $G(x, \tau)>0$, то значение этого интеграла не равно нулю. Пусть

$$\int_0^\infty G(x,\tau)\,dx=C>0.$$

Такое же значение имеет (как это следует из свойства 3 функции $G(z, \tau)$) и интеграл

$$\int_0^\infty G(z,\tau)\,dz=C, \tag{5.3}$$

взятый по лучу (или другому пути), соединяющему точки $z=0$ и $z=\infty$ и лежащему в угле U_1. Далее, из (5.2) и (5.3) следует, что для $z\in U_1$

$$|H_1(z,\tau)-C|=\int_z^\infty G(\zeta,\tau)\,d\zeta,$$

где интегрирование ведется от точки z до ∞ вдоль луча, исходящего из начала координат. Следовательно (см. свойство 3 функции $G(z, \tau)$),

$$|H_1(z,\tau)-C|<\int_{|z|}^\infty M\exp(-|z|^{2\tau})\,dr \tag{5.4}$$

Далее, интегрируя по частям, получим:

$$\int_x^\infty \exp(-x^{2\tau})\,dx=-\int_x^\infty \frac{d\left(\exp(-x)^{2\tau}\right)}{2\tau x^{2\tau-1}}<\frac{\exp(-x)^{2\tau}}{2\tau x^{2\tau-1}}.$$

Из этого неравенства и (5.4) получим, что в угле U_2 выполняется неравенство

$$|H_1(z,\tau)-C|<M_2\exp(-|z|^{2\tau}),$$

где M_2 – некоторая постоянная.

По лемме 2.3 функция $G(z, \tau)$ – четная. Поэтому функция $H_1(z, \tau)$ является нечетной, и в угле U_2 выполняется неравенство

$$|H_1(z,\tau)+C|<M_2\exp(-|z|^{2\tau}).$$

Функция

$$H(z,\tau)=\frac{1}{C}H_1(z,\tau) \tag{5.5}$$

имеет все требуемые в лемме свойства.

3. Доказательство теоремы 3.1. Представим решение неоднородного уравнения (1) в виде:

$$F(z) = \frac{1}{2}\ \{L_1(D)[G(z) - \Phi(z)] + L_2(D)[G(z) + \Phi(z)]\} \tag{1.14}$$

Для сходимости такого ряда следует выбрать матрицу $\Phi(z)$ так, чтобы выражения, стоящие в квадратных скобках, довольно быстро убывали.

С этой целью положим

$$\Phi(z) = G(z) \cdot H(z, \tau), \tag{5.6}$$

где $H(z, \tau)$ — функция, определенная в лемме 3.1, и $2\tau > \max(\rho_0+1, \rho_1)$, $\rho_0 = \max(\rho, 1)$.

Тогда целая матрица

$$G(z) - \Phi(z) = G(z)\,[I - H(z, \tau)] \tag{5.7}$$

имеет порядок 2τ, и норма этой матрицы удовлетворяет в угле U_1 ($|\arg z| \leqslant \delta$, $\delta > 0$) неравенство

$$\|G(z) - \Phi(z)\| \leqslant C \exp(-|z|^{2\tau}), \tag{5.8}$$

где C — некоторая постоянная.

Аналогично, целая матрица

$$G(z) + \Phi(z) = G(z) \cdot [I + H(z, \tau)] \tag{5.9}$$

имеет порядок 2τ, и в угле U_2 ($\pi - |\arg z| \leqslant \delta$) будет

$$\|G(z) + \Phi(z)\| \leqslant C \exp(-|z|^{2\tau}). \tag{5.10}$$

Пользуясь сказанным, легко показываем (для этого придется только повторить выкладки доказательства теоремы 2.1), что ряды (1.14) абсолютно и равномерно сходятся в любом конечном круге и их сумма $F(z)$ представляет целое решение уравнения (1). Кроме того, порядок этого решения не больше 2τ.

Таким образом мы доказали теорему и дополнительно еще установили, что при условиях А, Б, В и М для любого числа μ,

$$\mu > \max(\rho_0+1, \rho_1),$$

существует целое решение $F(z)$ уравнения (1), порядок которого не больше $2\tau = \mu$.

4. **Замечание 1.** Откажемся от условия В и заменим его условием

Г. *Определитель $|A_1(z)|$ не имеет нулей (за исключением, может быть, конечного числа) в угле $\pi - |\arg z| \leqslant \delta$, а определитель $|A_n(z)|$ — в угле $|\arg z| \leqslant \delta$.*

Пусть, как в § 3.1, $\{\beta_i\}$ — последовательность нулей определителя $|A_1(z)|$, $\{\gamma_i\}$ — последовательность нулей определителя $|A_n(z)|$, а S_1 и S_2 — последовательность, определенные в (3.1). Тогда теорему 3.1 можно дополнить таким предложением.

Пусть выполнены условия А, Б, Г, М *и матрица $G(z)$ имеет нули во всех точках последовательностей S_1 и S_2. Для любого числа μ, большего $\nu = \max(\rho_0+1, \rho_1)$, существует целое решение $F(z)$ уравнения (1), порядок которого не больше μ.*

В справедливости этого предложения легко убедиться, если заметить, что (см. (5.7) и (5.9)) матрицы $G(z,\tau)-\Phi(z)$ и $G(z,\tau)+\Phi(z)$ также равны нулю в точках последовательностей S_1 и S_2, и затем при изучении ряда (1.14) проделать такие же выкладки, как при доказательстве теоремы 2.2.

Замечание 2. Откажемся теперь от каких-либо ограничений на расположение нулей определителей $|A_1(z)|$ и $|A_n(z)|$, но предположим, что выполнено условие

Д. *Ни один из определителей* $|A_1(z)|$ *и* $|A_n(z)|$ *не равен тождественно нулю.*

Кроме того, сохраним обозначения U_a, V_b, S_1^+, S_2^+, S_1^-, S_2^-, введенные в ходе доказательства теоремы 2.3, и обозначим через $\varkappa$ — наибольший из показателей сходимости последовательностей S_1^- и S_2^-.

Тогда теорему 3.1 можно дополнить таким предположением.

