X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 4

1970

УДК – 519.21

НЕКОТОРЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ УСТОЙЧИВЫХ ПЛОТНОСТЕЙ

Н. КАЛИНАУСКАЙТЕ

Во всем дальнейшем

$$x=(x_1, \qquad x_s)\in R_s, \qquad t=(t_1, \qquad t_s)\in R_s,$$

$$\rho=\sqrt{\sum_{k=1}^{s} t_k^2}$$

$$x\in R_s,\ y\in R_s, \text{ то } (x,\ y)=\sum_{k=1}^{s} x_k y_k.$$

Многомерным симметрическим распределением*) называем распределение невырожденного случайного вектора $Z=(x_1, \ldots, x_s)$ с действительной характеристической функцией $f/\rho)$, зависящей только от ρ.

Плотность такого распределения равна

$$p_Z(x)=\frac{1}{(2\pi)^s}\int\limits_{R_s}\exp\{-i(t,\ x)\}f/\rho)\,dt.$$

Заменой

$$t_j=\rho\prod_{l=1}^{j-1}\sin\varphi_l\cos\varphi_j \text{ при } 1\leqslant j\leqslant s-1,$$

$$t_s=\rho\prod_{l=1}^{s-1}\sin\varphi_l$$

с якобианом преобразования

$$D=\rho^{s-1}\prod_{l=1}^{s-2}\sin^{s-l-1}\varphi_l=\rho^{s-1}D_1$$

плотность $p_Z(x)$ приводится к виду

$$\frac{1}{(2\pi)^s}\int\limits_0^\infty\int\limits_{D_{s-1}^{(1)}}\exp\{-i\rho(x,\ \omega)\}f(\rho)\,Dd\varphi\,d\rho=$$

$$=\frac{2}{(2\pi)^s}\int\limits_0^\infty\int\cos\Big(\rho(x,\ \omega)\Big)f(\rho)\,Dd\varphi\,d\rho,$$

---

*) Будем предполагать, существует

где

$$D_{s-1}^{(1)}=[0\leqslant\varphi_1\leqslant\pi, \quad 0\leqslant\varphi_{s-2}\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi_{s-1}\leqslant 2\pi],$$

$$D_{s-1}=[0\leqslant\varphi_j\leqslant\pi,\ 1\leqslant j\leqslant s-1],$$

$$\omega=(\omega_1, \ldots, \omega_s),$$

$$\omega_j=\prod_{l=1}^{j-1}\sin\varphi_l\cos\varphi_j \quad \text{при } 1\leqslant j\leqslant s-1,$$

$$\omega_s=\prod_{l=1}^{s-1}\sin\varphi_l,$$

$$d\varphi=d\varphi_1\, d\varphi_2 \ldots d\varphi_{s-1}.$$

Теорема 1. *Пусть случайный вектор* $Z=(x_1, \ldots, x_s)$ *распределен симметрично с характеристической функцией* $f(\rho)$. *Тогда его плотность распределения имеет вид* $(x\neq 0)$

$$p_Z(x)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^s|x|^{\frac{s}{2}-1}}\int_0^\infty \rho^{\frac{s}{2}}J_{\frac{s}{2}-1}(\rho|x|)f(\rho)\,d\rho \tag{1}$$

при условии, что последний интеграл существует. Здесь $J_{\frac{s}{2}-1}(z)$*-функция Бесселя первого рода порядка* $\left(\frac{s}{2}-1\right)$

Доказательство теоремы 1. Прямым подсчетом нетрудно проверить, что при $s\geqslant 2$ $x\neq 0$

$$\int_{D_{s-1}}\cos\left(\rho(x, \omega)\right)D_1\,d\varphi=\frac{(\sqrt{2\pi})^s}{2(|x|\rho)^{\frac{s}{2}-1}}J_{\frac{s}{2}-1}(\rho|x|),$$

где

$$|x|=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_s^2}.$$

Отсюда немедленно следует утверждение теоремы 1 при $s\geqslant 2$.

Формула (1) при $s=1$ тоже имеет место, так как

$$J_{-\frac{1}{2}}(z)=\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}\cos z,$$

откуда

$$p_Z(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\cos(t|x|)f(t)\,dt=\left(\frac{|x|}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty\sqrt{t}\,J_{-\frac{1}{2}}(t|x|)f(t)\,dt.$$

Формулу (1) можно использовать при получении разложений многомерных плотностей распределений в ряды. Мы приводим разложения многомерных устойчивых симметрических плотностей $p_\alpha(x)$ $0<\alpha\leqslant 2$ с характеристической функцией $\exp\{-\rho^\alpha\}$.

