1970

УДК – 519. 21

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ПРИ СХОДИМОСТИ К УСТОЙЧИВОМУ ЗАКОНУ В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

И. И. БАНИС

В работе [1] дана оценка скорости сходимости в случае нормального закона для многомерных одинаково распределенных случайных величин. Эта оценка получена для выпуклых борелевских множеств.

В работе [2] дана скорость сходимости в центральной предельной теореме для выпуклых множеств.

В настоящей работе получена оценка скорости сходимости в интегральной предельной теореме в случае предельного устойчивого закона с показателем α, $0<\alpha<2$. Оценка дается для выпуклых борелевских множеств.

Возьмем последовательность

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n, \tag{1}$$

независимых одинаково распределенных k-мерных случайных величин.

Обозначим псевдомомент и абсолютный псевдомомент порядка $r=1+[\alpha]$ через $\mu_{ijs}(r)$ и $\nu(r)$,

$$\mu_{ijs}(r)=\int\limits_{R^k} x_i^{k_i} x_j^{k_j} x_s^{k_s}\, \Omega(dx), \tag{2}$$

$$k_i+k_j+k_s=r;\ i\geqslant 0,\ j\geqslant 0,\ s\geqslant 0;\ i,\ j,\ s=1, \qquad k,$$

$$\nu(r)=\int\limits_{R^k} |x|^r\, |\Omega(dx)|, \tag{3}$$

где

$$\Omega=P-G, \tag{4}$$

P – распределение ξ_i, G – распределение симметрического устойчивого закона с показателем α, $0<\alpha<2$. При этом полагаем, что

$$\mu(0)= \qquad =\mu(r-1)=0. \tag{5}$$

Пусть предельный устойчивый закон имеет характеристическую функцию

$$g(t)=e^{-|t|^\alpha}, \tag{6}$$

где

$$|t|=\{t_1^2+\cdots+t_k^2\}^{\frac{1}{2}}$$

Теорема 1. *Если существует* $\nu(r)$, *то для последовательности* (1) *и выпуклых борелевских множеств получаются следующие оценки: при* $\nu(r)\geqslant 1$

$$|P_n(B)-G(B)|\leqslant \frac{3[\nu(r)]^{\frac{1}{r-\alpha}}}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}}C_3\Big(k,\ \alpha,\ v(B)\Big) \tag{7}$$

и при $\nu(r)<1$

$$|P_n(B)-G(B)|\leqslant \frac{3}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}}C_3\Big(k,\ \alpha,\ v(B)\Big), \tag{8}$$

где P_n — *распределение суммы* S_n, $S_n=n^{-\frac{1}{\alpha}}(\xi_1+\quad+\xi_n)$ *и* $v(B)$ — *объем множества* B.

Для доказательства теоремы необходимы следующие леммы:

Лемма 1. *Если* $p(x)\leqslant p_1(\rho)$, *где* $|x|=\rho$ *и* $p_1(\rho)$ *дифференцируема,* $p_1(\rho)\,\rho^{k-1}\to 0$ *при* $\rho\to\infty$ *и*

$$\int_0^\infty |p_1'(\rho)|\,\rho^{k-1}\,d\rho=L, \tag{9}$$

где L — *конечная константа, то для каждого борелевского множества* $B\in R^k$

$$\int_{\overset{\circ}{B}} p(x)\,ds\leqslant \omega_k L, \tag{10}$$

где

$$\omega_k=S(U)=2\pi^{\frac{k}{2}}\Big/\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \tag{11}$$

и $\overset{\circ}{B}$ — *множество точек границы* B *и его замыкания.*

Лемма 2. *При* $|t|\leqslant T$ *имеет место неравенство*

$$|\bar{f}_n(t)-g(t)|\leqslant \frac{6\nu(r)\,|t|^r e^{-\frac{1}{2}|t|^\alpha}}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}}, \tag{12}$$

где при $\nu(r)\geqslant 1$

$$T=\frac{n^{\frac{1}{\alpha}}}{[12\nu(r)]^{\frac{1}{r-\alpha}}} \tag{13}$$

и при $\nu(r)<1$

$$T=\frac{n^{\frac{1}{\alpha}}}{12^{\frac{1}{r-\alpha}}} \tag{14}$$

$\bar{f}_n(t)$ — *характеристическая функция суммы* S_n,

$$S_n=n^{-\frac{1}{\alpha}}(\xi_1+\cdots+\xi_n).$$

Доказательство леммы 1 дано в работе [1]. Остается убедиться, что плотность устойчивого закона с показателем α, $0<\alpha<2$ удовлетворяет всем требованиям леммы 1.