Пусть выполнены условия А, Б, Д, М *и, кроме того, матрица* $G(z)$ *равна нулю во всех точках последовательностей* S_1^+, S_2^+ *Тогда для любого числа* μ,

$$\mu>\max(\rho_0+1,\ \rho_1,\ \varkappa),$$

уравнение (1) *имеет мероморфное решение, все полюсы которого содержатся в последовательностях* S_1^- и S_2^- *и порядок которого не больше* μ.

5. Откажемся теперь от условия, что порядок свободного члена $G(z)$ конечен.

Теорема 3.2. *Если выполнены условия* А, Б, В *и матрица* $G(z)$ — *целая, то уравнение* (1) *имеет целое решение.*

Эту теорему доказываем точно таким же образом, как и теорему 3.1. Но при этом используем такую лемму.

Лемма 3.2. *Пусть* $G(z)$ — *целая матрица,* $2t>0$ — *четное число, а* U_1 *и* U_2 — *достаточно малые углы около положительной и отрицательной полуосей. Существует целая матрица* $\Phi(z)$, *такая что*

$$\|G(z)-\Phi(z)\|<C\exp(-|z|^{2t}),\qquad z\in U_1,$$

$$\|G(z)+\Phi(z)\|<C\exp(-|z|^{2t}),\qquad z\in U_2,$$

где C — *некоторая постоянная.*

Доказательство. Пусть $g(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots$ — некоторый элемент матрицы $G(z)$ и

$$\omega(z)=\frac{1}{C}\int_0^z\exp(-\zeta^{2t})\,d\zeta, \tag{5.11}$$

где $C=\int_0^\infty\exp(-x^{2t})\,dx$.

По условию леммы, $g(x)$ — целая функция, так что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=0. \tag{5.12}$$

Кроме того, при $|z|\leqslant r$, как это следует из (5.11)

$$|\omega(z)|\leqslant \frac{1}{C} r \exp r^{2t},$$

и для любого целого n, $n\geqslant 0$,

$$\omega_n(z)=\omega\left(\sqrt[2t]{n+1}\cdot z\right)\leqslant \frac{1}{C} r\sqrt[2t]{n+1}\cdot\exp(n+1)r^{2t} \tag{5.13}$$

Из (5.12) и (5.13) легко следует, что ряд

$$\varphi(z)=\sum_0^\infty a_n z^n \omega_n(z) \tag{5.14}$$

имеет в круге $|z|\leqslant r$ мажоранту

$$\frac{1}{C} r \sum_0^\infty b_n R^n, \tag{5.15}$$

где $b_n=a_n\cdot\sqrt[2t]{n+1}$, $\quad R=\exp(r^{2t})$

Из (5.12) следует, что и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|b_n|}=0$.

Значит, мажоранта (5.15) сходится, а вместе с ней сходится равномерно в любом конечном круге ряд (5.14). Следовательно, функция $\varphi(z)$ – целая.

Рассмотрим теперь функции

$$g(z)-\varphi(z)=\sum a_n z^n\left(1-\omega_n(z)\right),$$

$$g(z)+\varphi(z)=\sum a_n z^n\left(1+\omega_n(z)\right) \tag{5.16}$$

Заметим, что для любого целого $n\geqslant 0$ и $r>0$

$$r^n\leqslant \exp(n r^{2t}). \tag{5.17}$$

В самом деле, это неравенство очевидно при $0\leqslant r\leqslant 1$, так как левая часть не больше единицы, а правая не меньше единицы. Если $r>1$, то дифференцированием легко проверяем, что функция

$$r^n \exp(-n r^{2t})$$

убывает и, следовательно,

$$r^n\exp(-nr^{2t})\leqslant \exp(-n)\leqslant 1,$$

что эквивалентно неравенству (5.17).

По лемме 3.1, в углах U_1 и U_2 выполняются, соответственно, неравенства

$$|1-\omega(z)|\leqslant C\exp(-r^{2t})$$

$$|1+\omega(z)|\leqslant C\exp(-r^{2t}),\quad |z|=r,$$

где C – некоторая постоянная. Таким образом, в этих углах выполняются, соответственно, и неравенства

$$|1-\omega_n(z)|=\left|1-\omega\left(z\cdot\sqrt[2t]{n+1}\right)\right|\leqslant C\exp\left(-(n+1)z^{2t}\right) \tag{5.18}$$

$$|1+\omega_n(z)|=|1+\omega(z\cdot\sqrt[2t]{n+1})|\leqslant C\exp\left(-(n+1)z^{2t}\right)$$

Учитывая (5.16), (5.17) и (5.18), мы получим, что в углах U_1 и U_2 соответственно выполняются неравенства

$$|g(z)-\varphi(z)|\leqslant C\Sigma|a_n|r^n\exp[-(n+1)r^{2t}]\leqslant Ce^{-r^{2t}}\Sigma|a_n|$$

$$|g(z)+\varphi(z)|\leqslant Ce^{-r^{2t}}\Sigma|a_n|$$

Заметим, что ряд $\Sigma|a_n|$ сходится, так как a_n — коэффициенты целой функции, и образуем матрицу $\Phi(z)$ из элементов $\varphi(z)$, имеющих вид (5.14), и соответствующих элементам $g(z)$ матрицы $G(z)$. Эта матрица $\Phi(z)$ имеет все требуемые в лемме свойства.

6. По поводу теоремы 3.2 можно сделать замечания, аналогичные сделанным по поводу теоремы 3.1. Сохраним при этом обозначения, использованные в замечаниях 1 и 2.

Замечание 3. Если выполнены условия А, Б, Г и целая матрица $G(z)$ имеет нули в последовательностях S_1 и S_2, то существует целое решение уравнения (1).

Замечание 4. Если выполнены условия А, Б, Д и целая матрица $G(z)$ имеет нули в последовательностях S_1^+ и S_2^+, то уравнение (1) имеет мероморфное решение, все полюсы которого лежат в последовательностях S_1^- и S_2^-

Эти замечания доказываются таким же образом, как замечания 1 и 2, но надо использовать такую лемму.

