X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 4

1970

УДК – 519.21

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ НЕРЕШЕТЧАТЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ

А. БИКЯЛИС

Введение. Рассмотрим последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимых одинаково распределенных k-мерных случайных векторов эвклидова пространства R^k с нерешетчатой функцией распределения $F(\mathbf{x})$. Функция распределения $F(\mathbf{x})$ называется нерешетчатой, если модуль ее характеристической функции $f(\mathbf{t})$ равен единице только в одной конечной точке $\mathbf{t}=\mathbf{0}$, где $\mathbf{0}$ – нулевой вектор. Здесь мы докажем теорему К.-Г. Эссеена [1].

Если независимые одинаково распределенные случайные величины $(k=1)$ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *не являются решетчатыми и имеют конечные моменты третьего порядка, то для всех* x

$$F_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du + \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{(1-x^2)\,\alpha_3}{6\sigma^3 \sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

где σ^2 *– дисперсия случайной величины* ξ_1, α_3 *– абсолютный третий момент,* $F_n(x)$ *– функция распределения нормированной и центрированной суммы случайных величин* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Для функции распределения $F_n(x)$ суммы

$$\mathbf{S}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \xi_j$$

k-мерных случайных векторов $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Не ограничивая общности предположим, что математические ожидания случайного вектора ξ_1 равны нулю.

Теорема. *Если одинаково распределенные случайные векторы* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *имеют невырожденную ковариационную матрицу* V *и конечные третьи моменты, не являясь при этом решетчатыми, то равномерно по* $\mathbf{x} \in R^k$

$$F_n(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}) + \frac{1}{\sqrt{n}} P_1(-\Phi)(\mathbf{x}) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Здесь $\Phi(\mathbf{x})$ – функция распределения k-мерного нормального закона с параметрами $(0, V)$;

$$P_1(-\Phi)(\mathbf{x}) = \int\limits_{\substack{y_1<x_1 \\ \cdots\cdots}} \int\limits_{R^k} \frac{i^3 M(\mathbf{t}, \xi_1)^3}{6(2\pi)^k} e^{-i(\mathbf{t}, \mathbf{y}) - \frac{1}{2} \mathbf{t} V \mathbf{t}'} d\mathbf{t}\, d\mathbf{y} \qquad (*)$$

$\mathbf{t}=(t_1, t_2, \ldots, t_k)$, $\mathbf{y}=(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ — векторы k-мерного евклидового пространства R^k, $\|\mathbf{t}\|$ и $\|\mathbf{y}\|$ — их нормы; $(\mathbf{t}, \mathbf{y})$ — скалярное произведение; $\xi_j=(\xi_{1j}, \xi_{2j}, \ldots, \xi_{kj})$.

Леммы. *Пусть p — некоторое положительное целое число:*

$$H_p(x)=\frac{1}{2pC}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2p}}{\dfrac{x}{2p}}\right)^{2p} \qquad C=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{2p}dx,$$

$Q_p(\mathbf{x})$ — k-мерная функция распределения с плотностью $\prod_{i=1}^{k} H_p(x_i)$. $H_p(x)$ — плотность, характеристическая функция $h_p(t)$ которой удовлетворяет соотношение $h_p(t)\equiv 0$ при $|t|\geqslant 1$.

Лемма 1. *Положим, что $F(\mathbf{x})$ — некоторая функция распределения, а $G(\mathbf{x})$ — функция удовлетворяющая условия:*

1) $F(-\infty, \quad -\infty)=G(-\infty, \ldots, -\infty)$ и $F(+\infty, \ldots, +\infty)=G(+\infty, \ldots, +\infty)$,

2) *дифференцируемая в каждой точке и*

$$\left|\frac{\partial G(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right|\leqslant A, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ k,$$

тогда

$$\left|[F(\mathbf{x})-G(\mathbf{x})]*Q_p\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)\right|\leqslant\tau(k)\sup_{\mathbf{x}\in R^k}\left|[F(\mathbf{x})-G(\mathbf{x})]*Q_p\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)\right|+$$
$$+2\varepsilon A a(k).$$

Здесь $*$ — знак композиции, $a(k)$ и $\tau(k)$ удовлетворяют равенство

$$\frac{3}{2}\left(\int_{-a(k)}^{a(k)}H_p(x)dx\right)^k=1+\frac{1}{\tau(k)},$$

ε — некоторое положительное число.

