X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 4
1970

УДК–513.7

О СВЯЗНОСТЯХ НА ГРУППАХ ЛИ

Р. В. ВОСИЛЮС

В дальнейшем через $\mathfrak{G}$ будем обозначать некоторую группу Ли, $\bar{\mathfrak{G}}$ – ее алгебру Ли, D – алгебру дифференцирований этой алгебры Ли.

Пара $(\bar{\mathfrak{G}}, D)$ позволяет строить новую алгебру Ли Г, называемую голоморфом [3] этих алгебр. Это алгебра Ли нормального расширения группы $\mathfrak{G}$ при помощи группы Ли автоморфизмов, соответствующих алгебре D. Исходные алгебры при этом удобно рассматривать как подалгебры голоморфа.

В статье [1] на группах Ли изучался некоторый класс инвариантных аффинных связностей, характеризуемых поведением своих геодезических линий. Связности этого класса определялись линейным отображением

$$\xi : \bar{\mathfrak{G}} \to D, \tag{1}$$

подчиненным определенным условиям (в дальнейшем тексте это условия (6)), вследствие которых их геодезические линии являлись траекториями однопараметрических подгрупп нормальных расширений группы Ли $\mathfrak{G}$ при помощи групп автоморфизмов, соответствующих алгебре дифференцирований D. Этот класс там получил название ξ-связностей.

Однако, дальнейшие исследования показали, что имеет смысл рассматривать связности, определенные лишь условием (1). Такие связности условно можно назвать голоморфными связностями или, коротко, Г-связностями.

Дадим более детальное определение.

1. Г-связности на группах Ли

Каждая группа Ли обладает канонической инвариантной аффинной связностью с нулевым кручением – связностью Картана. Она определяется формой

$$\varphi = \frac{1}{2}\, ad\, \Omega, \tag{2}$$

где Ω – каноническая 1-форма рассматриваемой группы Ли [6].

Следовательно, любую другую инвариантную аффинную связность этой группы можно определить формой

$$\tau = \varphi + \gamma, \tag{3}$$

в которой γ означает билинейное отображение

$$\gamma : \bar{\mathfrak{G}} \times \bar{\mathfrak{G}} \to \bar{\mathfrak{G}}.$$

Рассматривая только связности с нулевым кручением, отображение γ будем считать симметрическим.

Любому линейному отображению вида (1) можно сопоставить инвариантную аффинную связность на группе Ли $\mathfrak{G}$. Для этого достаточно положить

$$\gamma(x, y) = \frac{1}{2}\Big([x, \xi(y)] + [y, \xi(x)]\Big) \tag{4}$$

для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{G}}$.

Здесь, как и везде в дальнейшем, квадратные скобки означают коммутирование векторов в голоморфе Г.

Определение. Инвариантную аффинную связность, определенную на группе Ли $\mathfrak{G}$ при помощи линейного отображения (1) и формулы (4), будем называть Г-связностью этой группы.

Соответственно с определением, каждому линейному преобразованию

$$\xi : \mathfrak{G} \to \bar{\mathfrak{G}} \tag{5}$$

тоже соответствует Г-связность. В этом случае можно считать, что коммутирования формулы (4) происходят в самой алгебре Ли $\bar{\mathfrak{G}}$.

Определение. Г-связность, определенную преобразованием (5) и формулой (4), будем называть внутренней Г-связностью.

Группы Ли, обладающие только внутренними автоморфизмами, обладают только внутренними Г-связностями.

Естественно, что простейшим примером Г-связноти является связность Картана. Это случай, когда в формуле (1) $\xi = 0$, либо случай, когда в формуле (5) $\xi = 1$.

Следующий пример — C-связности А. М. Васильева. Это внутренние Г-связности. Они возникают в связи с редуктивными структурами.

Последний пример — ξ-связности, непосредственно возникающие из Г-связностей и обладающие специальным свойством своих геодезических линий.

Класс Г-связностей достаточно широк. Налагая определенные ограничения на отображение ξ можно выделить их различные подклассы. Примером такого выделения служит ξ-связности. Они выделяются соотношениями

$$\sum_{\substack{p,\,q \\ p+q=\alpha \\ p\neq 0,\; q\neq 0}} \binom{p}{\alpha}\Big([X^{(p}, \xi(X^{q)})] + [x, \xi(X^{\alpha})]\Big) = 0,$$

$$\alpha = 1, 2, 3, \tag{6}$$

где

$$X^p = \Big[\underbrace{\xi(x)\Big[\xi(x)\,[\ldots[\xi(x)}_{p \text{ раз}}, x] \quad]\Big]\Big].$$

2. Римановы Г-связности

Пусть g означает инвариантную риманову метрику на группе Ли $\mathfrak{G}$. Связность, с ковариантным дифференцированием ∇, тогда и только тогда является римановой относительно этой метрики, если для всех векторных полей x, y, z этой группы выполнено следующее соотношение [5]:

$$2g(x, \nabla_z y) = zg(x, y) + g(z, [x, y]) + yg(x, z) + \\ + g(y, [x, z]) - xg(y, z) - g(x, [y, z]).$$

В силу инвариантности, это приводит к условию

$$2g(x, \nabla_z y) = g(z, [x, y]) + g(y, [x, z]) - g(x, [y, z]),$$

которое должно выполняться в алгебре Ли $\bar{\mathfrak{G}}$.

Для Г-связностей

$$\nabla_z y = \frac{1}{2}\left((z, y] + [z, \xi(y)] + [y, \xi(z)]\right).$$

Значит, Г-связность тогда и только тогда является римановой связностью относительно инвариантной метрики g, если трилинейная форма

$$F_g(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{\equiv} g\left(x, [z, \xi(y)]\right) - g(z, [x, y])$$

кососимметрична по двум последним аргументам.

Мы рассмотрим случай, когда эта форма тождественно равна нулю. Независимо от сказанного выше, этот случай можно охарактеризовать сопряженностью операторов ad и $ad \cdot \xi$ относительно рассматриваемой метрики.

Определение. Г-связность, удовлетворяющую условию

$$F_g = 0$$

относительно некоторой инвариантной римановой метрики, будем называть сильно-римановой связностью.

Связность сильно-риманова, если

$$g(x, [z, \xi(y)]) = g(z, [x, y]) \tag{7}$$

относительно некоторой евклидовой метрики g в алгебре Ли $\bar{\mathfrak{G}}$.

Для упрощения дальнейшего текста, примем несколько соглашений. Алгебра Ли D всегда обладает идеалом, порождаемым нулевыми дифференцированиями. Алгеброй дифференцирований назовем фактор-алгебру по этому идеалу. Тогда условия

$$\xi(x) = 0,$$
$$\xi(x)(\bar{\mathfrak{G}}) = 0$$

равносильны.