Лемма 3.3. *Пусть $G(z)$ — целая матрица, имеющая нули во всех точках некоторой последовательности P с конечным показателем сходимости α (мы не предполагаем, что последовательностью P исчерпываются все нули матрицы $G(z)$). Для любого четного числа $2t$, $2t>\alpha$, существует целая матрица $\Phi(z)$, также имеющая нули в точках последовательности P и удовлетворяющая в углах U_1 и U_2 (U_1 и U_2 те же, что в лемме 3.2) соответственно неравенствам*

$$\|G(z)-\Phi(z)\|<C\exp(-|z|^{2t}),$$

$$\|G(z)+\Phi(z)\|<C\exp(-|z|^{2t}),$$

где C — постоянное число.

Доказательство. Пусть $K(z)$ — каноническое произведение с нулями в точках последовательности P. Порядок этой функции равен показателю сходимости последовательности P, т. е. равен α. Матрица $\frac{G(z)}{K(z)}$ является целой. По лемме 3.2, существует целая матрица $\Phi^*(z)$, такая что в углах U_1 и U_2 выполнены соответственно соотношения

$$\left\|\frac{G(z)}{K(z)}-\Phi^*(z)\right\|<C\exp(-|z|^{2t}),$$

$$\left\|\frac{G(z)}{K(z)}+\Phi^*(z)\right\|<C\exp(-|z|^{2t}).$$

Если $2t$ возьмем больше α, то матрица $\Phi(z)=K(z)\cdot\Phi^*(z)$ будет иметь все свойства, требуемые в лемме 3.3.

§ 6. Решение неоднородного уравнения с целой правой частью

1. Рассмотрим неоднородное уравнение

$$\mathbf{L}\,[F(z)] = G(z) \tag{1}$$

и предположим, что, по-прежнему, выполнены условия А, Б, Г.

Пусть, как в предыдущих параграфах, $\{\beta_i\}/\{\gamma_i\}/$ — последовательность нулей определителя $|A_1(z)|/|A_n(z)|/$, а S_1 и S_2 — последовательности, определенные в § 3.1.

Введем еще одно условие

Е. Последовательности S_1 и S_2 не пересекаются.

Теорема 3.3. *Если выполнены условия* А, Б, Г, Е *и* $G(z)$ — *целая матрица, то уравнение* (1) *имеет целое решение.*

2. Доказательство этой теоремы опирается на две леммы.

Лемма 3.4. *Пусть $G(z)$ — целая матрица, а P_1 и P_2 — две непересекающиеся последовательности точек комплексной плоскости, стремящиеся к бесконечности и имеющие конечные показатели сходимости π_1 и π_2. Пусть, далее, точки последовательности $P_1/P_2/$ не лежат (за исключением, может быть, конечного числа) в угле $\pi - |\arg z| \leqslant \delta$ / $|\arg z| \leqslant \delta/$.*

Для любого положительного числа τ,

$$\tau > \max(\pi_1, \pi_2), \tag{6.1}$$

существуют числа $\delta_1 > 0$, $C > 0$ и целые матрицы $G_1(z)$ и $G_2(z)$, имеющие такие свойства:

1)

$$\begin{aligned} &G_1(z) = G(z) \quad \text{при} \quad z \in P_2, \\ &G_1(z) = 0 \quad \text{при} \quad z \in P_1, \\ &G_2(z) = G(z) \quad \text{при} \quad z \in P_1, \\ &G_2(z) = 0 \quad \text{при} \quad z \in P_2 \end{aligned} \tag{6.2}$$

и 2)

$$\begin{aligned} &\|G_1(z)\| < Ce^{-|z|^\tau} \quad \text{при} \quad |\arg z| < \delta_1, \\ &\|G_2(z)\| < Ce^{-|z|^\tau} \quad \text{при} \quad \pi - |\arg z| < \delta_1. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Заметим, что равенство $G_1(z) = G(z)$, при $z \in P_2$, как и другие равенства из свойства 1 следует понимать в том смысле, что $G_1(z)$ интерполирует значения матрицы $G(z)$ в точках последовательности P_2. Таким образом, если α является k раз кратной точкой последовательности P_2, то $G_1(\alpha) = G(\alpha)$, $G_1'(\alpha) = G'(\alpha)$, $\quad G_1^{(k-1)}(\alpha) = G^{k-1}(\alpha)$.

Доказательство этой леммы в случае, когда $G(z)$ — целая функция (одноэлементная матрица), приведено в работе ([4], стр. 31). Из сказанного очевидным образом вытекает справедливость леммы 3.4.

Лемма 3.5. *Если выполнены условия* А, Б, Г, Е *и* $G(z)$ — *целая матрица (другими словами, если выполнены условия теоремы* 3.3), *то существует целая матрица $H(z)$, такая, что матрицы*

$$G(z) - L[H(z)] \tag{6.4}$$

имеет нули во всех точках последовательностей S_1 и S_2.

Доказательство. По лемме 3.4, для достаточно большого числа τ существуют числа $C>0$, $\delta>0$ и две целые матрицы $G_1(z)$ и $G_2(z)$ такие, что

$$\begin{aligned} &G_1(z)=G(z) && \text{при } z\in S_2,\\ &G_1(z)=0 && \text{при } z\in S_1,\\ &G_2(z)=G(z) && \text{при } z\in S_1,\\ &G_2(z)=0 && \text{при } z\in S_2 \end{aligned} \tag{6.5}$$

и

$$\begin{aligned} &\|G_1(z)\|\leqslant Ce^{-|z|^\tau} && \text{при} && |\arg z|\leqslant\delta,\\ &\|G_2(z)\|\leqslant Ce^{-|z|^\tau} && \text{при} && \pi\text{-}|\arg z|\leqslant\delta. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Предположим, что $\tau>\nu$, где

$$\nu=\max(\rho+1,\ 2,\ \varkappa_1,\ \varkappa_2), \tag{6.7}$$

а $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — показатели сходимости последовательностей S_1 и S_2.