Теорема 2. *Пусть* $0<\alpha<1$, *тогда*

$$p_\alpha(x)=\frac{1}{2\pi^{\frac{s}{2}+1}|x|^s}\sum_{k=1}^\infty\frac{(-1)^{k+1}}{k!}\left(\frac{2}{|x|}\right)^{\alpha k}\Gamma\left(\frac{\alpha k+s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha k+2}{2}\right)\sin\frac{\alpha\pi k}{2}.$$

Доказательство. Имеем

$$p_\alpha(x)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^s\,|x|^{\frac{s}{2}-1}}\int_0^\infty \rho^{\frac{s}{2}} J_{\frac{s}{2}-1}(\rho|x|)\exp\{-\rho^\alpha\}\,d\rho=$$

$$=\frac{1}{2(\sqrt{2\pi})^s\,|x|^{\frac{s}{2}-1}}\int_0^\infty \rho^{\frac{s}{2}}\left(H^{(1)}_{\frac{s}{2}-1}(\rho|x|)+H^{(2)}_{\frac{s}{2}-1}(\rho|x|)\right)\exp\{-\rho^\alpha\}\,d\rho,$$

где $H^{(1)}_{\frac{s}{2}-1}(z)$ и $H^{(2)}_{\frac{s}{2}-1}(z)$ – первая и вторая функция Ганкеля. Имеют место равенства

$$\int_0^\infty \rho^{\frac{s}{2}} H^{(1)}_{\frac{s}{2}-1}(\rho|x|)\exp\{-\rho^\alpha\}\,d\rho=$$

$$=-e^{i\frac{\pi}{2}\left(\frac{s}{2}-1\right)}\int_0^\infty z^{\frac{s}{2}} H^{(1)}_{\frac{s}{2}-1}\left(|x|ze^{i\frac{\pi}{2}}\right)\exp\{-(iz)^\alpha\}\,dz \tag{3}$$

и

$$\int_0^\infty \rho^{\frac{s}{2}} H^{(2)}_{\frac{s}{2}-1}(\rho|x|)\exp\{-\rho^\alpha\}\,d\rho=$$

$$=e^{\frac{\pi}{2}\left(\frac{s}{2}-1\right)}\int_0^\infty z^{\frac{s}{2}} H^{(2)}_{\frac{s}{2}-1}\left(|x|ze^{-i\frac{\pi}{2}}\right)\exp\{-(-iz)^\alpha\}\,dz. \tag{4}$$

Для доказательства (3) исследуем интеграл

$$\int_C \rho^{\frac{s}{2}} H^{(1)}_{\frac{s}{2}-1}(\rho|x|)\exp\{-\rho^\alpha\}\,d\rho$$

в комплексной плоскости по контуру C:

при $\varphi=0$ или $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $r_0\leqslant\rho\leqslant r_1$,

при $\rho=r_0$ или $\rho>r_1$, $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$.

Этот интеграл равен нулю. Нетрудно заметить, что интегралы по криволинейным частям контура стремятся к нулю при $r_0\to0$ или $r_1\to\infty$ соответственно. Это доказывает (3). Таким же методом, рассматривая

$$\int_C \rho^{\frac{s}{2}} H^{(2)}_{\frac{s}{2}-1}(\rho|x|)\exp\{-\rho^\alpha\}\,d\rho$$

по контуру C_1:

при $\varphi=0$ или $\varphi=-\frac{\pi}{2}$, $r_0\leqslant\rho\leqslant r_1$,

при $\rho=r_0$ или $\rho=r_1$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant0$,

доказываем (4).

Известно ([3] стр. 14)

$$K_\nu(z) = \frac{\pi i}{2}\, e^{i\frac{\pi}{2}}\, H^{(1)}_\nu\left(ze^{i\frac{\pi}{2}}\right) = -\frac{\pi i}{2}\, e^{-i\frac{\pi}{2}}\, H^{(2)}_\nu\left(ze^{-i\frac{\pi}{2}}\right),$$

где $K_\nu(z)$ – функция Макдональда – Бассе. Следовательно,

$$\int_0^\infty \rho^{\frac{s}{2}} H^{(1)}_{\frac{s}{2}-1}(\rho|x|)\exp\{-\rho^\alpha\}\,d\rho =$$

$$= i\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!}\,\frac{2}{\pi}\, e \int_0^\infty K_{\frac{s}{2}}(\rho|x|)\,\rho^{\alpha k+}\,d\rho =$$

$$= \frac{i2}{\pi}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!}\, e^{-\frac{i\pi\alpha k}{2}}\, \frac{2^{\alpha k+\frac{s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\alpha k+s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha k+2}{2}\right)}{|x|^{\frac{s}{2}+1}}$$

$$\int_0^\infty \rho^{\frac{s}{2}} H^{(2)}_{\frac{s}{2}-1}(\rho|x|)\exp\{-\rho^\alpha\}\,d\rho =$$

$$= -i\,\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!}\, e \int_0^\infty K_{\frac{s}{2}-1}(\rho|x|)\,\rho^{\alpha k+\frac{s}{2}}\,d\rho$$