Далее, рассматривая фиксированную Г-связность, алгебру дифференцирований заменим подпространством $\xi(\bar{\mathfrak{G}})$, которое тоже обозначим через D. Такое обозначение возможно, ибо алгебраической структурой пространства D пользоваться не будем.

Через $\perp$ будем обозначать ортогональность векторов относительно метрики g.

Мы докажем две теоремы о сильно-римановых связностях.

Теорема 1. *Только редуктивные группы Ли могут обладать внутренними сильно-римановыми связностями.*

Доказательство. Итак, допустим что на группе Ли $\mathfrak{G}$ существует сильно-риманова связность, определенная при помощи преобразования (5). Через Z обозначим центр, через $\bar{\mathfrak{G}}'$ – производную алгебру алгебры Ли $\bar{\mathfrak{G}}$.

1. Если $X \in Z$, то

$$g\left(x,\ [z,\ \xi(y)]\right)=0$$

для всех y, $z \in \bar{\mathfrak{G}}$. Поэтому

$$Z \perp D(\bar{\mathfrak{G}}).$$

2. Пусть $y \in Z$. Тогда

$$g\left(\bar{\mathfrak{G}},\ [\bar{\mathfrak{G}},\ \xi(y)]\right)=0.$$

Значит,

$$\xi(Z)=0.$$

3. Разложим пространство $\bar{\mathfrak{G}}$ в прямую сумму, ортогонально относительно метрики g:

$$\bar{\mathfrak{G}}=\bar{\mathfrak{G}}'+\mathfrak{M}.$$

Если $z \in \mathfrak{M}$, то

$$g\left(\bar{\mathfrak{G}},\ [z,\ \xi(\bar{\mathfrak{G}})]\right)=0,$$

откуда следует, что

$$D(\mathfrak{M})=0.$$

Тем самым,

$$D(\bar{\mathfrak{G}})=D\ (\bar{\mathfrak{G}}').$$

4. Пусть

$$\bar{\mathfrak{G}}'=D(\bar{\mathfrak{G}}')+\mathfrak{M}_1$$

является разложением в прямую сумму, ортогонально относительно метрики g. Если

$$z \in \bar{\mathfrak{G}}',\ x \in \mathfrak{M}_1,$$

то

$$g\left(x,\ [z,\ \xi(\bar{\mathfrak{G}})]\right)=0.$$

Поэтому

$$g([\mathfrak{M}_1, \bar{\mathfrak{G}}], \bar{\mathfrak{G}}')=0,$$

$$[\mathfrak{M}_1, \bar{\mathfrak{G}}]=0.$$

Мы показали, что $\mathfrak{M}_1 \subseteq Z$. Значит, возможно следующее разложение ортогонально относительно метрики g:

$$\bar{\mathfrak{G}}=D(\bar{\mathfrak{G}}')+Z_1+Z_2+\bar{\bar{\mathfrak{M}}}.$$

Здесь

$$\bar{\mathfrak{G}}'=D(\bar{\mathfrak{G}}')+Z_1, \quad Z=Z_1+Z_2,$$

$$D(Z+\bar{\bar{\mathfrak{M}}})=0.$$

5. Пусть $x \in \bar{\bar{\mathfrak{M}}}$. Для любого $z \in \bar{\mathfrak{G}}$, вектор

$$[z, \xi(y)]$$

принадлежит подпространству $D(\bar{\mathfrak{G}}')$ и, тем самым, ортогонален x. Поэтому

$$g([\bar{\bar{\mathfrak{M}}}, \bar{\mathfrak{G}}], \bar{\mathfrak{G}})=0.$$

Значит,

$$\bar{\bar{\mathfrak{M}}} \subseteq Z.$$

Таким образом,

$$\bar{\mathfrak{G}}=D(\bar{\mathfrak{G}}')+Z_1+Z_2, \quad \bar{\mathfrak{G}}'=D(\bar{\mathfrak{G}}')+Z_1, \quad Z=Z_1+Z_2, \quad D(Z)=0.$$

6. Пусть

$$x=x_1+x_2, \quad y=y_1+y_2, \quad z=z_1+z_2$$

является разложением, для которого

$$x_1, y_1, z_1 \in D(\bar{\mathfrak{G}}')+Z_2; \quad x_2, y_2, z_2 \in Z_1.$$

Напишем для этих векторов условие (7). При этом учтем, что

$$D(Z_1)=0, \ \xi(Z_1)=0, \ Z_1 \perp D(\bar{\mathfrak{G}}').$$

Получаем:

$$g\Big(x_1, [z_1, \xi(y_1)]\Big)=g([x_1, y_1], z_1+z_2).$$

В силу того же условия (7) отсюда имеем:

$$g(\bar{\mathfrak{G}}', Z_1)=0.$$

Значит,

$$\bar{\mathfrak{G}}' \cap Z_1=0,$$

т.е.

$$Z_1=0, \quad \bar{\mathfrak{G}}'=D(\bar{\mathfrak{G}}').$$

Поэтому

$$\bar{\mathfrak{G}}=\bar{\mathfrak{G}}'+Z.$$

Алгебра Ли $\bar{\mathfrak{G}}$ разлагается в прямую сумму производной алгебры и центра. Она будет редуктивной, если $\bar{\mathfrak{G}}'$ будет полупростой. Мы воспользуемся критерием Картана – алгебра Ли полупроста, если не содержит собственных абелевых идеалов.

Так как $D(Z)=0$ и $\xi(Z)=0$, то для простоты можем предположить, что $Z=0$, т.е. $\bar{\mathfrak{G}}=\bar{\mathfrak{G}}'$, $D(\bar{\mathfrak{G}})=\bar{\mathfrak{G}}$.

Пусть H является абелевым идеалом в алгебре Ли $\bar{\mathfrak{G}}$.

Рассмотрим разложение

$$\bar{\mathfrak{G}}=H+\mathfrak{M}$$

в прямую сумму ортогонально относительно метрики g.