Рассуждая, как при доказательстве теоремы 2.2, нетрудно убедиться, что ряды

$$H_1(z)=L_1(D)\,G_1(z),$$
$$H_2(z)=L_2(D)\,G_2(z)$$

представляют соответственно целые решения уравнений

$$L[F(z)]=G_1(z),$$
$$L[F(z)]=G_2(z).$$

Следовательно,

$$L[H_1(z)+H_2(z)]\equiv G_1(z)+G_2(z)$$

и, в частности,

$$L[H_1(z)+H_2(z)]=G_1(z)+G_2(z),$$

если z — любая точка последовательностей S_1 и S_2. Из (6.5) следует, что

$$L[H(z)]\equiv G(z),\ \text{где } H(z)=H_1(z)+H_2(z), \tag{6.8}$$

во всех точках последовательностей S_1 и S_2.

Матрица $H(z)$ имеет все свойства, требуемые в лемме.

3. Обратимся теперь к доказательству теоремы 3.3.

В уравнении (1) сделаем замену

$$F(z)=\Phi(z)+H(z), \tag{6.9}$$

где $\Phi(z)$ — новая неизвестная, и $H(z)$ — только что построенная целая матрица. Уравнение (1) этой заменой сведем к уравнению

$$\mathbf{L}[\Phi(z)]=G(z)-\mathbf{L}[H(z)], \tag{6.10}$$

правая часть которого (см. лемму 3.5) равна нулю во всех точках последовательностей S_1 и S_2.

Таким оразом, уравнение (6.10) приводит нас к случаю, описанному в замечании 3 § 5. Следовательно, уравнение (6.10) имеет целое решение $\Phi(z)$, а уравнение (1) — целое решение

$$F(z)=\Phi(z)+H(z).$$

4. Заменим теперь в теореме 3.3 условие Г условием

Д. *Ни один из детерминантов* $|A_1(z)|$ *и* $|A_n(z)|$ *не равен тождественно нулю.*

Условимся полосу π_c

$$c+\alpha_1 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant c+\alpha_n, \tag{6.11}$$

где c — произвольное действительное число, называть фундаментальной полосой уравнения (1). Кроме того, последовательности S_1^+, S_2^+, S_1^- и S_2^-, введенные в (4.17), условимся обозначать в случае, когда углы U_a и V_b (см. теорему 2.3) совпадают соответственно с полуплоскостями

$$\operatorname{Re} z < c, \text{ и } \operatorname{Re} z \geqslant c, \tag{6.12}$$

через S_{1c}^+, S_{2c}^+, S_{1c}^-, S_{2c}^-. Нетрудно проверить, что точки последовательностей S_{1c}^- и S_{2c}^- не попадают в фундаментальную полосу π_c.

Имеет место теорема.

Теорема 3.4. *Пусть c — произвольно зафиксированное действительное число. Если выполнены условия* А, Б, Д *и* $G(z)$ — *целая матрица, то уравнение* (1) *имеет мероморфное решение, все полюсы которого лежат вне фундаментальной полосы* π_c.

Эта теорема доказывается таким же способом, как и теорема 3.3, но при этом используется замечание 4 § 5 и следующая лемма.

Лемма 3.6. *Пусть* $G(z)$ — *целая матрица,* c — *действительное число, и* S_{1c}^+, S_{2c}^+, S_{1c}^-, S_{2c}^- — *вышеопределенные последовательности.*

Если выполнены условия А, Б *и* Д, *то существует мероморфная матрица* $H(z)$, *имеющая такие свойства*:

1) *Матрица* $G(z)-\mathbf{L}[H(z)]$ — *целая и равна нулю во всех точках последовательностей* S_{1c}^+ *и* S_{2c}^+.

2) *Все полюсы матрицы* $H(z)$ *содержатся в последовательностях* S_{1c}^- *и* S_{2c}^-.

Доказательство. Прежде всего заметим, что последовательности S_{1c}^+ и S_{2c}^+ не пересекаются и имеют конечные показатели сходимости $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$. Поэтому, по лемме 3.4 для любого τ, $\tau > \max(\varkappa_1, \varkappa_2)$ существуют две целые матрицы $G_1(z)$ и $G_2(z)$, имеющие такие свойства:

1)

$$G_1(z) = G(z) \quad \text{при} \quad z \in S_{2c}^+,$$

$$G_1(z) = 0 \quad \text{при} \quad z \in S_{1c}^+,$$

$$G_2(z) = G(z) \quad \text{при} \quad z \in S_{1c}^+,$$

$$G_2(z) = 0 \quad \text{при} \quad z \in S_{2c}^+$$

и 2)

$$\| G_1(z) \| < C \exp(-|z|^\tau) \quad \text{при} \quad |\arg z| \leqslant \delta,$$

$$\| G_2(z) \| \leqslant C \exp(-|z|^\tau) \quad \text{при} \quad \pi - |\arg z| \leqslant \delta.$$

Если число τ возьмем достаточно большим, то, повторяя выкладки теоремы 2.3, легко убедимся, что матрицы

$$H_1(z) = L_1(D)\, G_1(z) \text{ и } H_2(z) = L_2(D)\, G_2(z)$$

являются соответственно мероморфными решениями уравнений

$$\mathrm{L}\,[F(z)] = G_1(z) \text{ и } \mathrm{L}\,[F(z)] = G_2(z)$$

и полюсы матриц $H_1(z)$ и $H_2(z)$ содержатся соответственно в последовательностях S_{1c}^- и S_{2c}^-.

Легко проверить, что матрица

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z)$$

обладает всеми требуемыми в лемме свойствами.

5. В последних двух теоремах мы не делали никаких предположений относительно порядка правой части $G(z)$ уравнения (1) и, естественно, не получили утверждений о порядке решений этого уравнения.

Для изучения порядка решений уравнения (1) нам понадобятся понятия **достаточной удаленности одной последовательности от другой и последовательности от прямой.**

Зафиксируем произвольно два положительных числа k и h и обозначим через K_ζ круг

$$K_\zeta \quad |z-\zeta| < k\cdot|\zeta|^{-h}, \tag{6.13}$$

где $\zeta\neq 0$ — произвольная точка комплексной плоскости, и

$$K_0 : |z| < k.$$

Последовательности P и Q назовем достаточно удаленными друг от друга, если можно так зафиксировать числа k и h, чтобы для любых $\xi\in P$ и $\eta\in Q$ круги K_ξ и K_η не пересекались.

