X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 3
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

1970

ХРОНИКА ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО СЕМИНАРА

(Вильнюсский Государственный педагогический институт)

6.I.1969, Обсуждение диссертации Ю. И. Шинкунаса *„О геометрии некоторых пространств опорных элементов"*.

13.I.1969, К. И. Гринцевичюс, *„О геометрии неголономного комплекса прямых трехмерного проективного пространства"*.

20.I.1969, Обсуждение диссертации А. П. Урбонаса *„О дифференциальных инвариантах и автоморфизмах пространств опорных элементов"*.

27.I.1969, И. Х. Медведевайте, *„О некоторых внутренних тензорных структурах касательного пучка пространства гиперплоских элементов"*.

Если на дифференцируемом многообразии задано тензорное поле типа $\binom{p}{q}$, то будем говорить, что на многообразии задана тензорная структура.

Рассматривается касательный пучок $T_{2n}(\mathfrak{M}_n)$ пространства гиперплоских элементов $\mathfrak{M}_n$, т. е. множество всех касательных векторов многообразия $\mathfrak{M}_n$. Оказывается, что если на многообразии $\mathfrak{M}_n$ задан объект линейной связности Γ_{ij} $(i, j=(1, 2, \ldots, n)$, то в касательном пучке $T_{2n}(\mathfrak{M}_n)$ индуцируются семейства тензорных структур следующего типа $(A, B= =1, 2, \ldots, 2n)$:

$$(1)\quad T^A_C T^C_B = \lambda T^A_B, \qquad (2)\quad T^A_C T^C_D T^D_B + \lambda T^A_B = 0 \quad (\lambda = \pm 1, 0).$$

Найдены частные решения этих систем. Приведем некоторые примеры таких решений Например, одно из возможных решений системы (1) имеет вид:

$$\begin{aligned} &T^i_j = \pm \delta^i_j, \\ &T^i_{n+j} = 0, \\ &T^{n+i}_j = \pm 2\Gamma_{ij}, \\ &T^{n+i}_{n+j} = \pm \delta^i_j, \end{aligned} \tag{3}$$

а системы (2) — следующий вид:

$$\begin{aligned} &T^i_j = \pm \delta^i_j, \\ &T^i_{n+j} = 0 \\ &T^{n+i}_j = \pm \Gamma_{ij}, \\ &T^{n+i}_{n+j} = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Получены необходимые и достаточные условия для полной интегрируемости тензорных структур (1) и (2). Например, структуры

$$T^A_B T^B_C = T^A_C \quad \text{и} \quad T^A_B T^B_D T^D_C - T^A_C = 0$$

при указанных решениях (3) и (4) вполне интегрируемы тогда и только тогда, когда линейная связность пространства $\mathfrak{M}_n$ является плоской.

5.II.1969, Ю. Шинкунас, *„О дифференциальных инвариантах пространств опорных линеаров"* (печатается в Лит. матем. сб.).

12.II.1969, Обсуждение диссертации Р. Восилюса, *„К теории инвариантных связностей в однородных пространствах"*.

15.II.1969, Обсуждение диссертации Р. Хацкевич (Минск) „*К теории линий и поверхностей в четырехмерном аффинном пространстве*".

26.II.1969, З. Лупейкис, „*О геометрии некоторых квазилинейных систем дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными*".

12.III.1969, А. Урбонас, „*О дифференциальных инвариантах пространств опорных элементов*"

19.III.1969, А. Урбонас, „*О дифференциальных инвариантах пространств опрных элементов.*"

26.II.1969, З. Лупейкис, „*О геометрии квазилинейных систем дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными*".

2.IV.1969, А. Урбонас, „*О движениях в пространствах гиперплоскостных элементов*".

9.IV.1969, В. Близникас, „*О внутренних структурах пространств линейных элементов*".

16.IV.1969, В. С. Лисняк (Киев), „*Некоторые вопросы геометрии неголономных гиперповерхностей и поверхностей*".

23.IV.1969, С. Григелионис, „*О геометрии неголономного комплекса прямых четырехмерного проективного пространства*".

8.V.1969, Обсуждение диссертации А. Жабик (Минск) „*О парах семейств образов в четырехмерном проективном пространстве*".

14.V.1969, В. Близникас, „*Некоторые вопросы неголономной геометрии*".

Пусть $Gr(n, m)$ — многообразие Грассмана проективного пространства P_n и $H^{(s)}(n, m, r)$ ($s=1, 2, \ldots, p$) фундаментальный дифференциально-геометрический объект s-го порядка семейства $Gr(n, m, r)$, т. е. r-параметрического многообразия m-мерных плоскостей $\left(1 \leqslant r \leqslant (m+1)(n-m),\ m \leqslant n-1\right)$. Очевидно, что

$$H^{(1)} \subset H^{(2)} \subset \ldots \subset H^{(s)}$$

и для невырожденного семейства $Gr(n, m, r)$ всегда существует такое число ρ (арифметический инвариант семейства), что фундаментальный дифференциально-геометрический объект $H^{(\rho)}$ является полным объектом. В этом случае основной дифференциально-геометрический объект $H(n, m, r)$ семейства $Gr(n, m, r)$ является подобъектом объекта $H^{(\rho)}$

Определение. Если на многообразии Грассмана $Gr(n, m)$ задано поле дифференциально-геометрического объекта $H^{(s)}(n, m, r)$ $(s<\rho)$, то многообразие Грассмана $Gr(n, m)$ будем называть неголономным многобразием s-го порядка $NG_r^{(s)}(n, m, r,)$ типа $Gr(n, m, r)$.

Определение неголономного многообразия первого порядка дано в [1].

Пусть $h^{(s)}(n, m, r)$ нетривиальный подобъект объекта $H^{(s)}(n, m, r)$. Тогда можно ввести следующее определение.