7. Если $x, y\in H$, то

$$g\left(x, [\bar{\mathfrak{G}}, \xi(y)]\right)=0.$$

Это равносильно условию

$$[\bar{\mathfrak{G}}, \xi(H)]\subseteq\mathfrak{M}.$$

8. Пусть $x\in H$, $z\in\mathfrak{M}$. Приходим к включению

$$[\mathfrak{M}, \xi(\bar{\mathfrak{G}})]\subseteq\mathfrak{M}.$$

9. Теперь возьмем $y\in H$, $z\in\mathfrak{M}$. Видим, что

$$[\mathfrak{M}, \xi(H)]=0.$$

Из полученного следует:

$$[\mathfrak{M}, \xi(\mathfrak{M})]\subseteq\mathfrak{M},\ [H, \xi(H)]\subseteq\mathfrak{M},\ [\mathfrak{M}, \xi(H)]=0. \tag{8}$$

10. Условие (7) дает:

$$g\left(x, [z, \xi(y)]\right)=g([x, y], z)=-g([y, x], z)=-g\left(y, [z, \xi(x)]\right).$$

Окончательно имеем:

$$g\left(\bar{\mathfrak{G}}, [H, \xi(\mathfrak{M})]\right)=-g\left(\mathfrak{M}, [H, \xi(\bar{\mathfrak{G}})]\right).$$

До сих пор мы не предполагали, что D является алгеброй внутренних дифференцирований, т.е. полученные результаты верны для любых сильно-римановых связностей. Сейчас воспользуемся тем, что связность внутренняя. В этом случае

$$[H, \xi(\bar{\mathfrak{G}})]\subseteq H$$

и, тем самым, ортогонально к $\mathfrak{M}$. Значит,

$$g\left(\bar{\mathfrak{G}}, [H, \xi(\mathfrak{M})]\right)=0,$$

$$[H, \xi(\mathfrak{M})]=0. \tag{9}$$

Так как $D(\bar{\mathfrak{G}})=\bar{\mathfrak{G}}$, то должно выполняться соотношение

$$[H+\mathfrak{M}, \xi(H)+\xi(\mathfrak{M})]=H+\mathfrak{M}.$$

Однако, в силу (8) и (9),

$$[H+\mathfrak{M}, \xi(H)+\xi(\mathfrak{M})]\subseteq\mathfrak{M}.$$

Значит

$$H=0, \quad \mathfrak{M}=\bar{\mathfrak{G}},$$

что и доказывает теорему.

Из проведенного доказательства видно, что наличие внутренних сильно-римановых связностей является по существу свойством полупростых групп Ли. В редуктивные группы Ли они переносятся путем тривиального продолжения отображения ξ на центр алгебры Ли этих групп. Поэтому дальнейшие исследования представляют интерес только на полупростых группах Ли.

Итак, пусть $\mathfrak{G}$ — полупростая группа Ли, H — некоторая ее подалгебра Картана, Δ — система ненулевых корней, x_α — корневые векторы, $\mathfrak{M}$ — подпространство, натянутое на эти векторы.

Известно [3], что каждому вектору x_α можно сопоставить вектор $h_\alpha \in H$ таким образом, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$[x_\alpha, x_{-\alpha}]=h_\alpha, \quad [h, x_\alpha]=\alpha(h)\, x_\alpha, \quad h\in H,$$
$$[x_\alpha, x_\beta]=N_{\alpha,\beta}\, x_{\alpha+\beta},$$
$$\left.\begin{array}{l} N_{\alpha,\beta}=0, \text{ если } \alpha+\beta\,\bar{\in}\,\Delta, \\ N_{\beta+\gamma,-\gamma}=N_{-\gamma,-\beta}=-N_{\gamma,\beta}=N_{\beta,\gamma}, \\ \alpha(h_\alpha)>0. \end{array}\right\} \tag{10}$$

Докажем вторую теорему о сильно-римановых связностях.

Теорема 2. *Для каждой подалгебры Картана H существует, и при том единственная, сильно-риманова связность, удовлетворяющая условию инвариантности*

$$\xi(H)\subseteq H.$$

Доказательство. 1. Условие (7) дает:

$$g\left(x_\alpha, [x_\beta, \xi(h)]\right)=g([x_\alpha, h], x_\beta).$$

Отсюда следует, что

$$\beta\left(\xi(h)\right) g(x_\alpha, x_\beta)=\alpha(h)\, g(x_\alpha, x_\beta).$$

Полагая $\alpha=\beta$, имеем для всех $\alpha\in\Delta$:

$$\alpha\left(\xi(h)\right)=\alpha(h).$$

Это значит, что ограничение преобразования ξ на подалгебру Картана является тождественным преобразованием.

2. Если $\alpha \neq \beta$, то из условия

$$\beta(h)\, g(x_\alpha,\ x_\beta) = \alpha(h)\, g(x_\alpha,\ x_\beta)$$

получаем, что

$$g(x_\alpha,\ x_\beta) = 0.$$

Корневые подпространства ортогональны в рассматриваемой метрике.

3. В силу абелевости подалгебры Картана H и условия (7) для всех h_1, $h_2 \in H$ и $z \in \mathfrak{G}$ получаем:

$$g\left(h_1,\ [\xi(h_2),\ z]\right) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$[H,\ \mathfrak{G}] \perp H.$$

В частности,

$$\mathfrak{M} \perp H.$$

4. Опять пользуемся условием (7):

$$g\left(h,\ [x_\beta,\ \xi(x_\alpha)]\right) = g([h,\ x_\alpha],\ x_\beta) = \alpha(h)\, g(x_\alpha,\ x_\beta).$$

Если $\alpha \neq \beta$, то

$$g\left(h,\ [x_\beta,\ \xi(x_\alpha)]\right) = 0.$$

Значит

$$\left.\begin{array}{l} [x_\beta,\ \xi(x_\alpha)] \in \mathfrak{M}, \\ \text{если только} \\ \alpha \neq \beta. \end{array}\right\} \qquad (11)$$

5. Из того же условия (7) имеем:

$$g\left(x_\alpha,\ [x_\beta,\ \xi(x_\gamma)]\right) = g([x_\alpha,\ x_\gamma],\ x_\beta).$$

Если $\alpha+\gamma \neq \beta$, то вектор

$$[x_\alpha,\ x_\gamma] = N_{\alpha,\gamma}\, x_{\alpha+\gamma}$$

ортогонален вектору x_β (либо $[x_\alpha,\ x_\gamma] \in H$ и тоже ему ортогонален). Значит,

$$g\left(x_\alpha,\ [x_\beta,\ \xi(x_\gamma)]\right) = 0,$$

если только

$$\alpha+\gamma \neq \beta.$$

Пусть

$$\xi(x_\gamma) = h^*_\gamma + \sum_{\delta\in\Delta} x^\delta_\gamma x_\delta.$$

Тогда

$$[x_\beta, \xi(x_\gamma)] = -\beta(h^*_\gamma)\, x_\beta + \sum_{\delta\in\Delta} N_{\beta,\delta}\, x^\delta_\gamma\, x_{\beta+\delta}.$$