Доказательство леммы опирается на идеи Г. Бергстрема (см. лемму в [4]) и не представляет больших трудностей.

Лемма 2. *Если функция распределения $F(\mathbf{x})$ нерешетчата, то, каково бы ни было $\omega>0$, существует такая функция $\lambda(n)\to\infty$ при $n\to\infty$, что*

$$\int_{\omega\leqslant\|\mathbf{t}\|\leqslant\lambda(n)}|f(\mathbf{t})|^n d\mathbf{t}=o\left(e^{-\frac{\sqrt{n}}{4}}\right).$$

Доказательство. В случае

$$\overline{\lim_{\|\mathbf{t}\|\to\infty}}|f(\mathbf{t})|<1$$

утверждение тривиальное. Пусть теперь

$$\overline{\lim_{\|\mathbf{t}\|\to\infty}}|f(\mathbf{t})|=1.$$

Поскольку при всех $\mathbf{t}\neq 0$ $|f(\mathbf{t})|<1$, то функция

$$a(\|\mathbf{t}\|)=\frac{1}{1-\max\limits_{\omega\leqslant\|\tau\|\leqslant\|\mathbf{t}\|}|f(\tau)|}$$

непрерывна, не убывает и $\lim\limits_{\|\mathbf{t}\|\to\infty} a(\|\mathbf{t}\|)=\infty$. Следовательно,

$$I=\int\limits_{\omega\leqslant\|\mathbf{t}\|\leqslant\lambda(n)} |f(\mathbf{t})|^n d\mathbf{t}\leqslant \int\limits_{\omega\leqslant\|\mathbf{t}\|\leqslant\lambda(n)} \left(1-\frac{1}{a(\|\mathbf{t}\|)}\right)^n d\mathbf{t}.$$

Возможны два случая: 1) $a(\|\mathbf{t}\|)\leqslant\sqrt{n}$ тогда, полагая $\lambda(n)=n$, находим

$$I\leqslant\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \frac{2^{\frac{k+1}{2}}\pi^{\frac{k}{2}}}{(k-2)!!} n^{k-1}=o(e^{-\frac{\sqrt{n}}{4}});$$

2) при $a(\|\mathbf{t}\|)>\sqrt{n}$

$$I\leqslant\left(1-\frac{1}{a(\lambda(n))}\right)^n \frac{2^{\frac{k+1}{2}}\pi^{\frac{k}{2}}}{(k-2)!!}\lambda^{k-1}(n).$$

Монотонная и непрерывная функция $a(\|\mathbf{t}\|)$ принимает все значения, которые больше $a(\omega)$, следовательно, для больших n функцию $\lambda(n)$ можно определить с помощью равенства $a\big(\lambda(n)\big)=\sqrt{n}$. Получаем $\lambda(n)<n$ и

$$I=o(e^{-\frac{\sqrt{n}}{4}}).$$

Лемма 2 доказана.

В доказательстве теоремы используем усеченные случайные векторы $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$:

$$\eta_j=(\eta_{1j}, \eta_{2j}, \quad \eta_{kj})=\begin{cases}\xi_j & \text{при } \|\xi_j\|\leqslant\sqrt{n},\\ 0 & \text{при } \|\xi_j\|>\sqrt{n}.\end{cases}$$

Обозначим: $\bar{f}(\mathbf{t})$ и $\bar{F}(\mathbf{x})$ — характеристическая функция и функция распределения случайного вектора η_j с ковариационной матрицей $\bar{V}$; $|\bar{V}|$ — определитель матрицы $\bar{V}$; $M\eta_j=(M\eta_{1j}, M\eta_{2j}, \ldots, M\eta_{kj})$ — вектор математических ожиданий; $\bar{F}_n(\mathbf{x})$ — функция распределения суммы

$$\mathbf{Z}_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}(\eta_j-M\eta_j).$$

