X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 3
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1970

УДК-519.21

О СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ ФИЛЬТРАЦИИ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Д. Сургайлис

В настоящее время известно большое число работ, в которых выводились стохастические уравнения для апостериорной вероятности „наблюдаемой" компоненты θ_t двумерного марковского процесса (θ_t, η_t), когда „наблюдаемый" процесс η_t непрерывен с вер. 1 и удовлетворяет некоторому стохастическому уравнению К. Ито, а θ_t – диффузионный или скачкообразный марковский процесс (см., напр., [3], [4]). В работе [6] рассматривалось обобщение этой задачи в сторону более произвольного процесса (θ_t, η_t), хотя при этом η_t оставался непрерывным с вер. 1. В нашей работе аналогичные результаты получены для разрывного процесса η_t, удовлетворяющего уравнению К. Ито, причем использовались новые результаты по абсолютной непрерывности мер, полученные Б. Григелионисом [1].

Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ – вероятностное пространство, на котором определен случайный процесс $\eta_t = \eta_t(\omega)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, принимающий значения в m-мерном евклидовом пространстве $(R_m, \mathscr{B}_m)$, допускающий стохастический дифференциал К. Ито $(\eta_0 = 0)$:

$$d\eta_t = A_{0_t}(t, \eta_t)\,dt + \mathrm{B}(t, \eta_t)\,dw_t + \int\limits_{R_m} F_{0_t}(t, \eta_t, y)\, q(dt \times dy), \tag{1}$$

где $w_t = w_t(\omega)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ – r-мерный винеровский процесс $(0 \leqslant r \leqslant m)$, $q(B) = q(B)(\omega)$, $p(B) = p(B)(\omega)$, $B \in \mathscr{B}[0, T] \times \mathscr{B}_m$ – стандартные пуассоновские меры с независимыми значениями, независящие от $w_{(\cdot)}(\omega)$, причем:

$$q(\Delta \times \Gamma) = p(\Delta \times \Gamma) - \mathbf{E}p(\Delta \times \Gamma) = p(\Delta \times \Gamma) - \int\int \frac{dt\,dx}{|x|^{m+1}}$$

для всех $\Delta \in \mathscr{B}[0, T]$, $\Gamma \in \mathscr{B}_m \cap \bar{U}(0)$, где $\mathscr{B}[0, T]$ – σ-алгебра борелевских подмножеств интервала [0, T], а $\bar{U}(0)$ – дополнение произвольной окрестности нуля пространства R_m.

Процесс $\theta_t = \theta_t(\omega)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ предположим марковским, стохастически непрерывным, независящим от $w_{(\cdot)}(\omega)$, $p(\ \ )(\omega)$, принимающим значения в некотором метрическом пространстве Θ с σ-алгеброй $\mathscr{B}_0$, порожденной метрикой $\rho(\ \ \ )$, траектории которого с вер. 1 принадлежат пространству $\mathscr{B}_0[0, T]$ всех ограниченных и $\mathscr{B}[0, T]$ – измеримых функций θ_t, $0 \leqslant t \leqslant T$, а функции $A_\theta(t, x) = \left(A_\theta^{(i)}(t, x)\right)$, $\mathrm{B}(t, x) = \left(B^{ik}(t, x)\right)$, $F_\theta(t, x, y) = \left(F_0^{(i)}(t, x, y)\right)$, определенные для всех $t \in [0, T]$, $x \in R_m$, $y \in R_m$, $0 \in \Theta$, $i = 1, \ \ , m$, $k = 1,$

предположим пока $\mathscr{B}[0, T]\times\mathscr{B}_m\times\mathscr{B}_m\times\mathscr{B}_0$-измеримыми (для избежания возможных недоразумений заметим, что запись

$$\xi_t=\int_0^t \mathrm{B}(s)\,d\eta_s,$$

где $\mathrm{B}(t)=\left(B^{ij}(t)\right)$, $i=1, \ldots, m$, $j=1, \ldots, n$, — $m\times n$-матрица, а $\eta_t=(\eta_t^{(j)})$, $j=1, \ldots, n$ — n-мерный вектор, означает m-мерный процесс $\xi_t=(\xi_t^{(i)})$, где

$$\xi_t^{(i)}=\sum_{k=1}^{n}\int_0^t B^{ik}(s)\,d\eta_s^{(k)}, \qquad i=1, \ldots, m).$$