Так как $\gamma\neq 0$, то $[x_\beta, \xi(x_\gamma)]$ должен быть ортогонален вектору x_β. Однако скалярное произведение вектора $x_{\beta+\delta}$ с вектором x_β равно нулю, т.к. либо $x_{\beta+\delta}\in H$, либо $\beta+\delta\neq\beta$. Поэтому

$$\beta(h^*_\gamma) = 0$$

для всех корней системы Δ. Это возможно лишь в случае, когда $h^*_\gamma = 0$. Таким образом,

$$\xi(\mathfrak{M}) \subseteq \mathfrak{M}.$$

6. Воспользуемся соотношением (11). Пусть в разложении

$$\xi(x_\alpha) = \sum_{\delta\in\Delta} x^\delta_\alpha\, x_\delta$$

содержится вектор x_β, для которого $\beta\neq-\alpha$. Тогда $-\beta\neq\alpha$ и вектор $[x_{-\beta}, \xi(x_\alpha)]$ лежит в подпространстве $\mathfrak{M}$. Однако это невозможно, ибо $[x_{-\beta}, x_\beta]\in H$. Значит,

$$\xi(x_\alpha) = \lambda_\alpha x_{-\alpha}.$$

7. Нам остается вычислить λ_α. С этой целью напишем условие (7) для произвольной тройки векторов пространства $\overline{\mathfrak{G}}$. Пусть

$$x = h_x + \sum_{\alpha\in\Delta} x^\alpha x_\alpha, \quad y = h_y + \sum_{\beta\in\Delta} y^\beta x_\beta, \quad z = h_z + \sum_{\gamma\in\Delta} z^\gamma x_\gamma.$$

Приходим к такому соотношению:

$$\begin{aligned}
& x^\alpha\, \alpha(h_z)\, y^{-\alpha}\, \lambda_{-\alpha}\, g(x_\alpha, x_\alpha) - z^{-\gamma} y^{-\gamma} \lambda_{-\gamma}\, g(h_x, h_\gamma) + \\
& + z^\beta y^{-\gamma} x^{\beta+\gamma} \lambda_{-\gamma} N_{\beta,\gamma}\, g(x_{\beta+\gamma}, x_{\beta+\gamma}) = \\
& = \beta(h_x)\, y^\beta z^\beta g(x_\beta, x_\beta) + x^\alpha y^{-\alpha} g(h_\alpha, h_z) + \\
& + x^\alpha y^\beta z^{\alpha+\beta} N_{\alpha,\beta}\, g(x_{\alpha+\beta}, x_{\alpha+\beta}).
\end{aligned}$$

Приравнивая члены при соответствующих комбинациях координат векторов x, y и z, получаем:

$$\left.\begin{aligned}
& \beta(h_x)\, g(x_\beta, x_\beta) = -\lambda_\beta\, g(h_x, h_{-\beta}), \\
& g(h_\alpha, h_z) = \alpha(h_z)\, \lambda_{-\alpha}\, g(x_\alpha, x_\alpha), \\
& N_{\beta+\gamma, -\gamma}\, g(x_\beta, x_\beta) = \lambda_{-\gamma} N_{\beta,\gamma}\, g(x_{\beta+\gamma}, x_{\beta+\gamma})
\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

При помощи условий (10) последнее уравнение системы (12) можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} g(x_\beta,\ x_\beta)=\lambda_{-\gamma}\ g(x_{\beta+\gamma},\ x_{\beta+\gamma}), \\ \text{если только } \beta+\gamma\in\Delta. \end{cases}$$

В силу произвольности векторов h_x и h_z, система (12) принимает такой окончательный вид:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha(h)\ g(x_\alpha,\ x_\alpha)=-\lambda_\alpha\ g(h_{-\alpha},\ h), \\ &g(h_\alpha,\ h)=\lambda_{-\alpha}\ \alpha(h)\ g(x_\alpha,\ x_\alpha), \\ &g(x_\beta,\ x_\beta)=\lambda_{-\gamma}\ g(x_{\beta+\gamma},\ x_{\beta+\gamma}), \\ &\text{если только } \beta+\gamma\in\Delta. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Подставляя со второго соотношения системы (13) в первое $g(h_{-\alpha},\ h)$, равное $-\lambda_\alpha\alpha(h)\ g(x_\alpha,\ x_\alpha)$, и сокращая на $g(x_\alpha,\ x_\alpha)$, получаем:

$$\alpha(h)=\lambda_\alpha^2\ \alpha(h),$$

$$\lambda_\alpha=\pm 1$$

для всех $\alpha\in\Delta$.

8. Пусть $\lambda_{-\alpha}=-1$ для некоторого $\alpha\in\Delta$. Из второго уравнения системы (13) получаем, что

$$g(h_\alpha,\ h)=-\alpha(h)\ g(x_\alpha,\ x_\alpha).$$

Полагая $h_\alpha=h$, отсюда имеем:

$$g(h,\ h)=-\alpha(h)\ g(x_\alpha,\ x_\alpha).$$

Однако это противоречит условиям (10). Значит,

$$\lambda_\alpha=1$$

для всех $\alpha\in\Delta$.

Отображение ξ определено единственным образом. Оно задается формулой

$$\xi\left(h+\sum_{\alpha\in\Delta} x^\alpha\ x_\alpha\right)=h+\sum_{\alpha\in\Delta} x^\alpha\ x_{-\alpha}.$$

9. Чтобы закончить доказательство теоремы, надо выяснить, существует ли в подалгебре Картана метрика, удовлетворяющая условиям (13).

Покажем, что она всегда существует. Для этого положим

$$g(x_\alpha,\ x_\alpha)=1$$

для всех $\alpha\in\Delta$. В этом случае условия (13) сводятся к единственному соотношению

$$\alpha(h)=g(h_\alpha,\ h),$$

которому удовлетворяет метрика Картана.

Таким образом, метрику g можно представить в следующем виде: x_α — ортонормальная система, H и $\mathfrak{M}$ ортогональны, в подпространстве H метрика g совпадает с метрикой Картана.

Теорема доказана.

Итак, каждой редуктивной структуре, определенной при помощи подалгебры Картана и корневого подпространства, мы сопоставили инвариантную риманову связность. Она не является ξ-связностью. Действительно, геодезические линии, проходящие по направлению векторов x_α, не являются траекториями однопараметрических подгрупп нормальных расширений группы Ли $\mathfrak{G}$.

3. Двухсторонне инвариантные ξ-связности

Напомним, что двухсторонне инвариантной связностью называется такая связность, которая одновременно лево- и право-инвариантна. Это равносильно инвариантности относительно группы внутренних автоморфизмов.

В дальнейшем мы будем интересоваться только связностями, отличными от связности Картана.

Двухсторонняя инвариантность формы γ означает ее инвариантность относительно присоединенной группы. Это приводит к соотношению

$$[\gamma(x, y), \partial]-\gamma(x, [y, \partial])-\gamma([x, \partial], y)=0,$$

которое должно выполняться для любых векторов $x, y \in \overline{\mathfrak{G}}$ и любого внутреннего дифференцирования ∂. Для Γ-связностей это условие принимает такой вид:

$$\Big[y[\xi(x), \partial]\Big]+\Big[x[\xi(y), \partial]+\Big[\xi([y, \partial]), x\Big]+\Big[\xi([x, \partial]), y\Big]=0. \qquad (14)$$

Теорема 3. *В случае одномерной алгебры Ли D, Γ-связность тогда и только тогда является ξ-связностью, если она инвариантна относительно однопараметрической группы автоморфизмов, порождаемых этой алгеброй.*

Доказательство можно найти в [1].