Определение. Если на многообразии Грассмана $Gr(n, m)$ задано поле дифференциально-геометрического объекта $h^{(s)}(n, m, r)$, то многообразие Грассмана $Gr(n, m)$ будем называть частично неголономным многообразием s-го порядка $NG_r^{(s)}(n, m, r, h)$ типа $(s<\rho)$

$$\{Gr(n, m, r),\ h^{(s)} \subset H^{(s)}\}$$

Заметим, что геометрия невырожденной неголономной линейчатой поверхности $NG_r^{(1)}$ (3, 1, 1) эквивалентна геометрии неголономного линейчатого комплекса $NGr_r^{(1)}$ (3, 1, 3). Это можно объяснить и тем, что „касательные пространства" линейчатой поверхности и „касательные пространства" комплекса прямых имеют одинаковую структуру (такие ситуации возможны в тех случаях, когда $n=2m+1$).

Комплекс коррелятивных элементов [2] является примером частично неголономного линейчатого многообразия.

Пусть мы имеем конечную систему алгебрических фигур $F_1, F_2,\ \ F_p$ многомерного проективного пространства, объединение стационарных подгрупп $G_1, G_2, \ldots, G_p$, которой является нетривиальной подгруппой проективной группы пространства. Систему фигур $F_1, F_2, \ldots, F_p$ будем называть *букетом* $B(F_1,\ \ F_p)$ пространства P_n (флаг является частным случаем букета).

Определене. Множество букетов $B(F_1, \ldots, F_p)$ проективного пространства P_n будем называть *обобщенным многообразием Грассмана* $Gr(n, F_1, \ldots F_p)$.

Геометрия подмногообразий некоторых конкретных обобщенных многообразий Грассмана $Gr(n, F_1, \ldots, F_p)$ рассматривалась в работах В. С. Малаховского и в работах румынских геометров. Пусть $H^{(s)}(F, r)$ фундаментальный дифференциально-геометрический объект r-параметрического подмногообразия $Gr(n, F, r)$, обобщенного многообразия Грассмана $Gr(n, F_1, \ldots, F_p)$ $\left(1 \leqslant r < \dim Gr(n, F_1, \ldots, F_p)\right)$.

Определение. Если на обобщенном многообразии Грассмана $Gr(n, F_1, \ldots, F_p)$ задано поле дифференциально-геометрического объекта $H^{(s)}(F, r)$ ($s < \delta$ — порядок полного объекта), то обобщенное многообразие Грассмана $Gr(n, F_1, \ldots, F_p)$ будем называть неголономным многообразием s-го порядка $NGr^{(s)}(n, F)$ типа $Gr(n, F, r)$.

Приведены многочисленные примеры таких многообразий. Доказано, что геометрия неголономных многообразий эквивалентна геометрии секущих поверхностей расслоенных пространств.

Литература

1. В. Близникас, К. Гринцевичюс, О неголономной линейчатой геометрии, Тезисы докладов III Прибалтийской геом. конф. (Паланга), 1968, 21—25.
2. К. Гринцевичюс, О комплексе коррелятивных элементов, Лит. матем. сб., IV, № 3, 1964, 329—335.

3.IX.1969, Р. Восилюс, *„Об одном классе инвариантных римановых связностей на группе Ли"*, Лит. матем. сб., X, № 4 (1970).

10.IX.1969, З. Лупейкис, *„О геометрии квазилинейных систем дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными"*.

Рассматривается геометрия квазилинейной системы дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными $S^{(2)r}_{n,m}$ (r — число уравнений системы, n — число неизвестных функций, m — число независимых переменных), не разрешенной относительно старших производных и допускающей группу преобразований неизвестных функций $x^{i'} = x^{i'}(x^j, u^\alpha)$ и независимых переменных $u^{\alpha'} = u^{\alpha'}(u^\beta)$.

Под геометрией рассматриваемой системы дифференциальных уравнений $S^{(2)r}_{n,m}$ понимается геометрия пространства струй первого порядка V_{n+m+nm} с фундаментальным дифференциально-геометрическим объектом $(h_i^{a\alpha\beta}, b^a)$ $(a, \ldots = 1, 2, \ldots, r;\ i, j, \ldots = 1, 2, \ldots, n;$ $\alpha, \beta, \ldots = 1, 2, \ldots, m)$, компонентами которого являются коэффициенты данной системы дифференциальных уравнений. Исследования ведутся теоретико-групповым методом Г. Ф. Лаптева.

Оказывается, что структурные уравнения пространства V_{n+m+nm} имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i + \Theta^\alpha \wedge \omega_\alpha^i, \\
&D\Theta^\alpha = \Theta^\beta \wedge \Theta_\beta^\alpha, \\
&D\Theta_\alpha^i = -\Theta_\beta^i \wedge \Theta_\alpha^\beta + \Theta_\alpha^k \wedge \omega_k^i + \omega^l \wedge \Phi_{\alpha l}^i + \Theta^\gamma \wedge \Phi_{\alpha\gamma}^i,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\Phi_{\alpha l}^i = p_\alpha^k \omega_{kl}^i + \omega_{kl}^i, \\
&\Phi_{\alpha\gamma}^i = p_\alpha^k \omega_{k\gamma}^i + \omega_{\alpha\gamma}^i - p_\beta^i \Theta_{\alpha\gamma}^\beta,
\end{aligned}
$$

а локальные координаты точки $(x^i, u^\alpha, p_\alpha^i)$ пространства V_{n+m+nm} являются первыми интегралами вполне интегрируемой системы дифференциальных уравнений

$$
\omega^i = 0, \qquad \Theta^\alpha = 0, \qquad \Theta_\alpha^i \equiv dp_\alpha^i + p_\alpha^k \omega_k^i - p_\beta^i \Theta_\alpha^\beta + \omega_\alpha^i = 0.
$$

Аффинная связность рассматриваемого пространства, соответствующая формам

$$
\tilde{\omega}_j^i = \omega_j^i + \Gamma_{jk}^i \omega^k + C_{j\alpha}^i \Theta^\alpha, \tag{2}
$$