Обозначим далее для всех s, t $(0\leqslant s\leqslant t\leqslant T)$:

$$\mathscr{F}_{s,t}=\sigma\{w_u, \theta_u, p(B), s\leqslant u\leqslant t, B\in\mathscr{B}[s, t]\times\mathscr{B}_m\},$$

$$\mathscr{F}^{\eta}_{s,t}=\sigma\{\eta_u, s\leqslant u\leqslant t\}, \ \mathscr{F}^{\eta}_t=\mathscr{F}^{\eta}_{0,t}, \ \mathscr{F}^{\eta}=\mathscr{F}^{\eta}_{0,t},$$

и, кроме того, для всех t, x, θ и $\Gamma\in\mathscr{B}_m\cap\overline{U(0)}$:

$$\Pi_0(t, x, \Gamma)=\int\limits_{F_0(t, x, y)\in\Gamma}\frac{dy}{|y|^{m+1}}, \quad \mathrm{A}(t, x)=\left(a^{ij}(t, x)\right)=$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{r}B^{ik}(t, x)B^{jk}(t, x)\right).$$

Пусть выполняются следующие предположения:

(a_1) существует $\Pi(t, x, \Gamma)$, $\mathscr{B}[0, T]\times\mathscr{B}_m$ — измеримая для любой $\Gamma\in\mathscr{B}_m\cap\overline{U(0)}$ и являющаяся мерой на $\mathscr{B}_m$ при любых t, x, такая что $\Pi_0(t, x, \cdot)\ll\Pi(t, x, \cdot)$ и

$$|\log\rho_0(t, x, y)|\leqslant K_1, \quad \int\limits_{R_m}\log^2\rho_0(t, x, y)\,\Pi(t, x, dy)\leqslant K_2$$

для всех t, x, y, θ, где $\rho_0(t, x, y)=\dfrac{\Pi_0(t, x, dy)}{\Pi(t, x, dy)}$

(a_2) существует $\mathscr{B}[0, T)\times\mathscr{B}_m\times\mathscr{B}_0$ — измеримая m-мерная функция $C_0(t,x)=\left(C_0^{(i)}(t, x)\right)$, такая, что для всех t, x, θ:

$$A_0(t, x)+\mathrm{A}(t, x)\,C_0(t, x)+\int\limits_{R_m}y\left(1-\rho_0(t, x, y)\right)\Pi(t, x, dy)=0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{m}a^{ij}(t, x)\,C_0^{(i)}(t, x)\,C_0^{(j)}(t, x)\leqslant K_3;$$

(a_3) для всех t, x, θ и $\Gamma\in\mathscr{B}_m\cap\overline{U(0)}$:

$$A_0^2(t, x)+\sum_{i=1}^{m}a^{ii}(t, x)+\int\limits_{R_m}y^2\,\Pi(t, x, dy)\leqslant K_4, \quad \Pi(t, x, \Gamma)\leqslant K_\Gamma;$$

(a_4) для всех t, x, θ, θ', $\delta>0$, таких, что $\rho(\theta', \theta)\leqslant\delta$:

$$\int\limits_{R_m}\Big(\rho_\theta(t, x, y)-\rho_{\theta'}(t, x, y)\Big)^2\,\Pi(t, x, dy)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{m}a^{ij}(t, x)\cdot\Big(C_\theta^{(i)}(t, x)-C_{\theta'}^{(i)}(t, x)\Big)\Big(C_\theta^{(j)}(t, x)-C_{\theta'}^{(j)}(t, x)\Big)\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon_\delta^{(1)}(t, x, \theta),$$

где $\varepsilon_\delta^{(1)}(t, x, \theta)$ — ε-функция.