Теорема 4. *На группе Ли $\mathfrak{G}$, обладающей абелевой группой внутренних автоморфизмов, любая внутренняя двусторонне инвариантная Γ-связность является ξ-связностью.*

Доказательство. В случае, когда группа внутренних автоморфизмов абелева, условие двухсторонней инвариантности для внутренних Γ-связностей принимает следующий вид:

$$[\xi([y, \partial]), x]+[\xi([x, \partial]), y]=0.$$

В этом соотношении ∂ можно считать вектором алгебры Ли $\overline{\mathfrak{G}}$. Значит условие двухсторонней инвариантности можно представить в виде

$$\Big[\xi([y, z]), x\Big]+\Big[\xi([x, z]), y\Big]=0 \qquad (15)$$

для всех $x, y, z \in \overline{\mathfrak{G}}$.

Мы должны доказать, что условия (6) являются следствием условия (15).

Полагая в условии (15) $x=z$, получаем:

$$\left[\xi([x, y]),\ x\right]=0. \tag{16}$$

Выражение вида

$$\underbrace{\left[\xi(x)\left[\xi(x)\left[\ldots[\xi(x),\ y]\right.\right.\right.}_{p\ \text{раз}}\quad\left.\left.\left.\right]\right]\right],$$

определенное для любого $y\in\mathfrak{G}$, обозначим через

$$[\bar{X}^p,\ y].$$

При помощи тождества Якоби и условия (15) получаем:

$$[\xi(X^q),\ y]=\left[\xi\left([\xi(x),\ X^{q-1}]\right),\ y\right]=$$

$$=-\left[\xi([y,\ X^{q-1}]),\ \xi(x)\right],\ =-\left[\xi\left([y[\xi(x),\ X^{q-2}],\ \xi(x)\right]=\right.$$

$$=\left[\xi\left(\left[X^{q-2},\ [y,\ \xi(x)]\right]\right)+\left[\xi\left(\left[\xi(x)[X^{q-2},\ y]\right]\right),\ \xi(x)\right]\right.$$

Далее, при помощи (15) и (16) имеем:

$$[\xi(X^q),\ y]=-\left[\xi\left(\left[[y,\ \xi(x)],\ X^{q-2}\right]\right),\ \xi(x)\right]=$$

$$=\left[\xi\left([\xi(x),\ X^{q-2}]\right),\ [\xi(x),\ y]\right]$$

Значит,

$$[\xi(X^q),\ y]=\left[\xi(X^{q-1}),\ [\bar{X}^1,\ y]\right]$$

Повторяя этот процесс относительно выражения

$$[\xi(X^{q-1}),\ y_1],$$

где

$$y_1=[\bar{X}^1,\ y],$$

получим:

$$[\xi(X^q),\ y]=\left[\xi(X^{q-2}),\ [\bar{X}^2,\ y]\right]$$

После n-го шага продолжение рассуждений еще возможно, если

$$q-n-2\geqslant 0.$$

Значит, можно продолжать $q-1$ раз, после чего получим такую формулу:

$$[\xi(X^q),\ y]=\left[\xi(X^1),\ [\bar{X}^{q-1},\ y]\right]. \tag{17}$$

Все полученные формулы объединим в одну формулу вида

$$\begin{cases} [\xi(X^q),\ y]=\left[\xi(X^s),\ [\bar{X}^t,\ y]\right], \\ s+t=q-1, \\ s\geqslant 1. \end{cases}$$

Далее имеем:

$$\left[\xi\left([\xi(x),\ x]\right),\ [\dot{X}^{q-1},\ y]\right]=\left[\xi\left([[X^{q-1},\ y],\ \xi(x)]\right),\ x\right]=$$
$$=-\left[\xi([\bar{X}^{q},\ y]),\ x\right]$$

Мы получили такую формулу:

$$[\xi(X^q),\ y]=\left[x,\ \xi([\bar{X}^q,\ y])\right]$$

Полагая в ней $x=y$, находим:

$$[\xi(X^q),\ x]=[x,\ \xi(X^q)].$$

Отсюда следует, что

$$[\xi(X^q),\ x]=0.$$

В формуле (17) полагая $x=y$, окончательно имеем:

$$\begin{cases}[\xi(X^s),\ X^t]=0,\\ s\geqslant 1.\end{cases}$$

Условия (6) выполнены, что и доказывает теорему.

Если группа Ли абелева, то любая ее связность является двухсторонне инвариантной Г-связностью. Однако не существует внутренних Г-связностей, отличных от связности Картана. В этом случае теорема теряет силу.

Сейчас докажем важный для дальнейшего результат.

Лемма 5. *Пусть* Γ — *некоторый голоморф алгебры Ли* $\bar{\mathfrak{G}}$ *с одномерной алгеброй* D *ее дифференцирований. Тогда и только тогда существует линейное отображение* (1), *удовлетворяющее условию* (15), *если в алгебре Ли* $\bar{\mathfrak{G}}$ *существует вектор* $t\in\bar{\mathfrak{G}}'+D(\bar{\mathfrak{G}})$ *такой, что* $D(t)\neq 0$.

Доказательство. Сначала докажем необходимость. Допустим, что рассматриваемое отображение существует. Выбрав в алгебре Ли D вектор d, это отображение представим в виде

$$\xi(x)=\nu(x)\ d,$$

где ν — некоторая линейная форма в пространстве $\bar{\mathfrak{G}}$.

Так как соответствующая Г-связность не должна совпадать со связностью Картана, то существует вектор $x_1\in\bar{\mathfrak{G}}$, для которого

$$[\xi(x_1),\ x_1]\neq 0.$$

Это равносильно условиям

$$d(x_1)\neq 0,\ \ \nu(x_1)\neq 0.$$

Из соотношения (16) находим, что

$$[\xi([x_1,\ y]),\ x_1]=0$$

для всех $y\in\bar{\mathfrak{G}}$. Это возможно только в том случае, если

$$\nu([x_1,\ y])=0.$$

Еще раз используя соотношение (16), имеем:

$$\nu([z, y])\, d(x_1) = 0.$$

Следовательно,

$$\nu(\bar{\mathfrak{G}}') = 0.$$

В алгебре Ли $\bar{\mathfrak{G}}$ рассмотрим трилинейную форму $f(x, y, z)$ со значением в пространстве $\bar{\mathfrak{G}}$, определенную следующим образом:

$$f(x, y, z) = \left[\xi\left([\xi(x), y]\right), z\right]$$

Пусть

$$F(x, y, z,) = f(x, y, z) + f(x, z, y) + f(y, x, z) + f(y, z, x) + f(z, x, y) + \\ + f(z, y, x).$$

Нетрудно видеть, что условия (6) влекут за собой и соотношение

$$F(x, y, z) = 0$$

относительно всех $x, y, z \in \bar{\mathfrak{G}}$.