будет определена тогда и только тогда, когда на V_{n+m+nm} заданы объекты следующей структуры:

$$\nabla \Gamma^i_{jk} - \omega^i_{jk} \equiv 0, \qquad (mod\ \omega^i, \Theta^\alpha, \Theta^i_\alpha)$$

$$\Delta C^i_{j\alpha} - \Gamma^i_{jk}\,\omega^k_\alpha - \omega^i_{j\alpha} \equiv 0,$$

где

$$\nabla \Gamma^i_{jk} \equiv d\Gamma^i_{jk} + \Gamma^l_{jk}\,\omega^i_l - \Gamma^i_{lk}\,\omega^l_j - \Gamma^i_{jl}\,\omega^l_k .$$

Аналогично может быть определена связность, соответствующая формам

$$\bar{\Theta}^i_\alpha = \Theta^i_\alpha + \Gamma^i_{j\alpha}\,\omega^j + C^i_{\alpha\gamma}\,\Theta^\gamma$$

и др.

Для некоторых классов систем дифференциальных уравнений рассматриваемого типа существуют внутренние связности, т. е. компоненты этих связностей выражаются через компоненты фундаментального дифференциально-геометрического объекта и его дифференциальные продолжения.

Отдельно рассмотрены случаи:

$$1)\ r=1,\quad n\leqslant\frac{m(m+1)}{2}\,;\qquad 2)\ n=\frac{rm(m+1)}{2}\,;$$

$$3)\ rn=\frac{m(m+1)}{2}\quad \text{и}\quad 4)\ r=\frac{nm(m+1)}{2}$$

Оказывается, что для всех этих случаев существуют объекты аффинных связностей, соответствующие формам (2), охватываемые вторым дифференциальным продолжением фундаментального оъекта $(h_i^{\alpha\alpha\beta},\ b^\alpha)$.

17.IX.1969, И. Близникене, *„О геометрии полунеголономной конгруэнции прямых трехмерного проективного пространства"*.

24.IX.1969, А. Урбонас, *„О максимально подвижных пространствах гиперплоскостных элементов"*.

1.X.1969, К. Гринцевичюс, *„О геометрии неголономной поверхности трехмерного проективного пространства"*

8.X.1969, Ю. Шинкунас, *„О некоторых классах пространств опорных линеаров финслеровой структуры"*.

15.X.1969, Р. Восилюс, *„О некоторых связностях однородных пространств"*.

22.X.1969, Я. Стайшене, *„О геометрии неголономного комплекса прямых трехмерного аффинного пространства"*.

Пусть $Gr(3, 1)$ — многообразие Грассмана, т. е. множество прямых трехмерного аффинного пространства A_3. Если подвижной репер $\{A, e_i\}$ пространства A_3 выбран так, что вектор e_3 помещен на прямой l многообразия $Gr(3, 1)$, то главным 1-формами многообразия $Gr(3, 1)$ являются 1-формы ω^α и ω^α_3 $(i, j=1, 2, 3;\ \alpha, \beta=1, 2)$, где 1-формы ω^i и ω^i_j связаны структурными уравнениями аффинного пространства. Пусть $H^{(1)}$— фундаментальный дифференциально-геометрический объект первого порядка комплекса прямых $Gr(3, 1, 3)$ пространства A_3. Всегда возможна такая частичная канонизация репера $\{A, e_i\}$, чтобы главная корреляция K, дающая геометрическую интерпретацию дифференциально-геометрического объекта $H^{(1)}$, имела вид

$$K: A + te_3 \leftrightarrow x^1 - tx^2 = 0.$$

Определение. Многообразие Грассмана $Gr(3, 1)$, на котором задано поле дифференциально-геометрического объекта H^1, называется неголономным комплексом прямых аффинного пространства A_3.

Геометрия неголономного комплекса прямых трехмерного проективного пространства рассматривалась в работе К. И. Гринцевичюса [1].

Дифференциальные уравнения неголономного комплекса прямых трехмерного аффинного пространства имеют вид (внешние квадратичные дифференциальные уравнения опущены):

$$\omega_1^3 = h_{1111}\,\omega^1 + \left(h_{1112} - \frac{1}{4}\,h_{11}\right)(\omega^2 - \omega_3^1) + \left(h + \frac{1}{2}\,h_{12} - h_{1122}\right)\omega_3^2 + g_{11}(\omega^2 + \omega_3^1),$$

$$\omega_3^3 + \omega_2^2 - \omega_1^1 = \left(2h_{1112} + \frac{1}{2}\,h_{11}\right)\omega^1 + (2h_{1112} + h)(\omega^2 - \omega_3^1) + 2g_{12}(\omega^2 + \omega_3^1),$$

$$\omega_3^1 - \omega^2 = \left(h - \frac{1}{2}\,h_{12} - h_{1122}\right)\omega^1 + \left(-h_{1222} - \frac{1}{4}\,h_{22}\right)(\omega^2 - \omega_3^2) + h_{2222}\,\omega_3^2 - g_{22}(\omega^2 + \omega_3^1).$$

Оказывается, что первый фундаментальный дифференциально-геометрический объект $\{h_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}, h_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta}, h\}$ имеет следующие подобъекты:

1) тензоры $h_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}$ и $h_{\alpha\beta}$;
2) линейные дифференциально-геометрические объекты $g_{\alpha\beta}$ и h;
3) относительные инварианты g_{11}, h_{11} и h_{1111}.

Найдены геометрические интерпретации вышеупомянутых подобъектов.

Литература

1. К. Гринцевичюс, О неголономном комплексе, Лит. матем. сб., IX, № 1 (1969), 85–99.