Аналогично прямую L назовем достаточно удаленной от последовательности P, если эта прямая не пересекает ни одного круга K_ξ с любым $\xi\in P$.

Заметим, что если последовательность P имеет конечный показатель сходимости $\varkappa$, то имеется бесконечное множество значений c, для которых прямая $\mathrm{Re}\, z = c$ достаточно удалена от последовательности P. В самом деле, при $h > \varkappa$ сумма диаметров всех кругов K_ξ, $\xi\in P$ конечна, и тогда проекции π всех этих кругов на действительную прямую не заполняют всю эту прямую. Поэтому прямая $\mathrm{Re}\, z = c$, где $c \notin \pi$, не пересекает кругов K_ξ.

6. При изучении роста решений уравнения (1), помимо ранее введенных условий А, Б, Г и Д, нам еще потребуется следующее условие

Ж. *Последовательности S_1 и S_2 достаточно удалены друг от друга.*

Теоремы 3.3 и 3.4 могут быть дополнены следующим образом.

Теорема 3.5. *Пусть выполнены условия* А, Б, Г, Ж, $G(z)$ — *целая матрица конечного порядка* ρ_1 *и*

$$\alpha = \max(\rho+1;\ 2;\ \rho_1;\ \varkappa_1;\ \varkappa_2), \tag{6.14}$$

где $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — показатели сходимости последовательностей S_1 и S_2. Для любого числа μ, $\mu > \alpha$, уравнение (1) *имеет целое решение, порядок которого не больше μ.*

Теорема 3.6. *Пусть выполнены условия* А, Б, Д, $G(z)$ — *целая матрица конечного порядка* ρ_1 *и* $\mathrm{Re}\, z = c$ — *прямая, достаточно удаленная как от последовательности нулей определителя* $|A_1(z)|$, *так и от последовательности нулей определителя* $|A_n(z)|$.

Пусть, далее,

$$\beta=\max(\rho+1,\ 2,\ \rho_1,\ \varkappa),\tag{6.15}$$

где $\varkappa$ — наибольший из показателей сходимости последовательностей S_{1c}^+, S_{2c}^+, S_{1c}^- и S_{2c}^-.

Для любого числа μ, $\mu>\beta$ уравнение (1) имеет мероморфное решение $F(z)$, все полюсы которого лежат вне фундаментальной полосы π_c, и порядок которого не больше μ.

Доказательства теорем 3.3 и 3.4 опирались на леммы 3.4, 3.5 и 3.6. Теоремы 3.5 и 3.6 доказываются вполне аналогично, но приходится дополнить содержание упомянутых лемм для случая, когда целая матрица $G(z)$ имеет конечный порядок ρ_1.

Отметим эти дополнения.

Если в лемме 3.4 предположим, что, помимо указанных там условий, последовательности P_1 и P_2 достаточно удалены друг от друга и целая матрица $G(z)$ имеет конечный порядок ρ_1, то для любого числа τ,

$$\tau>\max(\pi_1,\ \pi_2,\ \rho_1,\ 2),$$

(π_1 и π_2 такие, как в лемме 3.4) существуют целые матрицы $G_1(z)$ и $G_2(z)$, которые имеют все указанные в лемме 3.4 свойства и, кроме того, их порядок не больше τ.

Это предположение в случае, когда $G(z)$ — целая функция доказано в работе [3] и оно очевидным способом переносится и на случай, когда $G(z)$ — целая матрица.

Опираясь на это добавление к лемме 3.4, легко получаем такие же добавления и к леммам 3.5 и 3.6.

Предположим, что выполнены все условия леммы 3.5, и, кроме того, дано, что последовательности S_1 и S_2 достаточно удалены друг от друга, а $G(z)$ — целая матрица конечного порядка ρ_1. Обозначим еще $\alpha=\max(\varkappa_1,\ \varkappa_2,\ \rho+1,\ \rho_1,\ 2)$, где $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — показатели сходимости последовательностей S_1 и S_2. Тогда для любого числа μ, $\mu>\alpha$, существует целая матрица $H(z)$, такая что ее порядок не больше μ и она имеет все свойства, указанные в лемме 3.5.

Обратимся к лемме 3.6.

Предположим, что выполнены все условия леммы 3.6 и еще дано, что целая матрица $G(z)$ имеет конечный порядок ρ_1. Зафиксируем действительное число c так, чтобы прямая $\operatorname{Re} z=c$ была достаточно удалена от нулей обоих определителей $|A_1(z)|$ и $|A_n(z)|$, и обозначим

$$\beta=\max(\rho+1,\ \rho_1,\ 2,\ \varkappa),$$

где $\varkappa$ — наибольший из показателей сходимости последовательностей S_{1c}^+, S_{2c}^+, S_{1c}^-, S_{2c}^-.

Тогда для любого числа μ, $\mu>\beta$, существует мероморфная матрица $H(z)$, такая что ее порядок не больше μ и она имеет все свойства, указанные в лемме 3.

§ 7. Неоднородное уравнение с мероморфной правой частью

1. Рассмотрим неоднородное уравнение

$$\mathrm{L}\,[F(z)] = G(z), \tag{1}$$

где $G(z)$ — мероморфная одностолбцевая матрица. По-прежнему предполагаем, что выполнены условия А, Б, Д. Так же, как и в предыдущем параграфе, полосу π_c:

$$c+\alpha_1 \leqslant \operatorname{Re} z < c+\alpha_n,$$

где c — произвольно зафиксированное действительное число, называем фундаментальной полосой (для уравнения (1)).

Теорема 3.7. *Пусть выполнены условия* А, Б, Д *и* $G(z)$ *— мероморфная матрица. Для любого действительного числа* c *существует мероморфное решение* $F(z)$ *уравнения* (1), *все полюсы которого лежат вне фундаментальной полосы* π_c.