Лемма 3 (см. [5]). *Если случайный вектор ξ_1 имеет конечные моменты третьего порядка, то при $v=v_1+v_2+\ldots+v_k\leqslant3$, $v_1, v_2, \ldots, v_k=0,1, \ldots, v$,*

$$M\eta_{1j}^{v_1}\eta_{2j}^{v_2}\quad\eta_{k_j}^{v_k}=M\xi_{1j}^{v_1}\xi_{2j}^{v_2}\quad\xi_{k_j}^{v_k}+o(n^{-\frac{3-v}{2}})$$

и при $v>3$

$$M\eta_{1j}^{v_1}\eta_{2j}^{v_2}\quad\eta_{kj}^{v_k}=o(n^{-\frac{v-3}{2}}).$$

Следствие. *Если ξ_1 имеет невырожденную ковариационную матрицу V, то существует константа n_0 такая, что для всех $n>n_0$ ковариационная матрица $\bar{V}$ будет невырождена. n_0 зависит от параметров ξ_1, но не зависит от n.*

Лемма 4 (см. [6]). *Если случайный вектор ξ_1 с невырожденной ковариационной матрицей V имеет конечные моменты s-того порядка ($s\geqslant 3$), то*

$$\left| \frac{\partial^r}{\partial t_m^r}\left[f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)-e^{-\frac{1}{2}tVt'}\left(1+\sum_{\nu=1}^{s-3}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\nu}P_\nu(it)\right)\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C(s,k)\beta_s(\|t\|^{s-r}+\|t\|^{3(s+3)})}{n^{\frac{s-2}{2}}}\, e^{-\frac{1}{4}tVt'}$$

для $r\leqslant s$; $m=1,\ 2,\ \ldots,\ k$ *и* $\|t\|\leqslant\frac{\lambda\sqrt{n}}{16ek^k}\beta_s^{-\frac{1}{s-1}}$. *Здесь* $\lambda=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant k}\lambda_j$, λ_j, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ k$ *— характеристические числа матрицы* V; $P_\nu(it)$ *— известные многочлены;* $\beta_s=\sum\limits_{j=1}^{k}M\|\xi_j\|^s$. $C(s,k)$ *зависит только от* s *и* k.

Доказательство теоремы. Сперва докажем утверждение теоремы для „усеченных" случайных векторов $\eta_1,\ \eta_2,\ \ldots,\ \eta_n$. Если $p_n(x)$ и $g_n(x)$ обозначают плотности функций $\bar F_n * Q_{2k+6}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

и

$$\left(\bar\Phi(x)+P_1(-\bar\Phi)(x)\right)*Q_{2k+6}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

то

$$\sup_{x\in R^k}\left|[\bar F_n(x)-\bar\Phi(x)-P_1(-\bar\Phi)(x)]*Q_{2k+6}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{R^k}|p_n(y)-g_n(y)|\,dy. \tag{1}$$

Здесь $\frac{1}{\varepsilon}=\lambda(n)\sqrt{n}$, функция $\lambda(n)$ определена в лемме 2; $\bar\Phi(x)$ — функция распределения нормального закона с параметрами $(0,\bar V)$; функцию $P_1(-\bar\Phi)(x)$ вычисляем по формуле ($_*$) после замены характеристик случайного вектора ξ_1 на соответствующие характеристики случайного вектора η_1.

По обобщенному неравенству Гельдера получаем

$$\int\limits_{R_k}|p_n(y)-g_n(y)|\,dy\leqslant\prod_{m=1}^{k}\left\{\int\limits_{R_k}(1+|y_m|^{2k+6})|p_n(y)-g_n(y)|^2dy\right\}^{\frac{1}{2k}}\times$$

$$\times\left\{\int\limits_{R_k}\prod_{j=1}^{k}(1+|y_j|^{2k+6})^{-\frac{1}{k}}\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

Отдельно оценим интегралы

$$I=\int\limits_{R_k}|p_n(y)-g_n(y)|^2dy \tag{3}$$

и

$$I_m=\int\limits_{R_k}|y_m|^{2k+6}|p_n(y)-g_n(y)|^2dy. \tag{4}$$

Из определения $p_n(\mathbf{y})$ и $g_n(\mathbf{y})$ вытекает

$$p_n(\mathbf{y}) - g_n(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \cdots \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-i(\mathbf{t},\, \mathbf{y})} \left\{ e^{-i(\mathbf{t},\, \sqrt{n}\, M\eta_1)} \bar{f}^n\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right) - \right.$$

$$\left. - e^{-\frac{1}{2}\mathbf{t} V \mathbf{t}'} \left(1 + \frac{i^3}{6\sqrt{n}} M(\mathbf{t},\ \eta_1 - M\eta_1)^3\right) \right\} \prod_{j=1}^{k} h_{2k+6}(\varepsilon t_j)\, d\mathbf{t}.$$