29.X.1969, И. Близникене, *„О геометрии оснащенных многообразий Грассмана“.*

Рассматривается многообразие $Gr(n, 1)$ (множество прямых n-мерного проективного пространства P_n), оснащенное при помощи поля симметрического тензора ($\det \| u_{pq} \| > 0$)

$$\nabla u_{pq} \equiv du_{pq} - u_{rq}\,\omega_p^r - u_{pr}\,\omega_q^r = u_{pq\alpha}^r\,\omega_r^\alpha,$$

$$p, q = 1, 2; \ \alpha, \beta = 3, 4, \qquad n+1; \ i, j = 1, 2, \ldots, n+1,$$

где 1-формы ω_j^i связаны структурными уравнениями проективного пространства (1-формы ω_p^α — главные формы многообразия $Gr(n, 1)$). При помощи частичной канонизации подвижного репера эти дифференциальные уравнения можно записать в следующем виде

$$\omega_2^2 - \omega_1^1 = \lambda_\alpha^p\,\omega_p^\alpha,$$

$$\omega_1^2 + \omega_2^1 = \mu_\alpha^p\,\omega_p^\alpha.$$

На прямой $l = (A_1, A_2)$ берутся две сопряженные точки $M = A_1 + tA_2$ и $N = tA_1 - A_2$. Если точка M (точка N) фиксирована, то точка N (точка M) описывает гиперповерхность (N) (гиперповерхность (M)). Пересечение касательных гиперплоскостей $\Pi_N(t)$ и $\Pi_M(t)$ к этим гиперповерхностям в точках M и N, соответственно, $(n-2)$-мерная плоскость $\Pi_{MN}(t)$. Если точка M меняется, то $(n-2)$-мерная плоскость описывает гиперквадрику

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - 2h_\alpha^1 x^1 x^\alpha - 2h_\alpha^2 x^2 x^\alpha + a_{\alpha\beta}\,x^\alpha x^\beta = 0,$$

где

$$h_\alpha^p = \begin{cases} \dfrac{-\lambda_\alpha^1 + \mu_\alpha^2}{2}, & p = 1 \\[2ex] \dfrac{\lambda_\alpha^2 + \mu_\alpha^1}{2} & p = 2, \end{cases}$$

$$a_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left\{ \begin{vmatrix} \mu_\alpha^1 & \mu_\alpha^2 \\ \lambda_\beta^1 & \lambda_\beta^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mu_\beta^1 & \mu_\beta^2 \\ \lambda_\alpha^1 & \lambda_\alpha^2 \end{vmatrix} \right\}$$

Полярное пространство h прямой l относительно этой гиперквадрики имеет вид

$$x^p = h_\alpha^p x^\alpha,$$

т. е. является $(n-2)$-мерной плоскостью. Дифференциальные уравнения величин h_α^p имеют вид

$$\nabla h_\alpha^p + \omega_\alpha^p = h_{\alpha\beta}^{pq}\,\omega_q^\beta \qquad (1)$$

Величины

$$g_{\alpha\beta}=-\begin{vmatrix}\lambda_\alpha^1 & \lambda_\beta^1\\ \lambda_\alpha^2 & \lambda_\beta^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda_\alpha^1 & \mu_\beta^2\\ -\lambda_\alpha^2 & \mu_\beta^1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mu_\alpha^1 & \lambda_\beta^2\\ \mu_\alpha^2 & -\lambda_\beta^1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\mu_\alpha^1 & \mu_\beta^1\\ \mu_\alpha^2 & \mu_\beta^2\end{vmatrix}$$

образуют тензор, т. е.

$$\nabla g_{\alpha\beta}+g_{\alpha\beta}\,\omega_p^p\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_p^\alpha)$$

Если n — нечетное, то можно предполагать, что тензор $g_{\alpha\beta}$ является невырожденным. Определитель g этого тензора является относительным инвариантом, т. е.

$$dg-2g\left(\omega_\alpha^\alpha-\frac{n-1}{2}\,\omega_p^p\right)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \omega_p^\alpha).$$

Если

$$I=\sqrt{|g|},$$

то

$$dI-I\left(\omega_\alpha^\alpha-\frac{n-1}{2}\,\omega_p^p\right)=I_\alpha^p\,\omega_p^\alpha. \tag{2}$$

Оказывается, что величины $k_\alpha^p=\dfrac{2}{(n+1)I}\,I_\alpha^p$ определяют объект такой же структуры как и h_α^p, т. е. величины

$$L_\alpha^p=h_\alpha^p-k_\alpha^p,$$

образуют тензор

$$\nabla L_\alpha^p=L_{\alpha\beta}^{pq}\,\omega_q^\beta \tag{3}$$

Отсюда следует, что с рассматриваемым многообразием $Gr\,(n,1)$ всегда ассоциируется комплекс коррелятивных элементов (2), неголономный линейчатый гиперкомплекс (3) и неголономный комплекс коррелятивных элементов (1).

12.XI.1969, Л. Стиклаките, *„К теории поверхностей трехмерного билинейно-метрического проективного пространства"*.

19.XI.1969, В. Близникас, *Дифференциальная геометрия неголономной гиперповерхности риманова пространства"*, Лит. матем. сб., XI, № 1 (1971).

24.XI.1969, Обсуждение диссертации В. С. Лисняка, *„Некоторые вопросы дифференциальной геометрии соответствий"*.

26.XI.1969, С. Григелионис, *„О геометрии неголономного комплекса прямых четырехмерного проективного пространства"*.

3.XII.1969, В. Близникас, *„О геометрии неголономных кривых риманова пространства"*

Дифференциальные уравнения неголономной кривой V_n^{n-1} риманова пространства имеют вид ($\alpha=1, 2, \ldots, n-1$; $i, j=1, 2, \ldots, n$):

$$\omega_n^\alpha=a_\beta^\alpha\,\omega^\beta+a^\alpha\,\omega^n,$$

где ω^i, ω_j^i — 1 — формы, связанные структурными уравнениями риманова пространства (без кручения). Оказывается, что a^α является подобъектом объекта $(a^\alpha, a_\beta^\alpha)$. Отсюда следует, что конгруэнция геодезических кривых риманова пространства является частным случаем неголономной кривой. Найдены различные кривизны кривой V_n^{n-1}.