2. Доказательство этой теоремы опирается на следующие две леммы.

Лемма 3.7. *Пусть* c *— действительное число,* $G(z)$ *— мероморфная матрица, а* P_1 *и* P_2 *— две непересекающиеся последовательности, имеющие бесконечный предел и конечные показатели сходимости* π_1 *и* π_2.

Пусть далее, последовательность P_1 *содержится в полуплоскости* $\operatorname{Re} z \geqslant c$, *а* P_2 *— в полуплоскости* $\operatorname{Re} z < c$.

Для любого положительного числа τ, *удовлетворяющего неравенству* $\tau > \max(\pi_1, \pi_2)$, *существуют числа* $c>0$ *и* $\delta>0$ *и мероморфные матрицы* $M_1(z)$ *и* $M_2(z)$, *имеющие такие свойства:*

1) *Матрица* $M_1(z)$ | $M_2(z)$ | *регулярна в полуплоскости* $\operatorname{Re} z<c$ | $\operatorname{Re} z \geqslant c$ |,

2) *Матрица* $M_1(z)$ | $M_2(z)$ | *имеет в полуплоскости* $\operatorname{Re} z<c$ | $\operatorname{Re} z\geqslant c$ | *такие же полюсы и главные части, что и матрица* $G(z)$.

3) $M_1(z)=0$ *при* $z \in P_1$

и

$M_2(z)=0$ *при* $z \in P_2$,

4) $\|M_1(z)\| < C \exp(-|z|^\tau)$ при $|\arg z| < \delta_1$,

$\|M_2(z)\| < C \exp(-|z|^\tau)$ при $\pi - |\arg z| < \delta_1$.

Эта лемма доказана для случая, когда $G(z)$ — мероморфная функция, в работе [4], стр. 31; она остается верной и в случае, когда $G(z)$ — мероморфная матрица.

Лемма 3.8. *Пусть* $G(z)$ *— мероморфная матрица,* c *— действительное число, а* S_{1c}^{+} *и* S_{2c}^{+} *— последовательности, определенные в* § 6.4. *Если выполнены условия* А, Б *и* Д, *то существует мероморфная матрица* $H(z)$ *с такими свойствами:*

1) *Матрица* $G(z) - \mathrm{L}\,[H(z)]$ *— целая;*

2) *Матрица* $H(z)$ *не имеет полюсов в фундаментальной полосе* π_c.

Доказательство. Заметим, что последовательности S_{1c}^{+} и S_{2c}^{+} лежат, соответственно, в полуплоскостях $\operatorname{Re} z \geqslant c$ и $\operatorname{Re} z < C$ и имеют конечные показатели сходимости $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$. Поэтому лемму 3.7 можно применить для случая $P_1 \equiv S_{1c}^{+}$ и $P_2 \equiv S_{2c}^{+}$. Зафиксируем еще число τ так, чтобы

$$\tau > \max(\varkappa_1, \varkappa_2, \rho+1, 2), \tag{7.1}$$

и рассмотрим ряды

$$H_1(z) = L_1[M_1(z)] \tag{7.2}$$

и

$$H_2(z) = L_2[M_2(z)], \tag{7.3}$$

где $M_1(z)$ и $M_2(z)$ — матрицы, существование которых утверждается в лемме 3.7 и которые соответствуют случаю

$$P_1 \equiv S_{1C}^{+}, \qquad P_2 \equiv S_{2C}^{+}.$$

Нетрудно проверить, что ряды (7.2) и (7.3) сходятся абсолютно и равномерно в любом конечном круге и их суммы $H_1(z)$ и $H_2(z)$ представляют, соответственно, мероморфные решения уравнений

$$\mathbf{L}[F(z)] = M_1(z)$$

$$\mathbf{L}[F(z)] = M_2(z).$$

Кроме того, все полюсы матрицы $H_1(z)$ лежат на полуплоскости $\operatorname{Re} z < c+\alpha_1$, а все полюсы матрицы $H_2(z)$ — в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant c+\alpha_n$. Таким образом, все полюсы матрицы

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z)$$

лежат вне фундаментальной полосы π_c, и

$$\mathbf{L}[H(z)] - \Big(M_1(z) + M_2(z)\Big) \equiv 0.$$

Так как (см. свойство (2) леммы 3.7) матрица $M_1(z) + M_2(z) - G(z)$ — целая, то и $\mathbf{L}[H(z)] - G(z)$ — целая матрица.

3. Обратимся теперь к доказательству теоремы 3.7. В уравнении (1) сделаем замену

$$F(z) = \Phi(z) + H(z),$$

где $\Phi(z)$ — новая неизвестная, а $H(z)$ — матрица, существование которой утверждается в лемме 3.8. Уравнение (1) примет вид

$$\mathbf{L}[\Phi(z)] = G(z) - \mathbf{L}[H(z)]. \tag{7.4}$$

Но, такое уравнение с целой правой частью мы рассматривали в теореме 3.4. По этой теореме, существует мероморфное решение $\Phi(z)$ последнего уравнения (7.4), и все полюсы матрицы $\Phi(z)$ лежат вне фундаментальной полосы. Поэтому матрица

$$F(z) = \Phi(z) + H(z)$$

является решением уравнения (1) и все полюсы этой матрицы также лежат вне фундаментальной полосы π_c.

4. Рассмотрим еще вопрос о росте мероморфных решений уравнения (1) в случае, когда правая часть его — матрица $G(z)$, имеет конечный порядок ρ_1.

Теорема 3.8. *Пусть выполнены условия* А, Б *и* Д, $G(z)$ — *мероморфная матрица конечного порядка* ρ_1 *и* $\operatorname{Re} z=c$ — *прямая, достаточно удаленная от полюсов матрицы* $G(z)$.

Пусть, далее,

$$\beta=\max(\rho+1,\ 2,\ \rho_1+\varkappa), \tag{7.5}$$

где $\varkappa$ — *наибольший из показателей сходимости последовательностей* S_{1c}^{+}, S_{1c}^{-}, S_{2c}^{+}, S_{2c}^{-}.