Так как ([2] стр. 698)

$$\int_0^\infty \rho^{\alpha k+1} K_{\frac{s}{2}-1}(\rho|x|)\,d\rho = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha k+s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha k+2}{2}\right)}{|x|^{\alpha k+\frac{s}{2}+1}}$$

Окончательно,

$$p_\alpha(x) = -\frac{1}{2\pi^{\frac{s}{2}+1}|x|^s}\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{k!}\left(\frac{2}{|x|}\right)^{\alpha k}\Gamma\left(\frac{\alpha k+s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha k+2}{2}\right)\sin\frac{\alpha k\pi}{2}$$

Применяя формулу Стирлинга, по теореме Даламбера нетрудно убедиться в сходимости ряда (2) при $0<\alpha<1$. При $1<\alpha\leqslant 2$ данный ряд расходится.

Если $\exp\{-\rho^\alpha\}$ разлагать по формуле Тейлора до n-го члена включительно, то таким же методом получаем следующее утверждение:

Теорема 3. *Пусть* $0<\alpha<2$. *Тогда при* $|x|\to\infty$ *имеет место асимптотическое разложение*

$$p_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi^{\frac{s}{2}+1}|x|^s}\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k!}\left(\frac{2}{|x|}\right)^{\alpha k}\sin\frac{\alpha\pi k}{2}\,\Gamma\left(\frac{\alpha k+s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha k+2}{2}\right)+$$

$$+O\left(|x|^{(s+\alpha(k+1))}\right).$$

Теорема 4. *Пусть* $1<\alpha\leqslant 2$. *Тогда*

$$p_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha(\sqrt{2\pi})^s}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k|x|^{2k}\,\Gamma\left(\frac{2k+s}{\alpha}\right)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma\left(k+\frac{s}{2}\right)2^{2k}}. \tag{5}$$

Доказательство. Действительно, в силу (1),

$$p_\alpha(x)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^s}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k|x|^{2k}}{k!\,\Gamma\left(k+\frac{s}{2}\right)2^{2k}}\int_0^\infty \rho^{2k+s-1}\exp\{-\rho^\alpha\}\,d\rho.$$

Интегрируя, немедленно получаем (5).

Данный ряд сходится при $1<\alpha\leqslant 2$ для всех $x\in R_s x\neq 0$. Случай $s=1$ полностью разобран в статье Г Бергстрема [1]. В случае $\alpha=1$ в силу (1) немедленно получаем

$$p_1(x)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^s|x|}\int_0^\infty \rho^{\frac{s}{2}} J_{\frac{s}{2}-1}(\rho|x|)\exp\{-\rho\}\,d\rho=$$

$$=\frac{1}{(\sqrt{\pi})^{s+1}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{(1+|x|^2)^{\frac{s+1}{2}}}.$$

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
10.X.1969

Литература

1. H. Bergström, On some expansions of stable distribution functions, Arkiv för mat., v. 2. No. 18 (1952), 375–378.
2. И. С. Градштейн и И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., 1962.
3. Г Бейтмен, А. Эрдейи, СМБ. Высшие Трансцендентные функции (функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены), М., 1966.

KAI KURIE DAUGIAMAČIŲ SIMETRINIŲ STABILIŲ TANKIŲ IŠDĖSTYMAI EILUTE

N. KALINAUSKAITĖ

(*Reziumė*)

Darbe gauti daugiamačių simetrinių stabilių tankių $p_\alpha(x)$ išdėstymai eilute $|x|^2$ laipsniais, kai $1<\alpha\leqslant 2$, ir $\frac{1}{|x|^\alpha}$ laipsniais, kai $0<\alpha<1$. Taip pat gautos tankio $p_\alpha(x)$, $0<\alpha<2$, asimptotinės formulės, kai $|x|\to\infty$.

ON SOME EXPANSIONS OF THE MULTIDIMENSIONAL SYMMETRIC STABLE DENSITIES

N. KALINAUSKAITĖ

(*Summary*)

Let $p_\alpha(x)$, $x\in R_s$ be the density of multidimensional symmetric stable distribution with the characteristic function

$$\exp\{-\rho^\alpha\}$$

where $\rho^2=t_1^2+\quad+t_s^2$.

The following equalities for $x \in R_s$, $x \neq 0$ are proved.

1) If $0 < \alpha < 1$, then

$$p_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi^{\frac{s}{2}+1} |x|^s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \left(\frac{2}{|x|}\right)^{\alpha k} \Gamma\left(\frac{\alpha k+s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha k+2}{2}\right) \sin \frac{\alpha \pi k}{2}$$

2) If $1 < \alpha \leqslant 2$, then

$$p_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha(\sqrt{2\pi})^s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k |x|^{2k} \Gamma\left(\frac{2k+s}{\alpha}\right)}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k+\frac{s}{2}\right) 2^{2k}},$$

where $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_s^2}$.

The asymptotic formulas for the densities $p_\alpha(x)$ when $|x| \to \infty$ are obtained as well.