Пусть $\tilde\theta_{(\cdot)}\in B_0[0, T]$. Обозначим через $\eta_t^{\tilde\theta}=\eta_t^{\tilde\theta}(\omega)$, $0\leqslant t\leqslant T$, решение следующего уравнения К. Ито ($\eta_0^{\tilde\theta}=0$):

$$d\eta_t^{\tilde\theta}=A_{\tilde\theta_t}(t, \eta_t^{\tilde\theta})\,dt+\mathrm{B}(t, \eta_t^{\tilde\theta})\,dw_t+\int\limits_{R_m}F_{\tilde\theta_t}(t, \eta_t^{\tilde\theta}, y)\,q\,(dt\times dy). \tag{1*}$$

Потребуем еще, чтобы:

(a_5) для каждого $\tilde\theta_{(\cdot)}\in B_0\,[0, T]$ уравнение (1*) имело не больше одного решения.

Заметим тут же, что поскольку траектории процесса $\theta_t(\omega)$ с вер. 1 суть измеримые и ограниченные функции переменной t, то предположение (a_5) выполняется тогда, когда коэффициенты $A_\theta(t, x)$, $B(t, x)$, $F_\theta(t, x, y)$ удовлетворяют при каждом $\theta\in\Theta$ условиям единственности решения (см. напр. [8], гл. 3, § 3, или [9]).

Пусть $\mathcal{L}_0$ — подмножество пространства всех непрерывных ограниченных вещественных функций $f(\theta)$, $\theta\in\Theta$, являющееся одновременно областью определения слабого инфинитезимального оператора $\mathscr{A}f(t, \theta)$ процесса $\theta_t(\omega)$. Обозначим для любого $f\in\mathcal{L}_0$, $t\in[0, T]$, $y\in R_m$, $\Gamma\in\mathscr{B}_m\cap\overline{U(0)}$ математические условные ожидания (или, что тоже самое, интегралы по апостериорной вероятности $\pi_t(A)=\mathbf{P}\{\theta_t\in A\mid\eta_0^t\}=\mathbf{P}\{\theta_t\in A\mid\eta_u(\omega)=\eta_u,\ 0\leqslant u\leqslant t\}$, $\pi_0(A)=\mathbf{P}(\theta_0\in A)$):

$$\xi(t, f)=\mathbf{E}\{f(\theta_t)\mid\eta_0^t\},\quad a(t, f)=\mathbf{E}\{\mathscr{A}f(t, \theta_t)\mid\eta_0^t\},$$

$$\bar A(t)=\mathbf{E}\{A_{\theta_t}(t, \eta_t)\mid\eta_0^t\},\quad \bar C(t)=\mathbf{E}\{C_{\theta_t}(t, \eta_t)\mid\eta_0^t\},$$

$$\bar\rho(t, y)=\mathbf{E}\{\rho_{\theta_t}(t, \eta_t, y)\mid\eta_0^t\},\quad \bar\Pi(t, \Gamma)=\mathbf{E}\{\Pi_{\theta_t}(t, \eta_t, \Gamma)\mid\eta_0^t\},$$

$$b(t, f)=\mathbf{E}\left\{f(\theta_t)\Big(\bar C(t)-C_{\theta_t}(t, \eta_t)\Big)\,\Big|\,\eta_0^t\right\},$$

$$\varphi(t, y, f)=\mathbf{E}\left\{f(\theta_t)\left(\frac{\rho_{\theta_t}(t, \eta_t, y)}{\bar\rho(t, y)}-1\right)\Big|\,\eta_0^t\right\}.$$

Сформулируем основной результат нашей работы.