Для любого числа μ, $\mu>\beta$, *уравнение* (1) *имеет мероморфное решение* $F(z)$, *все полюсы которого лежат вне фундаментальной полосы* π_c *и порядок которого не больше* μ.

Теорему 3.7 мы доказали, опираясь на леммы 3.7 и 3.8. Теорема 3.8 доказывается вполне аналогично, но приходится дополнить содержание доказанных лемм для случая, когда мероморфная матрица $G(z)$ имеет конечный порядок ρ_1.

Отметим эти дополнения.

Если в лемме 3.7 предположим, что, помимо указанных условий, еще дано, что мероморфная матрица $G(z)$ имеет порядок ρ_1, то для любого числа τ

$$\tau>\max(\pi_1,\ \pi_2,\ \rho_1,\ 2)$$

существуют мероморфные матрицы $M_1(z)$ и $M_2(z)$, которые имеют все свойства в лемме 3.7, и, кроме того, их порядок не больше τ.

Это добавление к лемме 3.7 в случае, когда $G(z)$ — мероморфная функция, доказано в работе [4]. Результат переносим на случай, когда $G(z)$ — мероморфная матрица. Используя его, легко получаем такое же добавление и к лемме 3.8.

Предположим, что выполнены все условия леммы 3.8 и еще дано, что мероморфная матрица $G(z)$ имеет конечный порядок ρ_1. Зафиксируем действительное число c так, чтобы прямая $\operatorname{Re} z=c$ была достаточно удалена как от нулей обоих определителей $|A_1(z)|$ и $|A_n(z)|$, так и от полюсов матрицы $G(z)$, и обозначим

$$\beta=\max(\rho+1,\ 2,\ \rho_1+\varkappa). \tag{7.5}$$

Тогда для любого числа μ, $\mu>\beta$, существует мероморфная матрица $H(z)$, имеющая все свойства, указанные в лемме 3.8, и, кроме того, ее порядок не больше μ.

IV. АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА

§ 8. Обобщение теоремы Миттаг-Леффлера и интерполирование целых и мероморфных решений уравнения (1)

1. Рассмотрим уравнение

$$\mathbf{L}[F(z)]\equiv A_1(z)\,F(z+\alpha_1)+A_n(z)\,F(z+\alpha_n)+ \\ +\sum_{k=2}^{n-1}\sum_{l=0}^{s_k} A_{kl}(z)\,F^{(l)}(z+\alpha_k)=G(z) \tag{1}$$

и предположим, как прежде, что выполнены условия:

А. *Числа* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — *действительные и* $\alpha_1<\alpha_2< \ldots <\alpha_n$.

Б. *Коэффициенты* $A_1(z)$, $A_n(z)$, $A_{kl}(z)/k=2, 3, \quad n-1; l=0, 1, \ldots, s_k/$ *уравнения* (1) — *целые матрицы конечного порядка.*

Д. *Ни один из определителей* $|A_1(z)|$ *и* $|A_n(z)|$ *не равен тождественно нулю.*

Напомним также, что полосу π_c:

$$c+\alpha_1 \leqslant \operatorname{Re} z < c+\alpha_n,$$

где c — произвольно зафиксированное действительное число, мы назвали фундаментальной полосой.

Условимся еще главной частью мероморфной матрицы $M(z)$ в полюсе λ называть матрицу, составленную из главных частей в точке λ отдельных элементов матрицы $M(z)$.

Таким образом, если $M(z)$ — одностолбцевая матрица и λ — ее полюс, то соответствующая главная часть $G(z, \lambda)$ может быть представлена в виде

$$G(z, \lambda)=\sum_{l=1}^{n_k} \frac{a_{kl}}{(z-\lambda)^l} \tag{8.1}$$

где a_{kl} — одностолбцевые матрицы, составленные из некоторых комплексных чисел.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия* А, Б *и* Д, $G(z)$ — *мероморфная матрица и* c — *произвольное фиксированное действительное число. Для любой последовательности рациональных матриц*

$$R(z, \lambda_k)=\sum_{l=1}^{n_k} \frac{a_{kl}}{(z-\lambda_k)^l} \tag{8.2}$$

$$\lambda_k \in \pi_c, \ \lim \lambda_k=\infty,$$

(λ_k — *комплексные числа и* a_{kl} — *одностолбцевые матрицы*) *существует мероморфное решение уравнения* (1), *имеющее в фундаментальной полосе* Π_c *полюсы в точках* λ_k (*и только в них*) *с главными частями* $R(z, \lambda_k)$.

Доказательство. По теореме Миттаг—Леффлера, существует мероморфная матрица $M(z)$, имеющая полюсы в точках λ_k (и только в этих точках) с главными частями $R(z, \lambda_k)$.

Сделаем теперь в уравнении (1) замену

$$F(z)=M(z)+\Phi(z), \tag{8.3}$$

где $\Phi(z)$ — новая неизвестная.

Уравнение (1) сводится к уравнению

$$\mathbf{L}[\Phi(z)]=G_1(z), \tag{8.4}$$

где

$$G_1(z)=G(z)-\mathbf{L}[M(z)] -$$

мероморфная матрица. По теореме (3.5), уравнение (8.4) имеет мероморфное решение $\Phi(z)$, все полюсы которого лежат вне фундаментальной полосы Π_c. Матрица

$$F(z)=M(z)+\Phi(z)$$

является мероморфным решением уравнения (1), и в фундаментальной полосе Π_c эта матрица имеет полюсы только в точках λ_k с главными частями $R(z, \lambda_k)$.

2. Пусть $M(z)$ — мероморфная матрица, и λ — некоторая точка комплексной плоскости. В окрестности точки λ матрицу $M(z)$ можно разложить в ряд Лорана

$$M(z)=\sum_{k=s}^{\infty} A_k\cdot(z-\lambda)^k, \tag{8.5}$$

где A_k — постоянная матрица того же размера, что и матрица $M(z)$. Условимся произвольную конечную сумму

$$\sum_{k=s}^{n} A_k\cdot(z-\lambda)^k$$

этого ряда называть начальной частью матрицы $M(z)$ в точке λ. Очевидно, что в случае $s<0$ и $n=-1$ эта начальная часть совпадает с главной частью матрицы $M(z)$ в точке λ.