Если риманово пространство является эвклидовым пространством, то тогда геометрия неголономной кривой V_n^{n-1} совпадает с геометрией векторного поля.

10.XII.1969, Р. В. Василюс, *„О некоторых связностях однородных пространств"*.

17.XII.1969, А. Ю. Пекарскене, *„О геометрии некоторых семейств вырожденных плоских кривых третьего порядка в P_3"*.

Многообразие, образующим элементом которого является плоскость и лежащая в ней кривая второго порядка пространства P_3, зависит от восьми параметров.

Пара C_l называется индуцированно-расслояемой, если прямолинейные конгруэнции (l) и (l') образуют двусторонне расслояемую пару. Индуцированно расслоямые пары C_l определяются с произволом пяти функций двух аргументов. Пара C_l называется расслояемой, если пара прямолинейных конгруэнций (l) и (l') односторонне расслояема (от конгруэнции (l) к конгруэнции (l')) и к конгруэнции (C) коник можно присоединить однопараметрическое семейство поверхностей так, чтобы касательные плоскости каждой поверхности семейства в точках пересечения с произвольной коникой C конгруэнции (C) содержали соответствующую прямую l конгруэнции (l). Второе условие накладывалось на пару C_l в [2].

Расслоямые пары C_l (пары C'_l) определяются с произволом десяти функций одного аргумента.

Пара C'_l называется характеристической (фокальной), если касательные к линиям $\omega_i=0$ на поверхности $(\bar{A}_3)$ не проходят через $\bar{A}_1\bar{A}_2$ и точка $\bar{A}_3$ является характеристической точкой плоскости коники (точки $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$ являются фокусами коники). Фокальные пары C'_l определяются с произволом восьми функций одного аргумента. Пара C'_l тогда и только тогда является фокальной, когда касательные плоскости к поверхностям $(\bar{A}_1)$ и $(\bar{A}_2)$ инцидентны прямой l. Характеристическая фокальная пара C'_l определяется с произволом шести функций одного аргумента. Конгруэнцией D называется конгруэнция коник в P_3, у которой существуют две невырождающиеся в линии фокальные поверхности $(\bar{A}_1)$ и $(\bar{A}_2)$, и соответствующая им пара C_l является характеристической фокальной парой C'_l. Конгруэнции D с невырожденной огибающей поверхностью $(\bar{A}_3)$ плоскостей коник (конгруэнции D') определяются с произволом шести функций одного аргумента. Она обладает рядом интересных геометрических свойств. Касательные к линиям $\omega_i=0$ на поверхности $(\bar{A}_j)$ $(i=j)$ пересекаются. Фокусы коники C, отличные от $\bar{A}_i$, попарно лежат на прямых, проходящих через $\bar{A}_3$ и гармонически делящих прямые $\bar{A}_3\bar{A}_i$; фокальные семейства, отличные от $\omega_i=0$ являются сдвоенными и определяются уравнениями $\omega_1\pm\omega_2=0$. На поверхностях $(\bar{A}_i)$ касательные к линиям $\omega_1-\omega_2=0$ пересекаются; точки пересечения касательных к линиям $\omega_1+\omega_2=0$ с прямой l гармонически делят точки $\bar{A}_3$ и $\bar{A}_4$. Подробно исследованы конгруэнции D' и конгруэнции D'' с вырождающейся в линию огибающей поверхностью $(\bar{A}_3)$.

Литература

1. В. С. Малаховский, Многообразие алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве, Геометрический сб., вып. 3, Труды Томского университета, **168**, 1963, 28–42.
2. F. Backes, Sur la stratifications des congruences, engendrées l'une par une droite, l'autre par une conique, Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg., 47, №2, 66–82, 1961.

ДЕСЯТАЯ РЕСПУБЛИКАНСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ МАТЕМАТИКОВ

Вильнюс, 23–24 июня 1969 г.

В работе конференции приняли участие 76 ученых из вузов и Академии наук и преподавателей средних школ республики. Было заслушано 9 обзорных докладов:

1. Б. Бальчитис (Шяуляйский пединститут), Проблемы начального математического обучения в школах Литовской ССР.
2. Р. Барщяускас (I ср. школа г. Таураге), Проблемы работы учителя математики.
3. В. Лютикас (Министерство просвещения Лит. ССР), Предметные и методические недостатки математического обучения в общеобразовательных школах.
4. Й. Кубилюс (Вильнюсский Госуниверситет), Проблемы вероятностной теории чисел.
5. А. Нафталевич (Вильнюсский Госуниверситет), Некоторые вопросы теории функций комплексного переменного.
6. В. Близникас (Вильнюсский пединститут), Работы литовских геометров.
7. В. Статулявичус (Институт физики и математики), Работы по теории вероятностей.
8. Б. Квядарас (Институт физики и математики), Краевые задачи дифференциальных уравнений.
9. Э. Вилкас (Институт физики и математики), Математические методы исследования операций.

В настоящей заметке рассматривается однопараметрическое подмногообразие этого многообразия, а также восьмипараматерическое многообразие, элементом которого является плоскость и лежащая в ней вырожденная кривая третьего порядка (т. е. кривая второго порядка и пересекающая ее в двух действительных точках прямая).