Теорема. *При вышесделанных предположениях, для каждой $f\in\mathcal{L}_0$ такой, что $\mathscr{A}f(t, \theta)$ ограничена и непрерывна по t, θ, с вер.* 1:

$$\xi(t, f)=\xi(0, f)+\int\limits_0^t a(s, f)\,ds+\int\limits_0^t b(s, f)\,d\bar\eta_c(s)+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{R_m}\varphi(s, y, f)\,\bar q(ds, dy), \tag{2}$$

где

$$\left.\begin{aligned}\bar q(t,\Gamma)&=p(t,\Gamma)-\int_0^t \Pi(s,\Gamma)\,ds,\\ p(t,\Gamma)&=\sum_{0\leqslant s\leqslant t}\chi_\Gamma(\eta_s-\eta_{s-0}),\\ \bar\eta_c(t)&=\eta_t-\int_0^t \bar A(s)\,ds-\int_0^t\int_{R_m} y\bar q(ds,dy)\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

и $q(t,\Gamma)\in\mathfrak{M}^{\mathbf{P}}$ *), $\bar\eta_c^{(i)}(t)\in\mathfrak{M}^{\mathbf{P}}$, *причем с вер.* 1:

$$\langle q(\cdot,\Gamma)\rangle_t=\int_0^t \Pi(s,\Gamma)\,ds,\quad \langle\bar\eta_c^{(i)},\bar\eta_c^{(j)}\rangle_t=\int_0^t a^{ij}(s,\eta_s)\,ds\tag{3'}$$

для всех $t\in[0,T]$, $\Gamma\in\mathscr{B}_m\cap\bar U(0)$, $i,j=1,\ \ m$.

Доказательство. Покажем сначала, что процессы $\bar\eta_c(t)$, $\bar q(t,\Gamma)$, а также $a(t,f)$, $b(t,f)$, $\varphi(t,y,f)$ таковы, что на $(\Omega,\mathscr{F}^\eta,\mathbf{P})$ можно определить процесс $\tilde\xi(t,f)$ как правую часть (2) разложения. Чтобы доказать теорему, необходимо получить равенство:

$$\xi(t,f)=\tilde\xi(t,f)\tag{4}$$

для каждого $t\in[0,T]$ с вер. 1. Если же процессы

$$\xi(t,f)-\int_0^t a(s,f)\,ds\in\mathfrak{M}^{\mathbf{P}},\quad \tilde\xi(t,f)-\int_0^t a(s,f)\,ds\in\mathfrak{M}^{\mathbf{P}},$$

тогда:

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left(\xi(t,f)-\tilde\xi(t,f)\right)^2=\\ &=\mathbf{E}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\xi(t_{k+1},f)-\xi(t_k,f)\right)-\left(\tilde\xi(t_{k+1},f)-\tilde\xi(t_k,f)\right)\right)^2=\\ &=\mathbf{E}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}\left\{\left(\left(\xi(t_{k+1},f)-\xi(t_k,f)\right)-\right.\right.\\ &\left.\left.-\left(\tilde\xi(t_{k+1},f)-\tilde\xi(t_k,f)\right)\right)^2\,\middle|\,\mathscr{F}^\eta_{t_k}\right\},\end{aligned}\tag{5}$$

где $0=t_0<t_1<\ \ <t_n=t$ — некоторое разбиение интервала $[0,t]$ $(t\leqslant T)$. Покажем, что существует $\mathscr{B}[0,T]\times\mathscr{B}_m\times\mathscr{B}_0$ измеримая и ограниченная при

*) $\mathfrak{M}^{\tilde{\mathbf{P}}}$ — это класс всех интегрируемых в квадрате мартингалов $Y_t=Y_t(\omega)$, $0\leqslant t\leqslant T$ относительно $(\mathscr{F}^\eta_t,\tilde{\mathbf{P}})$, где $\tilde{\mathbf{P}}$ — некоторая мера на $(\Omega,\mathscr{F}^\eta)$. Определение $\langle Y\rangle_t=\langle Y\rangle_t(\omega)$ см., напр., в [2].