Покажем, что $p_1(\rho)\,\rho^{k-1}\to 0$ при $\rho\to\infty$. Заметим, что при достаточно больших ρ

$$p(x)\leqslant \frac{C(k)}{\rho^{\alpha+k}} \tag{15}$$

и

$$\frac{C(k)}{\rho^{\alpha+k}}\cdot \rho^{k-1}\to 0 \quad \text{при} \quad \rho\to\infty.$$

Для доказательства сходимости интеграла (9) используем асимптотику плотностей при $\rho\to 0$ и $\rho\to\infty$, которые получены в работе [3] и [4]

$$p(x)=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{\rho^{2m}\,\Gamma\left(\frac{2m+k}{\alpha}\right)}{\Gamma(m+1)\,\Gamma\left(m+\frac{k}{2}\right)2^{2m}}+O(\rho^{n+1}) \tag{16}$$

при $\rho\to 0$, и

$$p(x)=\sum_{m=1}^{n}(-1)^{m+1}\frac{\sin\frac{\alpha m\pi}{2}\cdot 2^{\alpha m+\frac{k}{2}-1}\,\Gamma\left(\frac{\alpha m+k}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha m+2}{\alpha}\right)}{m!\,\pi^{1+\frac{k}{2}}\cdot 2^{\frac{k}{2}}\cdot\rho^{\alpha m+k-1}}+$$

$$+O\left(\frac{1}{\rho^{\alpha(n+1)+k}}\right) \tag{17}$$

при $\rho\to\infty$.

Возьмем интеграл

$$\int_0^\infty p(\rho)\,\rho^{k-2}\,d\rho \tag{18}$$

и покажем, что он имеет конечное значение. Сходимость интеграла (18) следует из (16) и (17).

Интегрируя (18) по частям, получаем:

$$\int_0^\infty p(\rho)\,\rho^{k-2}\,d\rho=\frac{1}{k-1}\,p(\rho)\,\rho^{k-1}\Big|_0^\infty+\frac{1}{k-1}\int_0^\infty |p'(\rho)|\,\rho^{k-1}\,d\rho. \tag{19}$$

Заметим, что из (16), (17) и сходимости интеграла (18) следует следующее неравенство:

$$\int_0^\infty |p'(\rho)|\,\rho^{k-1}\,d\rho\leqslant C_1(k,\ \alpha). \tag{20}$$

Доказательство леммы 2. Обозначим

$$f_n(t)=f^n\left(\frac{t}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right) \tag{21}$$

и представим в следующем виде:

$$\tilde{f}_n(t)=\left[g\left(\frac{t}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)+\omega\left(\frac{t}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\right]^n. \tag{22}$$

Оценим разность

$$|\tilde{f}_n(t)-g(t)|=g(t)\left|\left[1+\frac{\omega\left(\frac{t}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)}{g\left(\frac{t}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)}\right]^n-1\right|; \tag{23}$$

для этого эту разность запишем таким образом:

$$|\tilde{f}_n(t)-g(t)|=g(t)\left|e^{n\ln\left[1+\frac{\omega\left(\frac{t}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)}{g\left(\frac{t}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)}\right]}-1\right| \tag{24}$$

Воспользуемся неравенством

$$|e^x-1|\leqslant|x|\,e^{|x|}. \tag{25}$$

Тогда, используя (25), получаем:

$$\left|e^{n\ln\left[1+\frac{\omega\left(\frac{t}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)}{g\left(\frac{t}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)}\right]}-1\right|\leqslant e^{n\left|\ln\left[1+\frac{\omega\left(\frac{t}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)}{g\left(\frac{t}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)}\right]\right|}\cdot n\left|\ln\left[1+\frac{\omega\left(\frac{t}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)}{g\left(\frac{t}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)}\right]\right|. \tag{26}$$

Покажем, что

$$\frac{\omega\left(\frac{t}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)}{g\left(\frac{t}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)}<\frac{1}{2} \tag{27}$$

Чтобы получить оценку (27), воспользуемся неравенством

$$\left|e^{i(t,x)}-\sum_{m=0}^{n}\frac{[i(t,x)]^m}{m!}\right|\leqslant\min\left\{\frac{2|(t,x)|^n}{n!}.\ \frac{|(t,x)|^{n+1}}{(n+1)!}\right\}. \tag{28}$$

тогда, пользуясь (28), получаем оценку

$$\left|\omega\left(\frac{t}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\right|\leqslant\frac{|t|^r\,\nu(r)}{n^{\frac{r}{\alpha}}} \tag{29}$$

Поскольку

$$\left| g\left(\frac{t}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\right|^{-1} = e^{|t|^{\alpha}\cdot n^{-1}} \tag{30}$$

то из (29), (30) и (13) следует (27).