Теперь по многомерному равенству Парсеваля можем записать

$$I = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \cdots \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \left| \bar{f}^n\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right) e^{-i(\mathbf{t},\, \sqrt{n}\, M\eta_1)} - \right.$$

$$\left. - e \qquad \left(1 + \frac{i^3}{6\sqrt{n}} M(\mathbf{t},\ \eta_1 - M\eta_1)^3\right) \right|^2 d\mathbf{t}$$

и

$$I_m = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \cdots \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \left| \frac{\partial^{k+3}}{\partial t_m^{k+3}} \left\{ \left(e^{-i(\mathbf{t},\, \sqrt{n}\, M\eta_1)} \bar{f}^n\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right) - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - e^{-\frac{1}{2}\mathbf{t}\bar{V}\mathbf{t}'} \left(1 + \frac{i^3}{6\sqrt{n}} M(\mathbf{t},\ \eta_1 - M\eta_1)^3\right) \right] \prod_{j=1}^{k} h_{2k+6}(\varepsilon t_j) \right\} \right|^2 d\mathbf{t}.$$

Оценим интеграл I. В силу лемм 3 и 4 $I = 0(n^{-1})$ для всех $\|\mathbf{t}\| \leqslant (\bar{\lambda}\sqrt{n})/16\, ek^k \bar{\beta}_3$, где $\bar{\lambda}$ – минимальное характеристическое число матрицы $\bar{V}$; $\bar{\beta}_3 = \sum_{j=1}^{k} M|\eta_{1j} - M\eta_{1j}|^3$. Аналогичную оценку можно найти в [5].

Очевидно

$$\int_A \left| e^{-\frac{1}{2}\mathbf{t}\bar{V}\mathbf{t}'} \left(1 + \frac{i^3}{6\sqrt{n}} M(\mathbf{t},\ \eta_1 - M\eta_1)^3\right) \right|^2 d\mathbf{t} = o(n^{-1}), \tag{5}$$

где

$$A = \left\{ \mathbf{t} : -\frac{1}{\varepsilon} \leqslant t_1 \leqslant \frac{1}{\varepsilon}, \quad \ldots \quad -\frac{1}{\varepsilon} \leqslant t_k \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \right\} -$$

$$\{\mathbf{t} : \|\mathbf{t}\| \leqslant (\bar{\lambda}\sqrt{n})/16\, ek^k \bar{\beta}_3\}.$$

По определению случайного вектора η_1 имеем

$$\bar{f}(\mathbf{t}) = f(\mathbf{t}) + P\,\{\|\xi_1\| > \sqrt{n}\} - \int_{\|\mathbf{x}\| > \sqrt{n}} e^{i(\mathbf{t},\, \mathbf{x})} dF(\mathbf{x}).$$

Следовательно,

$$|\bar{f}(\mathbf{t})| \leqslant |f(\mathbf{t})| + \frac{2M\|\xi_1\|^2}{n}.$$

Повторив доказательство леммы 1, получаем

$$\int\limits_A \left| \bar{f}\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right) \right|^n dt \leqslant n^{\frac{k}{2}} \int\limits_{\frac{A}{\sqrt{n}}} \left(f \mid (\mathbf{t}) \mid + \frac{2M \| \xi_1 \|^2}{n} \right)^n d\mathbf{t} = o(n^{-1}). \qquad (6)$$

Здесь $\frac{A}{\sqrt{n}} = \left\{ \frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}} : \mathbf{t} \in A \right\}$.