каждом $h>0$ функция $\bar{\varepsilon}_h(t, x, \theta)\geqslant 0$, монотонно убывающая к нулю, когда $h\to 0$ при любых t, x, θ, такая, что:

$$\mathbf{E}\left\{\left(\left(\xi(t_{k+1}, f)-\xi(t_k, f)\right)-\left(\bar{\xi}(t_{k+1}, f)-\bar{\xi}(t_k, f)\right)\right)^2 \,\Big|\, \mathcal{F}^{\eta}_{t_k}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{E}\left\{\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\int\limits_0 \bar{\varepsilon}_{t_{k+1}-t_k}(t, \eta_t, \theta)\,\pi_{t_k}(d\theta)\,dt \,\Big|\, \mathcal{F}^{\eta}_{t_k}\right\}. \tag{6}$$

Подставляя (6) в (5), легко заметить, что условия, наложенные на $\bar{\varepsilon}_h(\cdot, \cdot, \cdot)$, допускают предельный переход под знаком интеграла, когда $\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n-1}(t_{k+1}-t_k)\to 0$, что дает нам требуемое равенство (4).

Функции вида $\varepsilon_h(t, x, \theta)$, определение и свойства которых совпадают с функцией $\bar{\varepsilon}_h(t, x, \theta)$, будем впредь называть ε-функциями. Из определения следует, что если последовательность ограниченных m-мерных $\mathscr{B}[0, T]\times\mathscr{B}_m\times\mathscr{B}_0$ — измеримых функций $f_h(t, x, \theta)$ сходится к $f(t, x, \theta)$ в каждой точке t, x, θ, когда $h\to 0$, то существует ε-функция $\varepsilon_h^{(f)}(t, x, \theta)$ такая, что:

$$|f_h(t, x, \theta)-f(t, x, \theta)|\leqslant\varepsilon_h^{(f)}(t, x, \theta) \tag{7}$$

для всех t, x, θ. Аналогично, если $g(t, \theta)\in R_m$ непрерывна по t, θ и ограничена, то существует ε-функция $\varepsilon_\delta^{(g)}(t, \theta)$, непрерывная по t, x, δ, такая, что для всех t, t', θ, θ', $\delta>0$, таких, что $|t'-t|+\rho(\theta, \theta')\leqslant\delta$:

$$|g(t', \theta')-g(t, \theta)|\leqslant\varepsilon_\delta^{(g)}(t, \theta). \tag{8}$$

Введем обозначения: $\mathscr{B}_0[0, T]$ — σ-алгебра подмножеств $B_0[0, T]$, порожденная цилиндрическими подмножествами, $\mathbf{R}$-мера на ней, порожденная конечномерными распределениями процесса $\theta_t(\omega)$, $\mathfrak{B}$ — некоторая подалгебра,

$$\mathfrak{B}\subseteq\mathscr{B}_0[0, T],\quad \tilde{\mathfrak{B}}=\sigma\{\theta_{(\cdot)}(\omega)\in A,\ A\in\mathfrak{B}\},$$

$$\mathbf{P}_{t', t''}(A)=\mathbf{P}\{A\,|\,\eta_0^{t'}\},\quad \mathbf{P}^{\mathfrak{B}}_{t', t''}(A)=\mathbf{P}\{A\,|\,\eta_0^{t'}, \tilde{\mathfrak{B}}\},$$

$$A\in\mathcal{F}^{\eta}_{t', t''},\quad 0\leqslant t'\leqslant t''\leqslant T,\quad \mathbf{R}^{\mathfrak{B}}(A)=\mathbf{R}\{A\,|\,\mathfrak{B}\},\quad A\in\mathscr{B}_0[0, T],$$

и наконец,

$$\langle f(t)\rangle=\sum_{i, j=1}^{m} f^{(i)}(t)f^{(j)}(t)a^{ij}(t, \eta_t),$$

где $f(t)\in R_m-\mathcal{F}^{\eta}_t$ — измерима.