Следующая теорема является дополнением к теореме 4.1.

Теорема 4.2. *Пусть π_c — произвольная фундаментальная полоса уравнения* (1),

$$\Theta(z,\lambda_k)=\sum_{l=s_k}^{t_k} a_{kl}(z-\lambda_k)^l, \tag{8,6}$$

$$\lim\lambda_k=\infty,\ \lambda_k\in\Pi_c,\ s_k<t_k,\ s_k\leqslant 0,\ t_k\geqslant -1,$$

произвольная последовательность рациональных одностолбцевых матриц и P — последовательность

$$P:\{\lambda_k\}, \tag{8.7}$$

в которую каждая точка λ_k входит с кратностью

$$(t_k+1)^+=\max(t_k+1;\ 0)$$

(*если $t_k=-1$, то точка λ не входит в P*) *и которая не содержит каких-либо других точек.*

Если выполнены условия А, Б, Д, *$G(z)$ — мероморфная матрица и последовательность P имеет конечный показатель сходимости, то уравнение* (1) *имеет мероморфное решение $F(z)$ с такими двумя свойствами*:

1) *в каждой из точек λ_k, $k=1,2,\dots$, $F(z)$ имеет начальную часть $\Theta(z,\lambda_k)$*;

2) *все полюсы этого решения, лежащие в полосе Π_c, содержатся среди точек λ_k.*

Доказательство. Пусть $K(z)$ — каноническое произведение с нулями в точках последовательности P, и $M(z)$ — мероморфная матрица, имеющая свойства:

1) в каждой из точек λ_k она имеет начальную часть $\Theta(z,\lambda_k)$,

2) все ее полюсы, лежащие в полосе π_c, содержатся среди точек λ_k.

Обозначим

$$\tilde{M}(z)=\frac{M(z)}{K(z)} \tag{8.8}$$

и рассмотрим уравнение

$$\mathbf{L}\,[K(z)\cdot\Phi(z)] = G_1(z), \tag{8.9}$$

где $\Phi(z)$ — новая неизвестная, а

$$G_1(z) = G(z) - L\,[K(z)\,\tilde{M}(z)].$$

Очевидно, что $G_1(z)$ — мероморфная матрица, а уравнение (8.9) удовлетворяет условиям А и Д. Так, как, по условию теоремы, последовательность P имеет конечный показатель сходимости, то функция $K(z)$ имеет конечный порядок, и для уравнения (8.9) выполнено условие Б.

По теореме 3.5, уравнение (8.9) имеет мероморфное решение $\Phi_0(z)$, все полюсы которого лежат вне полосы Π_c.

Таким образом,

$$L\,[K(z)\,\Phi_0(z) + K(z)\,\tilde{M}(z)] = G(z)$$

или, другими словами, матрица

$$F(z) = K(z)\,\Phi_0(z) + \mathrm{K}(z)\,\tilde{M}(z) = K(z)\,\Phi_0(z) + M(z)$$

(см. (8.8)) является мероморфным решением уравнение (1).

Покажем, что матрица $F(z)$ имеет указанные в теореме свойства 1) и 2).

Если наибольшая степень t_k начальной части $\Theta(z, \lambda_k)$ равна -1, то $\Theta(z, \lambda_k)$ является главной частью матрицы $M(z)$. Так как в фундаментальной полосе Π_c, а поэтому и в точке λ_k матрица $\Phi_0(z)$ регулярна, то $\Theta(z, \lambda_k)$ будет и главной частью решения

$$F(z) = K(z)\cdot\Phi_0(z) + M(z). \tag{8.10}$$

Если $t_k \geqslant 0$, то $K(z)\cdot\Phi_0(z)$ имеет в точке λ_k нуль, кратность которого не меньше t_k+1 и, следовательно, начальная часть (степень которой не больше t_k) матрицы $F(z)$ в этой точке будет такой же, как и начальная часть матрицы $M(z)$, т. е. $\Theta(z, \lambda_k)$.

3. Рассмотрим теперь вопрос о существовании целых решений уравнения (1), имеющих начальные части

$$P(z, \lambda_k) = \sum_{l=0}^{t_k} a_l\cdot(z-\lambda_k)^l, \tag{8.11}$$

$$\lambda_k \in \pi_c,\ \lim \lambda_k = \infty,\ t_k \geqslant 0.$$

При решении вопроса естественно использовать условия (см. теорему 3.3)

Г. *Нули определителя* $|A_1(z)|/|A_n(z)|/$ *не лежат, за исключением конечного числа в угле* $\pi - |\arg z| < \delta / |\arg z| < \delta\,/$.

Е. *Последовательности* S_1 *и* S_2 *не пересекаются.*

Кроме того, обозначим через P — последовательность, определенную в (8.7), и через P_1, P_2 — последовательности

$$P_1\ \ \{\lambda_k - \alpha_1 - t_1\},\quad P_2 : \{\lambda_k - \alpha_n - t_2\}, \tag{8.12}$$

где t_1 и t_2 пробегают последовательности T_1 и T_2 (см. § 3, 1).

Введем в рассмотрение еще такие условия:

И. *Последовательность P_1 не пересекается с S_2 и P_2 не пересекается с S_1.*

З. *Последовательность P имеет конечный показатель сходимости.*

Теорема 4.3. *Пусть π_c — произвольная фундаментальная полоса уравнения* (1), *$G(z)$ — целая матрица и $P(z, \lambda_k)$ — полиномиальные матрицы* (8.11).

Если выполнены условия А, Б, Г, Е, И *и* З, *то уравнение* (1) *имеет целое решение с начальными частями $P(z, \lambda_k)$, $k=1, 2$,*

Эта теорема доказывается точно так же, как предыдущая. Но за $M(z)$ (входящую в доказательство теоремы 4.2) следует взять целую матрицу с начальными частями $P(z, \lambda_k)$ и воспользоваться теоремой 3.3.

Вильнюсский Государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию 11.XI.1969