При (13)

$$\ln\left[1+\frac{\omega\left(\frac{t}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)}{g\left(\frac{t}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)}\right] \tag{31}$$

можем разложить в ряд:

$$\ln\left[1+\frac{\omega\left(\frac{t}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)}{g\left(\frac{t}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)}\right] = \frac{\omega\left(\frac{t}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)}{g\left(\frac{t}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)} - \frac{1}{2}\left[\frac{\omega\left(\frac{t}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)}{g\left(\frac{t}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)}\right]^2 \pm \cdots \tag{32}$$

Тогда получаем

$$\left|\ln\left[1+\frac{\omega\left(\frac{t}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)}{g\left(\frac{t}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)}\right]\right| \leqslant \frac{6|t|^{r}\nu(r)}{n^{\frac{r}{\alpha}}} \tag{33}$$

Такую же оценку для (31) получаем и в случае (14).

Приступим к окончательной оценке разности. Из (26) и (33) следует, что

$$|\bar{f}_n(t)-g(t)| \leqslant 6n^{\frac{\alpha-r}{\alpha}}|t|^{r}\nu(r)\,e^{-|t|^{\alpha}+6n^{\frac{\alpha-r}{\alpha}}|t|^{r}\nu(r)}. \tag{34}$$

Заметим, что в случае (13)

$$1-\frac{12|t|^{r-\alpha}\nu(r)}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}} \geqslant 0. \tag{35}$$

Тогда при (13) следует:

$$|\bar{f}_n(t)-g(t)| \leqslant \frac{6\nu(r)}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}}|t|^{r}e^{-\frac{1}{2}|t|^{\alpha}} \tag{36}$$

при (14) также имеет место (36).

Доказательство теоремы. Воспользуемся неравенством

$$|P_n(B)-G(B)|\leqslant 2\sup_{J\in R^k}\int\limits_{(\overset{\circ}{B})_{\frac{3a}{T}}} dG(x+y)+$$

$$+3\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\left[2^{-m}d_T(B^m)+2^{-m}d_T(B^{-m})\right]\right\} \tag{37}$$

где

$$d_T(B)=\sup_{J\in R^k}|\Omega_T(B+y)|. \tag{38}$$

$\Omega_T(x)$ выражается следующим образом:

$$\Omega_T(x)=\int\limits_{R^k}\Theta(y)\,\Omega\left(x+\frac{y}{T}\right)dy, \tag{39}$$

где $\Theta(x)$, $x\in R^k$ – положительная интегрируемая функция, преобразование Фурье которой $q(t)$. Для каждого борелевского множества B

$$\Omega_T(B)=\int\limits_B d\Omega_T(x)=\int\limits_{R^k}\Theta(y)\,\Omega\left(B+\frac{y}{T}\right)dy, \tag{40}$$

где $B+\frac{y}{T}$ — параллельный перенос множества B.

$\Omega_T(B)$ при помощи преобразования Фурье выражается следующим образом:

$$\Omega_T(B)=\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{R^k}v_B(-t)\,q\left(-\frac{t}{T}\right)\omega(t)\,dt, \tag{41}$$

где

$$v_B(-t)=\int\limits_B e^{-i(t,x)}\,dx; \tag{42}$$

$$\omega(t)=\bar f_n(t)-g(t); \tag{43}$$

$q(t)$ удовлетворяет таким условиям:

$$0\leqslant q(t)\leqslant q(0)=1,\quad q(t)=0 \text{ при } |t|\geqslant 1.$$

Оценим первое слагаемое в (37). Для этого воспользуемся леммой 1. Из нее получаем:

$$\sup_{y\in R^k}\int\limits_{(\overset{\circ}{B})_{\frac{3a}{T}}} dG(x+y)\leqslant\omega_k\,C_1(k,\alpha)\cdot\frac{3a}{T}, \tag{44}$$

где a — любое число больше 1.

Оценим второе слагаемое в (37). Для этого воспользуемся (41) и получим:

$$|\Omega_T(B)| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^k} \int\limits_{R^k} |v_B(-t)| \left| q\left(-\frac{t}{T}\right)\right| |\omega(t)| \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{6v(B)\,\nu(r)}{(2\pi)^k n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}} \int\limits_{-T}^{T} |t|^r e^{-\frac{1}{2}|t|^\alpha} dt \leqslant \frac{6v(B)\,\nu(r)\,C_2}{(2\pi)^k n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}} \tag{45}$$

где $v(B)$ — объем множества B.