Лемма 1. *На* $(\Omega, \mathcal{F}^{\eta})$ *существует мера* $\mathbf{Q}$, *такая, что для всех* t', t'', $\mathfrak{B}$ $\mathbf{P}^{\mathfrak{B}}_{t', t''}\sim\mathbf{Q}_{t', t''}\left(\mathbf{Q}_{t', t''}(A)=\mathbf{Q}\{A\,|\,\eta_0^{t'}\},\ A\in\mathcal{F}^{\eta}_{t', t''}\right)$ *и*:

$$\frac{d\mathbf{P}^{\mathfrak{B}}_{t', t''}}{d\mathbf{Q}_{t', t''}}=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_{t'}^{t''}\langle\tilde{C}(t)\rangle\,dt-\int\limits_{t'}^{t''}\tilde{C}(t)\,d\bar{\eta}_c(t)+\int\limits_{t'}^{t''}\int\limits_{R_m}\log\tilde{\rho}(t, y)\right.$$

$$\left.\bar{q}(dt, dy)+\int\limits_{t'}^{t''}\int\limits_{R_m}\left(1-\tilde{\rho}(t, y)+\log\tilde{\rho}(t, y)\right)\Pi(t, \eta_t, dy)\,dt\right\}. \tag{9}$$

где

$$\tilde{C}(t)=\mathbf{E}\{C_{\theta_t}(t,\ \eta_t)\mid \eta_0^t,\ \tilde{\mathfrak{B}}\},\quad \tilde{\rho}(t,\ y)=\mathbf{E}\{\rho_{\theta_t}(t,\ \eta_t,\ y)\mid \eta_0^t,\ \tilde{\mathfrak{B}}\},$$

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{q}(t,\ \Gamma)=p(t,\ \Gamma)-\int_0^t \Pi(s,\ \eta_s,\ \Gamma)\,ds,\\ &\tilde{\eta}_c(t)=\eta_t-\int_0^t\int_{R_m} y\tilde{q}(ds,\ dy)\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

и $\tilde{q}(t,\ \Gamma)\in\mathfrak{M}^Q$, $\tilde{\eta}_c^{(i)}(t)\in\mathfrak{M}^Q$, *причем с вер.* 1:

$$\langle\tilde{q}(\cdot,\ \Gamma)\rangle_t=\int_0^t \Pi(s,\ \eta_s,\ \Gamma)\,ds,\quad \langle\tilde{\eta}_c^{(i)},\ \tilde{\eta}_c^{(j)}\rangle_t=\int^t a^{ij}(s,\ \eta_s)\,ds \tag{10'}$$

для всех $t\in[0,\ T]$, $\Gamma\in\mathscr{B}_m\cap\overline{U(0)}$, $i,\ j=1$,

Доказательство. Пусть $\tilde{\theta}_{(\cdot)}\in B_0[0,\ T]$, а $\mathbf{P}^{\tilde{\theta}}$, $\mathbf{P}^{\tilde{\theta}}_{t',\,t''}$ — условные меры:

$$\mathbf{P}^{\tilde{\theta}}(A)=\mathbf{P}\{A\mid\theta_t(\omega)=\tilde{\theta}_t,\ 0\leqslant t\leqslant T\},\quad A\in\mathscr{F}_{0,\,T}.$$

$$\mathbf{P}^{\tilde{\theta}}_{t',\,t''}(A)=\mathbf{P}^{\tilde{\theta}}\{A\mid\eta_0^{t'}\},\quad A\in\mathscr{F}_{t',\,t''}.$$

Так как случайные величины $w_t-w_{t'}$, $p(B)$, где $t'\leqslant t\leqslant t''$, $B\in\mathscr{B}[t',\ t'']\times\mathscr{B}_m$ не зависят от $\mathscr{F}_{t'}^{\eta}$ и вообще от процесса θ_t, то тем самым процесс η_t относительно меры $\mathbf{P}^{\tilde{\theta}}$ в интервале $[0,\ T]$, а относительно меры $\mathbf{P}^{\tilde{\theta}}_{t',\,t''}$ в интервале $[t',\ t'']$ допускает дифференциал К. Ито (1), где $\theta_t(\omega)=\tilde{\theta}_t$ для всех $t\in[0,\ T)$, $\omega\in\Omega$, так что из условия (a_5) следует, что $\eta_t=\eta_t^{\tilde{\theta}}$ для всех $t\in[0,T]$ с вер. $\mathbf{P}^{\tilde{\theta}}=1$ и для всех $t\in[t',t'']$ с вер. $\mathbf{P}^{\tilde{\theta}}_{t',\,t''}=1$, соответственно.