Если вершины A_1, A_2, A_3 подвижного репера $\{A_i\}$ поместить на кривой второго порядка, то уравнение этой кривой, лежащей в полскости $x^4=0$, можно привести к виду

$$\begin{cases} x^1 x^2 + x^1 x^3 + x^2 x^3 = 0, \\ x^4 = 0, \end{cases}$$

где x^i — однородные координаты точки относительно репера $\{A_i\}$. Здесь $i=1, 2, 3, 4$. Тогда упомянутое однопараметрическое подмногообразие определяют следующие линейные дифференциальные уравнения

$$\omega_1^2+\omega_1^3=\lambda_1\,\Theta,$$
$$\omega_2^1+\omega_2^3=\lambda_2\,\Theta,$$
$$\omega_3^1+\omega_3^2=\lambda_3\,\Theta,$$
$$\omega_2^2-\omega_3^3+\omega_2^3+\omega_1^3-\omega_1^2-\omega_3^2=\lambda_4\,\Theta,$$
$$\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_1^2+\omega_3^2-\omega_2^1-\omega_3^1=\lambda_5\,\Theta,$$
$$\omega_1^4=\mu_1\,\Theta, \qquad \omega_2^4=\mu_2\,\Theta, \qquad \omega_3^4=\mu_3\,\Theta$$

и соответствующие внешние квадратичные уравнения. Здесь $D\Theta=\Theta\wedge\Theta^1$, ω_i^j — линейные дифференциальные формы, удовлетворяющие уравнениям структуры проективного пространства

$$D\,\omega_i^j=\omega_i^k\wedge\omega_k^j$$

Найдена характеристическая прямая однопараметрического семейства плоскостей $x^4=0$. Выполнена частичная канонизация подвижного репера путем совмещения прямой A_1A_2 с характеристической прямой. Получена инвариантная прямая, не лежащая в плоскости $x^4=0$ и касающаяся кривой, которую описывает полюс P характеристической прямой относительно данной кривой второго порядка, когда плоскость $x^4=0$ вращается вокруг прямой A_1A_2. Точка касания совпадает с полюсом P.

Дальше рассматривается восьмипараметрическое многообразие, образующим элементом которого является плоскость, лежащая в ней кривая второго порядка и прямая, пересекающая данную кривую в двух действительных точках (A_1 и A_2). Оно определяется линейными дифференциальными уравнениями $\omega_\alpha^3=\mu_\alpha^{\hat{i}}\,u_{\hat{i}}$ и соответствующими внешними квадратичными уравнениями. Здесь $\alpha=1, 2$; $\hat{i}=1, 2, 3, \ldots, 8$ и $u_1=\omega_1^2$; $u_2=\omega_2^1$;

$$u_3=\omega_3^1+\omega_3^2; \qquad u_4=\omega_2^2-\omega_3^3-\omega_1^2-\omega_3^2\ ;$$
$$u_5=\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_1^2+\omega_3^2-\omega_2^1-\omega_3^1\ ;$$
$$u_6=\omega_1^4; \qquad u_7=\omega_2^4\,; \qquad u_8=\omega_3^4$$

Получен ряд геометрических объектов и дана их геометрическая интерпретация.

24.XII.1969, В. С. Малаховский (Калининград), „*Расслояемые пары C_l*"

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматривается пара C_l — пара конгруэнций, образованная конгруэнцией (C) коник типа $(2, 2, 3)^2$ (см. [1]), и конгруэнцией (l) прямых, не инцидентных плоскостям соответствующих коник. Помещая вершину A_3 репера $\{\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \bar{A}_4\}$ в точку пересечения прямой l с плоскостью коники, вершины $\bar{A}_i$ ($i, j, k = 1, 2$) в точки пересечения поляры l' точки $\bar{A}_3$ с коникой, вершину $\bar{A}_4$ — на прямой l, приводим систему дифференциальных уравнений пары C_l к виду:

$$\omega_j^i=\Gamma_i^{jk}\,\omega_k, \qquad \omega_i^3=\Gamma_i^{3k}\,\omega_k, \qquad \omega_3^i=\Gamma_3^{ik}\,\omega_k, \qquad \omega\ =\Gamma_3^{4k}\,\omega_k,$$
$$\omega_4^i=\Gamma_4^{ik}\,\omega_k, \qquad \omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3=a^k\,\omega_k,$$

$$\omega_i=\omega_i^4, \qquad i\neq j.$$

УДК – 519.21

Об асимптотическом разложении для n-кратных сверток k-мерных распределений, А. Бикялис, И. Модеруди, «Литовский математический сборник», 1970, X, № 3, 433—443.

В работе исследуется асимптотическое разложение типа Г. Бергстрома:

$$P^{*n}(A\sqrt{n})=\sum_{\nu=0}^{s}\binom{n}{\nu}\Phi^{*(n-\nu)}*(P-\Phi)^{*\nu}(A\sqrt{n})+r_{n,s+1}(A\sqrt{n})$$

для n-кратной свертки $P^{*n}(A\sqrt{n})$ k-мерного распределения $P(A)$. Здесь $\Phi(A)$ — k-мерное нормальное распределение; s — целое число; A — выпуклое борелевское множество. При общих условиях получены оценки для остаточного члена $r_{n,s+1}(A\sqrt{n})$ и для

$$\binom{n}{\nu}\Phi^{*(n-\nu)}*(P-\Phi)^{*\nu}(A\sqrt{n}).$$

Библиографий 2.

УДК – 518.9

Кооперативная динамическая неантогонистическая игра двух лиц, С. Вакринене, «Литовский математический сборник», 1970, X, № 3, 453—461.

Рассматривается кооперативная динамическая игра двух лиц, когда повторяется биматричная игра. Найдены оптимальные стратегии угрозы и коррелированные стратегии поведения, дающие решения Шэпли и Нэша, когда игроки могут принимать соглашения только до начала игры. Доказано, что решения дают те же самые выигрыши и в том случае, когда кооперирование происходит на каждом шаге. Библиографий 4.

УДК – 512.25+519.3:30.115

Бесконечношаговый дихотомический процесс решения динамического программирования, В. Бистрицкас, «Литовский математический сборник», 1970, X, № 3, 445—452.

Доказывается теорема существования и единственности решения для более общего уравнения „золотодобычи"

$$f(x, y)=\max\begin{bmatrix} A: ax+by+p_1 f(r_1 x, r_2 y) \\ B: cx+dy+p_2 f(t_1 x, t_2 y)\end{bmatrix},$$

где параметры a, b, c, d, r_i, t_i; $i=1$, 2 удовлетворяют неравенствам $0\leqslant p_1 r_i$, $p_2 t_i<1$; $0\leqslant|a|$, $|b|$, $|c|$, $|d|$, x, y, $p_i<\infty$. Найдено решение данного уравнения в пространстве политик. Библиографий 4.