Так как

$$f(x, y, z) = \nu(x)\, \nu\left(d(y)\right) d(z),$$

то

$$F(x_1, x_1, x_1) = \nu(x_1)\, \nu\left(d(x_1)\right) d(x_1) = 0.$$

Следовательно,

$$\nu\left(d(x_1)\right) = 0.$$

Если x — произвольный вектор пространства $\bar{\mathfrak{G}}$, то условие

$$F(x_1, x_1, x) = \nu(x_1)\, \nu\left(d(x)\right) d(x_1) = 0$$

приводит к соотношению

$$\nu\left(d(x)\right) = 0.$$

Мы доказали, что в пространстве $\bar{\mathfrak{G}}$ существует ненулевая линейная форма, удовлетворяющая таким условиям:

$$\nu(\bar{\mathfrak{G}}') = 0, \quad \nu\left(D(\bar{\mathfrak{G}})\right) = 0.$$

Тем самым

$$0 \neq \bar{\mathfrak{G}}' + D(\bar{\mathfrak{G}}) \neq \bar{\mathfrak{G}}.$$

В качестве вектора t сейчас можно взять вектор x_1. Действительно, т. к. $\nu(x_1) \neq 0$, то

$$x_1 \bar{\in} \bar{\mathfrak{G}}' + D(\bar{\mathfrak{G}})$$

и, кроме того, $d(x_1) \neq 0$. Необходимость доказана.

Переходим к доказательству достаточности.

Пусть выполнено условие, отмеченное в лемме. Тогда в пространстве $\bar{\mathfrak{G}}$ можно провести гиперплоскость H, содержащую $\bar{\mathfrak{G}}' + D(\bar{\mathfrak{G}})$ и не содержащую вектор t.

При помощи соотношений вида

$$\xi(H)=0, \quad \xi(t)=d$$

определим линейное отображение (1). Так как $\xi(\bar{\mathfrak{G}}')=0$, то рассматриваемое отображение удовлетворяет условию (15). С другой стороны, т. к. $d(t)\neq 0$, то

$$[\xi(t), t]\neq 0,$$

и соответствующая Г-связность не совпадает со связностью Картана.

Этим заканчивается доказательство леммы.

Однако надо отметить, что построенные таким образом Г-связности в общем случае не являются двусторонне инвариантными.

Доказанной лемме можно придать более изящную формулировку. Для этого заметим, что $I=\bar{\mathfrak{G}}+D(\bar{\mathfrak{G}})$ образует в алгебре Ли $\bar{\mathfrak{G}}$ идеал, инвариантный относительно алгебры D. Тем самым, алгебра дифференцирований D индуцирует алгебру дифференцирований в фактор-алгебру $\bar{\mathfrak{G}}/I$. Эту алгебру дифференцирований обозначим через $\bar{D}$.

Сейчас возможна такая формулировка леммы 5.

В случае, когда алгебра D одномерна, тогда и только тогда существует линейное отображение (1), *удовлетворяющее условию* (15), *если*

$$\bar{D}(\bar{\mathfrak{G}}/y)\neq 0.$$

Эта лемма позволяет решить вопрос существования двусторонне инвариантных ξ-связностей на группах Ли с абелевыми группами внутренних автоморфизмов.

Теорема 6. *Некоммутативные группы Ли, обладающие абелевой группой внутренних автоморфизмов, при любом их нормальном расширении с помощью этой группы, допускают по крайней мере однопараметрическое семейство двусторонне инвариантных ξ-связностей.*

Доказательство. Для этих групп $\bar{\mathfrak{G}}'\neq 0$, т. к. они не являются абелевыми. С другой стороны, для всех алгебр D внутренних дифференцирований

$$D(\bar{\mathfrak{G}})\subseteq \bar{\mathfrak{G}}'$$

В силу абелевости алгебры внутренних дифференцирований

$$ad[x, y]=[adx, ady]=0.$$

Значит,

$$[\bar{\mathfrak{G}}', \bar{\mathfrak{G}}]=0$$

и $\bar{\mathfrak{G}}'\neq\bar{\mathfrak{G}}$. Тем самым

$$0\neq\bar{\mathfrak{G}}'+D(\bar{\mathfrak{G}}).$$

Доказательство существования вектора t, удовлетворяющего условиям леммы 5 затруднений не вызывает. Теорема доказана.

С помощью той же леммы доказывается и следующая теорема.

Теорема 7. *Если алгебра Ли $\bar{\mathfrak{G}}$ группы Ли $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условию $0 \neq \bar{\mathfrak{G}}' \neq \bar{\mathfrak{G}}$ и допускает внутреннее дифференцирование, отображающее ее в центр, то на этой группе существует по крайней мере однопараметрическое семейство двусторонне инвариантных ξ-связностей.*

Доказательство. По предложению, алгебра Ли $\bar{\mathfrak{G}}$ имеет нетривиальный центр, который обозначим через Z. Пусть d — такое дифференцирование, для которого

$$d(\bar{\mathfrak{G}}) \subseteq Z. \tag{18}$$

Тогда

$$(ady \circ d - d \circ ady)(x) = [y, d(x)] - d([y, x]) =$$
$$= [y, d(x)] - [d(y), x] - [y, d(x)] = [x, d(y)] = 0.$$

Это значит, что все дифференцирования, удовлетворяющие условию (18), перестановочны со всеми внутренними дифференцированиями. Они образуют линейное подпространство в алгебре дифференцирований.

Пусть отображение (1) таково, что $\xi(\bar{\mathfrak{G}})$ лежит в этом подпространстве. Тогда условие (14) принимает вид (15). Это значит, что возможно применение леммы 5, что немедленно дает доказательство желаемого результата.

Как следствие доказанного, получается следующая теорема.

Теорема 8. *Каждая нильпотентная группа Ли обладает двусторонне инвариантными ξ-связностями.*

Доказательство. Соотношениями

$$E^0 \bar{\mathfrak{G}} = \bar{\mathfrak{G}}, \quad E^{p+1} \bar{\mathfrak{G}} = [\bar{\mathfrak{G}}, E^p \bar{\mathfrak{G}}]$$

определяется центральный убывающий ряд

$$E^0 \bar{\mathfrak{G}} \supseteq E \bar{\mathfrak{G}} \supseteq E^2 \bar{\mathfrak{G}} \supseteq$$

алгебры Ли $\bar{\mathfrak{G}}$. Если эта алгебра нильпотентна, то

$$E^m \bar{\mathfrak{G}} = \{0\}$$

для некоторого, достаточно большого m. Отсюда следует существование внутреннего дифференцирования, отображающего $\bar{\mathfrak{G}}$ в центр. Действительно, если $m > 2$, то такое дифференцирование содержится в $E^{m-2} \bar{\mathfrak{G}}$, т.к.

$$[\bar{\mathfrak{G}}, E^{m-1} \bar{\mathfrak{G}}] = 0$$

$$E^{m-1} \bar{\mathfrak{G}} \subseteq Z.$$

Если $m=2$, то

$$[\bar{\mathfrak{G}}, \bar{\mathfrak{G}}'] = 0$$

и любое внутреннее дифференцирование обладает этим свойством.