В конечном результате получаем при (13)

$$|P_n(B) - G(B)| \leqslant \frac{3[\nu(r)]^{\frac{1}{r-\alpha}}}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}} [\omega_k C_1(k, \alpha)\, a\, 12^{\frac{1}{r-\alpha}} +$$

$$+ 2v(B)[\nu(r)]^{\frac{r-\alpha-1}{r-\alpha}} C_2 (2\pi)^{-k}] \tag{46}$$

и при (14)

$$|P_n(B) - G(B)| \leqslant \frac{3}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}} [\omega_k C_1(k, \alpha)\, a\, 12^{\frac{1}{r-\alpha}} +$$

$$+ 2v(B)\,\nu(r)\, C_2 (2\pi)^{-k}]. \tag{47}$$

Обозначим

$$C_3\Big((k, \alpha, v(B)\Big) = \max\Big\{ [\omega_k C_1(k, \alpha)\, a\, 12^{\frac{1}{r-\alpha}} +$$

$$+ 2v(B)[\nu(r)]^{\frac{r-\alpha-1}{r-\alpha}} C_2(2\pi)^{-k}], [\omega_k C_1(k, \alpha)\, a\, 12^{\frac{1}{r-\alpha}} +$$

$$+ 2v(B)\,\nu(r)\, C_2(2\pi)^{-k}] \Big\}$$

Теорема доказана.

Вильнюсский Государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
8.XII.1969

Литература

1. By Bengt von Bahr, Multi — dimensional integral limit theorem, Arkiv för matematik, **VII**, 6 (1966), 71—88.
2. С. М. Садикова, О многомерной центральной предельной теореме, Теория вероят. и ее примен., XIII, 1 (1968), 164—169.
3. Н. Калинаускайте, Некоторые разложения плотностей многомерных устойчивых распределений с показателем $\alpha > 1$, Лит. матем. сб., **X**, № 3 (1970), 491—496.
4. Н. Калинаускайте, Некоторые разложения многомерных симметрических устойчивых плотностей, Лит. матем. сб, **X**. № 4 (1970) 727—732.
5. В. М. Золотарев, О близости распределений двух сумм независимых случайных величин, Теория вероят. и ее примен., **X**, 3 (1965), 519—526.
6. А. Миталаускас, Асимптотическое разложение для независимых случайных величин в случае устойчивого предельного распределения, Лит. матем. сб., **III**, № 1 (1963), 189—193.

DAUGIAMATĖ INTEGRALINĖ TEOREMA STABILAUS RIBINIO DĖSNIO ATVEJU

J. BANYS

(*Reziumė*)

Nagrinėjama k-mačių nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \tag{1}$$

Jeigu egzistuoja $\nu(r)$, $r = 1 + [\alpha]$, $0 < \alpha < 2$; čia

$$\nu(r) = \int\limits_{R^k} |x|^r |d(P-G)|, \tag{2}$$

P – pasiskirstymas ξ_i, G – stabilaus dėsnio, kurio rodiklis α, $0 < \alpha < 2$, pasiskirstymas.

Gautas įvertinimas iškilioms Borelio aibėms

$$|P_n(B) - G(B)| \leqslant \frac{3[\nu(r)}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}} C_3\Big(k, \alpha, v(B)\Big),$$

kai $\nu(r) \geqslant 1$, ir

$$|P_n(B) - G(B)| \leqslant \frac{3}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}} C_3\Big(k, \alpha, v(B)\Big),$$

kai $\nu(r) < 1$; čia P_n – pasiskirstymas $S_n = n^{-\frac{1}{\alpha}} (\xi_1 + \ldots + \xi_n)$, $v(B)$ – tūris aibės B.

DER INTEGRALE MEHRDIMENSIONALE GRENZWERTSATZ FÜR DIE KONVERGENZ GEGEN DAS STABILE GRENZGESETZ

J. BANYS

(*Zusammenfassung*)

Es sei

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi = (\xi_{i1}, \quad \xi_{ik}) \tag{1}$$

die Folge der unabhängigen zufallsveränderlichen Grössen mit der gleichen Verteilung. Existiert

$$\nu(r) = \int\limits_{R^k} |x|^r |d(P-G)|, \quad r = 1 + [\alpha], \tag{2}$$

wo P ist eine Verteilung ξ_i, G eine stabile Verteilung mit dem Index α, $0 < \alpha < 2$. Im Artikel wird die Schätzung für konvexe Borelische Mengen

$$|P_n(B) - G(B)| \leqslant \frac{3[\nu(r)]^{\frac{1}{r-\alpha}}}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}} C_3\Big(k, \alpha, v(B)\Big),$$

bei $\nu(r) \geqslant 1$ und

$$|P_n(B) - G(B)| \leqslant \frac{3}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}} C_3\Big(k, \alpha, v(B)\Big)$$

bei $\nu(r) < 1$, wo P_n die Verteilung $S_n = n^{-\frac{1}{\alpha}} (\xi_1 + \ldots + \xi_n)$ und $v(B)$ der Umfang B ist, dargestellt.