УДК – 518.9

Оптимальность в бескоалиционных играх: обзор подходов, Э. Вилкас, «Литовский математический сборник», 1970, X, № 3, 463—470.

Обсуждаются известные в литературе концепции оптимальности в бескоалиционных играх n лиц. Если в игре не делается дополнительных предположений о поведении игроков кроме „максимизации собственных выигрышей", то задача интерпретируется как игра с природой, а оптимальность есть некоторая модификация принципа максмина. Для собственно игровых задач обсуждается подход Харшаньи и подход, данный ранее автором. Показаны психологические и социалогические предположения, лежащие в основе подхода Харшаньи. Дано несколько новых определений оптимальности, соответствующих другим предположениям. Особое внимание уделяется возможности создания заочных коалиций интересов и связанных с этим принципов оптимальности. Библиографий 8.

УДК – 519.21

О законе Пуассона на группах, А. Рухин, «Литовский математический сборник», 1970, X, № 3, 537—543.

Работа посвящена изучению разложений закона Пуассона на группах. Теорема, доказываемая в статье, является обобщением хорошо известных результатов Райкова и Леви. Библиографий 8.

УДК – 219.21

Некоторые разложения плотностей многомерных устойчивых распределений с показателем $\alpha>1$, Н. Калинаускайте, «Литовский математический сборник», 1970, X, № 3, 491—496.

В статье получены разложения плотности устойчивого закона распределения с показателем $2\geqslant\alpha>1$ в ряд, а также асимптотические формулы для плотности устойчивого распределения для $\alpha\in[0, 2]$, $\alpha\neq1$ при $|x|\to0$. Библиографий 3.

УДК – 517.53:517.54

Некоторые свойства функций класса H'_p и задачи интерполирования, В. Кабайла, «Литовский математический сборник», 1970, X, № 3, 471—490.

В статье рассматриваются некоторые свойства функций, принадлежащих классам H'_p, в частности получены точные оценки модуля таких функций, доказано соотношение $H_p \subset H'_{2p}$ и доказано, что класс функций, представимых в единичном круге формулой

$$f(\lambda) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{|z|<1} \frac{f(z)}{(1-\lambda\bar{z})^2}\, dS_z \qquad (|\lambda|<1),$$

совпадает с классом H'_1. Соотношение $H_p \subset H'_{2p}$ позволяет функции класса H_p при $\frac{1}{2} \leqslant p < 1$ рассматривать как элементы пространства Банаха H'_{2p}, так как $2p \geqslant 1$. Библиографий 17.

УДК – 517.949.2

О линейной системе дифференциально-разностных уравнений с целыми коэффициентами конечного порядка I—II, Л. Навицкайте, «Литовский математический сборник», 1970, X, № 3, 497—515.

В работе показано, что уравнение

$$L[F(z)] \equiv A_1(z)\, F(z+\alpha_1) + A_n(z)\, F(z+\alpha_n) + \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=0}^{s_k} A_{kl}(z) \cdot$$

$$\cdot F^{(l)}(z+\alpha_k) = G(z) \qquad (1)$$

имеет мероморфное решение, а уравнение

$$L[F(z)] = 0 \qquad (2)$$

— бесконечное множество линейно независимых мероморфных решений. При некоторых дополнительных условиях доказывается существование целых решений как неоднородного уравнения (1), так и однородного уравнения (2). Библиографий 10.

УДК – 519.21

Асимптотические разложения функции распределения суммы независимых решетчатых случайных величин, В. Пипирас, «Литовский математический сборник», 1970, X, № 3, 517—536.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \quad \xi_n$ — независимые случайные величины, принимающие значения вида a_i+hk (a_i и $h>0$ — некоторые числа; $k=0, \pm 1, \pm 2, \quad i=1, 2, \ldots n$). Из доказанных в статье результатов следует, что при ограничении $\mathbf{M} \mid \xi_i \mid^r < \infty$ ($r \geqslant 3$ — любое число; $i=1, 2, \ldots, n$) и некоторых других условиях остаточный член асимптотического разложения функции распределения случайной величины $B_n^{-1} \sum\limits_{i=1}^{n} \cdot \xi_i$ по абсолютной величине не превышает $\varepsilon\left(B_n (1+|(x)|\right)(1+|x|^{-r} L_{rn}$, где положительная функция $\varepsilon(z) \to 0$, когда $z \to \infty$. Здесь B_n^2 — дисперсия $\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$, а L_{rn} — дробь Ляпунова. Библиографий 9.

УДК –519.21

О стохастических уравнениях фильтрации марковских процессов, Д. Сургайлис, «Литовский математический сборник», 1970, X, № 3, 565—581.

В работе получена система стохастических уравнений для нахождения апостериорных вероятностей „ненаблюдаемой" компоненты θ_t двумерного марковского процесса (θ_t, η_t), когда θ_t принимает конечное число значений, а η_t — непрерывный справа процесс, удовлетворяющий уравнению К. Ито. Этот результат представляет собой следствие разложения апостериорного математического ожидания $\mathbf{E}\{f(\theta_t) \mid \eta_0^t\}$ для некоторого класса непрерывных функций $f(\theta)$, когда θ_t более общий стохастически непрерывный процесс. Библиографий 9.

УДК – 511

Аналог теоремы Малера—Спринджука для некоторых полиномов третьей степени от двух переменных. I, Р. Слесорайтене, «Литовский математический сборник», 1970, X, № 3, 545—564.