В случае, когда $m=1$, алгебра $\bar{\mathfrak{G}}$ абелева и любая ξ-связность двухсторонне инвариантна.

Теорема доказана.

Сейчас отметим одно свойство редуктивных групп Ли.

Каждая редуктивная алгебра Ли разлагается в прямую сумму

$$\overline{\mathfrak{G}}=\overline{\mathfrak{G}}'+Z.$$

Это определяет некоторую редуктивную структуру. C-связности А. М. Васильева, соответствующие этой структуре, двусторонне инвариантны. Этим мы получаем пример двусторонне инвариантных ξ-связностей на редуктивных группах Ли. Однако, справедлива следующая теорема.

Теорема 9. *Каждая редуктивная группа Ли допускает нормальное расширение, относительно которого она обладает ξ-связностями и не обладает двусторонне инвариантными ξ-связностями.*

Доказательство. Теорему доказывать надо только для групп Ли, имеющих нетривиальный центр, так как полупростые группы Ли кроме связности Картана больше двусторонне инвариантных связностей не имеют.

Центр Z, в силу своей абелевости, всегда обладает невырожденным дифференцированием $\bar{d}$. Пусть d-дифференцирование алгебры Ли $\overline{\mathfrak{G}}$, подчиненное условиям

$$d\,{}_{Z}=\bar{d},\quad d\,|_{\overline{\mathfrak{G}}'}=0.$$

Обозначим через D одномерную алгебру дифференцирований, порождаемую вектором d. Этой алгебре соответствует однопараметрическая группа автоморфизмов группы Ли $\mathfrak{G}$. Докажем, что нормальное расширение группы Ли $\mathfrak{G}$ относительно указанной группы автоморфизмов обладает нужным свойством.

Рассмотрим линейное отображение (1), подчиненное условиям

$$\xi(Z)=0,\quad \xi(\overline{\mathfrak{G}}')=D.$$

Оно определяет ξ-связность.

Действительно, в очевидных обозначениях

$$X^k=\Big[\xi(x)\Big[\xi(x)\,[\cdot\quad[\xi(x),\,x]\quad]\Big]\Big]=$$

$$=\Big[\xi(x|_{\overline{\mathfrak{G}}'})\Big[\xi(x|_{\overline{\mathfrak{G}}'})\,[\quad[\xi(x|_{\overline{\mathfrak{G}}'}),\,x|_{Z}]\cdots]\Big]\Big]\in Z.$$

Тем самым,

$$\xi(X^k)=0$$

и соотношения (6) удовлетворены.

Остается доказать отсутствие двусторонне инвариантных ξ-связностей.

Так как рассматриваемое дифференцирование отображает алгебру Ли $\overline{\mathfrak{G}}$ в ее центр, то оно перестановочно со всеми внутренними дифференцированиями. Условие (14) можно заменить условием (15) и применить лемму 5.

В силу того, что

$$d(Z)=Z,$$

идеал $\bar{\mathfrak{G}}'+D\,(\mathfrak{G})$ совпадает с алгеброй Ли $\bar{\mathfrak{G}}$. Таким образом, рассматриваемое нормальное расширение двусторонне инвариантными ξ-связностями не обладает. Теорема доказана.

Определение. Симметрическим ξ-пространством будем называть группу Ли, на которой задана ξ-связность с ковариантно постоянным тензором кривизны.

При помощи соотношения

$$\rho = Tr\,ad,$$

где Tr — операция взятия следа соответствующей матрицы преобразования, на каждой группе Ли определяется некоторая инвариантная 1-форма.

Теорема 10. *Каждая группа Ли с нетривиальным центром и ненулевой формой ρ допускает двусторонне инвариантные структуры симметрических ξ-пространств.*

Доказательство. Нетрудно проверить, что любое линейное отображение алгебры Ли в ее центр, равное нулю на производной алгебре, является дифференцированием. Для рассматриваемых групп такое отображение всегда существует. Это обеспечивается тем, что [7]

$$\rho\,(\bar{\mathfrak{G}}')=0,\ \ \rho(Z)=0.$$

Значит, всегда существует дифференцирование d, удовлетворяющее условиям

$$d\,(\bar{\mathfrak{G}}')\subseteq Z,\ \ d(t)\neq 0,$$

для некоторого вектора t, не принадлежащего ядру формы ρ.

Мы рассмотрим ξ-связность, для которой

$$\xi\,(x)=\rho\,(x)\,d.$$

Она не является связностью Картана, т.к.

$$\gamma\,(t,t)=[\xi\,(t),t]=\rho\,(t)\,d\,(t)\neq 0.$$

С другой стороны, в силу того, что

$$\xi\,(\bar{\mathfrak{G}}')=0$$

условия (15) выполнены и она двусторонне инвариантна.

Докажем, что относительно таких связностей группа Ли $\mathfrak{G}$ образует симметрические ξ-пространства.

Допустим, что рассматриваемая связность определяется формой (3) и имеет форму кривизны R. Мы воспользуемся структурными уравнениями пространства аффинной связности [6]:

$$d\Omega=-\tau\Omega,$$

$$d\tau=-\frac{1}{2}\,[\tau,\ \tau]+R.$$

Также напомним, что каноническая 1-форма Ω удовлетворяет уравнению Маурера – Картана:

$$d\Omega = -\frac{1}{2}[\Omega, \Omega].$$

Из второго структурного уравнения пространства аффинной связности находим:

$$d\tau = -\frac{1}{2}([\varphi, \varphi]+[\gamma, \gamma]+2[\gamma, \varphi])+R.$$

Тем самым

$$R=\Phi+\frac{1}{2}([\gamma, \gamma]+2[\gamma, \varphi])+d\gamma,$$

где Φ – форма кривизны связности Картана. Как известно [2]

$$\Phi(x, y)=\frac{1}{4}\,ad[x, y].$$

Для любой тройки векторов алгебры Ли $\overline{\mathfrak{G}}$ получаем такое соотношение:

$$([\gamma, \varphi])(x, y)(z)=\frac{1}{2}\Big([\gamma(x), ady]-[\gamma(y), adx]\,(z)=$$

$$=\frac{1}{2}\Big(\gamma(x, [y, z])-[y, \gamma(x, z)]-\gamma(y, [x, z])+[x, \gamma(y, z)]\Big)$$