Из (5) и (6) вытекает, что для всех $\mathbf{t} \in \left\{ \mathbf{t} : -\frac{1}{\varepsilon} \leqslant t_1 \leqslant \frac{1}{\varepsilon}, \quad -\frac{1}{\varepsilon} \leqslant \leqslant t_k \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \right\}$

$$I = o(n^{-1}). \qquad (7)$$

Аналогично оцениваются интегралы I_m, $m = 1, 2, \ldots, k$ (см. [5]):

$$I_m = o(n^{-1}). \qquad (8)$$

Мы доказали (см. (1–4) и (7, 8)), что

$$\sup_{\mathbf{x} \in R^k} \left| \left(\bar{F}_n(\mathbf{x}) - \bar{\Phi}(\mathbf{x}) - P_1(-\bar{\Phi})(\mathbf{x}) \right) * Q_{2k+6}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) \right| = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \qquad (9)$$

Так как (см. [5])

$$|P\{\mathbf{S}_n \in B\} - P\{\mathbf{Z}_n \in B - \sqrt{n} M \eta_1\}| \leqslant nP\{\|\xi_1\| > \sqrt{n}\},$$

где B — борелевское множество, $P\{\ldots\}$ — вероятность указанного в скобках события, и

$$\sup_{\mathbf{x} \in R^k} \left| \Phi(\mathbf{x}) + \frac{1}{\sqrt{n}} P_1(-\Phi)(\mathbf{x}) - \bar{\Phi}(\mathbf{x}) - P_1(-\bar{\Phi})(\mathbf{x}) \frac{1}{\sqrt{n}} \right| = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

то из соотношения (9) вытекает утверждение теоремы.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
21.X.1969

Литература

1. C.-G. Esseen, Fourier analysis of distribution functions, A mathematical study of the Laplace-Gaussian law, Acta Math., **77** (1945), 1–125.
2. A. Bikelis, Remainder terms in multidimensional limit teorems, Doklady, **168**, N 4 (1966), 705–707.
3. А. Бикялис, О многомерных интегральных предельных теоремах, Лит. матем. сб., **VI**, № 4 (1966), 635–636 (информация).
4. H. Bergström, On the central limit theorem in R_k, $k > 1$, Skand. Aktuartiedskr., **28** (1945), 106–127.
5. А. Бикялис, Асимптотические разложения для плотностей и распределений сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов, Лит. матем. сб., **VIII**, № 3 (1968), 405–421.
6. А. Бикялис, О многомерных характеристических функциях, Лит. сб., **VIII**, № 1 (1968), 21–39.

NEPRIKLAUSOMŲ VIENODAI PASISKIRSČIUSIŲ NERĖTINIŲ ATSITIKTINIŲ VEKTORIŲ SUMŲ PASISKIRSTYMO FUNKCIJŲ ASIMPTOTINIAI IŠDĖSTYMAI

A. BIKELIS

(*Reziumė*)

Darbe įrodyta šitokia teorema.

Teorema. *Sakykime,* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *— seka vienodai pasiskirsčiusių nerėtinių atsitiktinių vektorių, kurie turi lygias nuliui matematines viltis, neišsigimusią kovariacijų matricą ir baigtinius trečios eilės momentus, tuomet tolygiai visiems* $\mathbf{x} \in R^k$

$$F_n(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}) + \frac{1}{\sqrt{n}} P_1(-\Phi)(\mathbf{x}) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Čia $F_n(x)$ *yra sumos* $\mathbf{S}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \xi_j$ *pasiskirstymo funkcija, o* $\Phi(\mathbf{x})$ ir $P_1(-\Phi)(\mathbf{x})$ *— įprastiniai žymėjimai.*

ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF THE DISTRIBUTION FUNCTION OF THE SUMS OF INDEPENDENT IDENTICALLY DISTRIBUTED NON-LATTICE RANDOM VECTORS

A. BIKELIS

(*Summary*)

In this paper it is proved the following

Theorem. *Let* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *be a sequence of identically distributed non-lattice random vectors with zero means, nonsingular covariance matrix* V *and finite third moments. Then uniformly for all* $\mathbf{x} \in R^k$

$$F_n(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}) + \frac{1}{\sqrt{n}} P_1(-\Phi)(\mathbf{x}) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

where $F_n(\mathbf{x})$ *is the probability function of the sum*

$$\mathbf{S}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \xi_j,$$

$\Phi(\mathbf{x})$ *and* $P_1(-\Phi)(\mathbf{x})$ *are used in the usual meaning.*