Доказывается, что для почти всех (x, y) неравенство $|P(x, y)| < h^{-n+1-\varepsilon}$ имеет лишь конечное число решений в таких полиномах $P(x, y) = a_{111}x^3 + a_{112}x^2y + a_{122}xy^2 + a_{222}y^3 + a_{113}x^2 + a_{123}xy + a_{223}y^2 + a_{133}x + a_{233}y + a_{333}$, для которых a) $a_{223} = 0$, b) $a_{111} \cdot a_{112} \cdot a_{122} \neq 0$, $d_1 \neq 0$, c) хоть один из $|a_{111}|$, $|a_{333}|$ не равен нулю, ни высоте полинома, d) полином $D(x)$ не имеет кратных корней. Здесь n – число неравных нулю коэффициентов среди a_{ijl} $(1 \leqslant i, j, l \leqslant 3)$, $D(x_0) = d, x_0^4 + d_2x_0^3 + d_3x_0^2 + d_4x_0 + d_5$ – дискриминант полинома $P(x_0, y)$, $\varepsilon > 0$ – фиксированное число. Библиографий 4.

УДК–519.21

О предельных теоремах для случайных функций, I, В. А. Статулявичус, «Литовский математический сборник», 1970, X, № 3, 583—592.

В статье исследуются асимптотическое поведение вероятностей $1 - F_{Z(0,T)}(x$ $F_{Z(0,T)}(-x)$ больших уклонений и скорость сходимости функций $F_{Z(0,T)}(x)$ к $\Phi(x$ для случайной величины $Z(0, T) = \dfrac{\zeta(0, T) - M\zeta(0, T)}{\sqrt{D\zeta(0, T)}}$ при $T \to \infty$, где $\zeta(s, t)$ – аддитивно зависящая от интервала $[s, t)$ функция, такая, что соответствующие ей σ-алгебры $\mathcal{F}_{s,t} = \sigma\{\zeta(u, v), (u, v] \leqslant (s, t]\}$ удовлетворяют условиям слабой зависимости „почти марковского типа" (условие RM):

$$\sup_{C \in \mathcal{F}_{t,T}} |P\{C \mid AB) - P(C \mid B)| \leqslant e^{-\alpha_T (t-s)}$$

для всех $A \in \mathcal{F}_{0,s}$, $B \in \mathcal{F}_{s,t}$, $0 \leqslant s < t \leqslant T$, где коэффициент регулярности $\alpha_T > 0$. Исследуются также семиинвариантные условия на смешанные семиинварианты $\Gamma_k\{\xi(t_1), \quad \xi(t_k)\}$ процесса $\xi(t)$ для исследования $\xi(s, t) = \int_s^t \xi(t)\,dt$.

Получена оценка для $\Gamma_k \{ \xi(t_1), \ldots, \xi(t_k) \}$, когда $\xi(t)$ удовлетворяет условиям регулярности типа RM или известно поведение смешанных моментов

$$M \widehat{\xi(t_1) \xi(t_2) \ldots \xi(t_k)},$$

де знак $\frown$ означает, что случайные величины центрируются:

$$\hat{\xi} = \xi - M\xi.$$

Библиографий 9.

УДК – 511

О распределении образующих элементов в свободных числовых полугруппах. II, Д. Цибульските, «Литовский математический сборник», 1970, X, № 3, 593—610.

Пусть

$$S_f = S_{\mu}^{h} \prod_{j=1}^{k} S_{L^j}^{h_j}, \quad \sum_{j=1}^{k} h_j \geqslant h, \quad \sum_{j=1}^{k} (j+1) h_j - h = n, \quad h \geqslant 1, \quad n \geqslant h.$$

Число h будем называть порядком преобразования S_f, а n – его весом. Преобразование S_f принадлежит классу $\mathfrak{B}_{hn}$ $(h \geqslant 1,\ n \geqslant h)$, если S_f есть линейная комбинация конечного числа сумм S_g порядка $\leqslant h$ и веса $\leqslant n$. В класс $\mathfrak{B}_{hn}^{*}$ входят преобразования S_f, удовлетворяющие условию

$$S_f \Phi(x) = O(x^{\theta} \ln^{h-1} x), \quad \Phi \in \mathfrak{N}.$$

Пусть далее f – арифметическая функция, $k \geqslant 0$ – целое число

$$V_k(\eta, f) = \frac{1}{k!} e^{-\eta} S_f L^k\left(e^{\frac{\eta}{\theta}}\right)$$

УДК — 513.7

О дифференциальных инвариантах пространства опорных линеаров, Ю. Шинкунас, «Литовский математический сборник», 1970, X, № 3, 611—637.

В пространстве опорных линеаров рассматривается линейная связность, заданная объектом $(\overset{l}{\Gamma}{}^{\alpha}_{j\gamma\varepsilon}, \overset{l}{C}{}^{\alpha}_{jk\gamma\varepsilon})$. Строится теория кручения-кривизны этой связности и доказывается ряд так называемых теорем о замене и приведении для дифференциальных инвариантов пространства опорных линеаров линейной связности, которые являются естественным обобщением аналогичных теорем, доказанных Б. Л. Лаптевым и А. П. Урбонасом. Библиографий 12.

и функции $\bar{V}_k(\eta, f)$ такие, что

$$\overline{\lim_{\eta\to\infty}} |V_k(\eta, f)| / \bar{V}_k(\eta, f) = 1.$$

Теорема. Пусть $Sf \in \mathfrak{B}^*_{hn}$,

$$a_0\left(\Lambda - \frac{1}{C\theta}\right) = -\lim_{\eta\to\infty} \ln \left| V_0\left(\eta,\ \Lambda - \frac{1}{C\theta}\right)\right| \Big/ (\ln\eta - \ln\theta).$$

Если $a_0\left(\Lambda - \frac{1}{C\theta}\right) < \infty$ и $k \geqslant 1$, то

$$V_{k-1}(\eta, f) = O\left(\eta^{n-1}\,\bar{V}_0^k\left(\eta,\ \Lambda - \frac{1}{C\theta}\right)\right).$$

Если $a_0\left(\Lambda - \frac{1}{C\theta}\right) = \infty$ и $k \geqslant 1$, то

$$V_{k-1}(\eta, f) = O\left(\left(\frac{\eta}{\theta}\right) - M \ln \frac{\eta}{\theta}\right)$$

для любого фиксированного $M > 0$. Библиографий 2.