Присоединив к этому уравнению условие двусторонней инвариантности

$$[\gamma(x, y), z]-\gamma(x, [y, z])-\gamma([x, z], y)=0,$$

находим:

$$([\gamma, \varphi])(x, y)(z)=0.$$

Видим, что для двусторонне инвариантных связностей на группах Ли имеет место соотношение

$$[\gamma, \varphi]=0.$$

Далее, в силу инвариантности операции γ и в силу уравнения Маурера – Картана

$$d\gamma(x, y)(z)=\gamma\Big(d\Omega(x, y)\Big)(z)=$$

$$=\gamma\Big(-\frac{1}{2}[\Omega, \Omega](x, y), z\Big)=\gamma([y, x], z).$$

С другой стороны:

$$\Big[\gamma\Big(\Omega(x)\Big), \gamma\Big(\Omega(y)\Big)\Big](z)=\gamma\Big(\Omega(x)\Big)\Big(\gamma\big(\Omega(y)\big)(z)\Big)-$$

$$-\gamma\Big(\Omega(y)\Big)\Big(\gamma\big(\Omega(x)\big)(z)\Big)=\gamma\Big(\Omega(x)\Big)\Big(\gamma(y, z)\Big)-$$

$$-\gamma\Big(\Omega(y)\Big)\Big(\gamma(x, z)\Big)=\gamma\Big(x, \gamma(y, z)\Big)-\gamma\Big(y, \gamma(x, z)\Big).$$

Таким образом,

$$R(x,\ y)(z)=\frac{1}{4}\left[[x,\ y]\,z\right]+\frac{1}{2}\left(\gamma\left(x,\ \gamma(y,\ z)\right)-\right.$$

$$\left.-\gamma\left(y,\ \gamma(x,\ z)\right)+\gamma([y,\ x],z)\right)$$

Для рассматриваемых связностей выполняется соотношение

$$\rho\circ d=0.$$

В силу этого и того, что

$$\gamma(x,y)=-\rho(y)\,d(x)+\rho(x)\,d(y), \tag{19}$$

находим:

$$\gamma\left(x,\gamma(y,\ z)\right)=\rho(x)\,d\left(\rho(y)\,d(z)+\rho(z)\,d(y)\right),$$

$$\gamma\left(y,\gamma(x,\ z)\right)=\rho(y)\,d\left(\rho(x)\,d(z)+\rho(z)\,d(x)\right)$$

Значит,

$$\gamma\left(x,\gamma(y,\ z)\right)-\gamma\left(y,\gamma(x,\ z)\right)=\rho(z)\left(\rho(x)\,d^2(y)-\rho(y)\,d^2(x)\right)$$

Далее, т.к. $\rho(\overline{\mathfrak{G}}')=0$:

$$\gamma([y,\ x],\ z)=\rho(z)\left([d(y),\ x]+[y,\ d(x)]\right)=0.$$

Окончательно получаем:

$$R(x,\ y)(z)=\frac{1}{4}\left[[x,\ y]\,z\right]+\frac{1}{2}\,\rho(z)\left(\rho(x)\,d^2(y)-\rho(y)\,d^2(x)\right). \tag{20}$$

По определению ковариантной производной [4], и в силу инвариантности формы кривизны, имеем:

$$\nabla_v R(x,y)(z)=R\left(\tau(v)(x),\ y\right)(z)+R\left(x,\ \tau(v)(y)\right)(z)+$$

$$+R(x,y)\left(\tau(v)(z)\right)-\tau(v)\left(R(x,y)(z)\right).$$

Применяя формулу (20), получаем:

$$\nabla_v R(x,\ y)(z)=\frac{1}{8}\left(\left[\left[[x,\ v]\,y\right]z\right]+\left[\left[x\,[y,\ v]\,z\right]+\right.\right.$$

$$\left.+\left[[x,\ y],\ [z,\ v]\right]-\left[\left[[x,\ y]\right]z\right]v\right]\Big)+\frac{1}{2}\,\rho(z)\left(\rho(y)\,d^2\,\gamma(v,\ x)+\right.$$

$$\left.+\rho(x)\,d^2\,\gamma(v,\ y)-\rho(v)\left(\rho(x)\,d^3(y)-\rho(y)\,d^3(x)\right)\right)$$

При помощи тождества Якоби и формулы (19) легко убеждаемся, что это выражение равно нулю. Этим и заканчивается доказательство теоремы.

Алгебра Ли вида

$$[x_1, x_2]=x_1, [x_1, x_3]=0, [x_2, x_4]=0,$$
$$[x_3, x_2]=0, [x_1, x_4]=0, [x_3, x_4]=0$$

удовлетворяет требованиям теоремы, т.к. она обладает нетривиальным центром и ненулевой формой ρ, равной проекции вектора на базисный вектор x_2, взятый с обратным знаком. Это доказывает существование симметрических ξ-пространств.

Вильнюсский Государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
20.XI.1969

Литература

1. Р. В. Восилюс, Об одном классе инвариантных аффинных связностей на группах Ли, Лит. матем. сб., **VIII**, № 4 (1968), 699–726.
2. Р. Бишоп, Р. Криттенден, Геометрия многообразий, „Мир", М., 1967.
3. Н. Джекобсон, Алгебры Ли, „Мир", М., 1964.
4. А. Лихнерович, Теория связностей в целом и группы голономий, ИЛ, М., 1960.
5. С. Хелгасон, Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, „Мир", М., 1964.
6. К. Шевалле, Теория групп Ли, **I**, ИЛ, М., 1948.
7. К. Шевалле, Теория групп Ли, **III**, ИЛ, М., 1958.

APIE SĄRYŠIUS LI GRUPĖSE

R. VOSYLIUS

(*Reziumė*)

Straipsnyje yra nagrinėjami invariantiniai afininiai sąryšiai, apibrėžiami Li grupėse su jų normalinių išplėtimų pagalba. Įrodyta keletas teoremų apie dvigubai invariantinius šios klasės sąryšius, o taip pat apie sąryšius, esančius Rymano sąryšiais invariantinių metrikų atžvilgiu.

ÜBER ZUSAMMENHÄNGE IN LIESCHEN GRUPPEN

R. VOSYLIUS

(*Zusammenfassung*)

In dem Artikel werden invariante affine Zusammenhänge untersucht, die in Lieschen Gruppen durch ihre Normalverbreitungen definiert werden. Es sind einige Theoreme über zweifach invariante Zusammenhänge dieser Klasse, sowie über Zusammenhänge, die als Riemannsche Zusammenhänge in Bezug auf invariante Metriken hervorgehoben werden können, bewiesen.