Определим для всех $s,\ t$ $(0\leqslant s<t\leqslant T)$:

$$\begin{aligned}\alpha^{\tilde{\theta}}_{s,\,t}=\exp\Bigg\{&-\frac{1}{2}\int_s^t\langle C_{\tilde{\theta}_u}(u,\ \eta_u)\rangle\,du+\int_s^t C_{\tilde{\theta}_u}(u,\ \eta_u)\,d\eta_{c,\,\tilde{\theta}}(u)+\\ &+\int_s^t\int_{R_m}\log\rho^{-1}_{\tilde{\theta}_u}(u,\ \eta_u,\ y)\,q_{\tilde{\theta}}(du,\ dy)+\int_s^t\int_{R_m}(1-\rho^{-1}_{\tilde{\theta}_u}(u,\ \eta_u,\ y)+\\ &+\log\rho^{-1}_{\tilde{\theta}_u}(u,\ \eta_u,\ y))\,\Pi_{\tilde{\theta}_u}(u,\ \eta_u,\ dy)\,du\Bigg\},\end{aligned}\tag{11}$$

где

$$\left.\begin{aligned}&q_{\tilde{\theta}}(t,\ \Gamma)=p(t,\ \Gamma)-\int_0^t \Pi_{\tilde{\theta}_u}(u,\ \eta_u,\ \Gamma)\,du,\\ &\eta_{c,\,\tilde{\theta}}(t)=\eta_t-\int_0^t A_{\tilde{\theta}_u}(u,\ \eta_u)\,du-\int_0^t\int_{R_m} yq_{\tilde{\theta}}(du,\ dy).\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

Так как $\eta_{c,\tilde{0}}(t)$ и $q_{\tilde{0}}(t, \Gamma)$ выражаются через стохастические интегралы по винеровскому процессу и пуассоновские меры, то $q_{\tilde{0}}(t, \Gamma) \in \mathfrak{M}^{\mathbf{P}^{\tilde{0}}}$, $\eta^{(i)}_{c,\tilde{0}}(t) \in \mathfrak{M}^{\mathbf{P}^{\tilde{0}}}$, причем с вер. $\mathbf{P}^{\tilde{0}} = 1$:

$$\langle q^{\tilde{0}}(\cdot, \Gamma)\rangle_t = \int_0^t \Pi_{\tilde{0}_u}(u, \eta_u, \Gamma)\,du, \quad \langle \eta^{(i)}_{c,\tilde{0}}, \eta^{(j)}_{c,\tilde{0}}\rangle_t = \int_0^t a^{ij}(s, \eta_s)\,ds$$

для всех $t \in [0, T]$, $\Gamma \in \mathscr{B}_m \cap \overline{U(0)}$, $i, j = 1, \quad m$.

Легко проверить непосредственно, что процесс $(\eta_t, \mathscr{F}^\eta_t, \mathbf{P}^{\tilde{0}})$ удовлетворяет в силу предположений теоремы условиям теоремы 2 [1] и, тем самым, мы можем определить абсолютно непрерывную замену меры:

$$\mathbf{Q}^{\tilde{0}}(A) = \int_A \alpha^{\tilde{0}}_{0,T}\,d\mathbf{P}^{\tilde{0}}, \quad A \in \mathscr{F}^\eta,$$

причем $\tilde{q}(t, \Gamma)$, $\tilde{\eta}_c(t)$ принадлежат $\mathfrak{M}^{\mathbf{Q}^{\tilde{0}}}$ и выполняются соотношения (10′).

Покажем теперь, что мера $\mathbf{Q}^{\tilde{0}}$ в действительности не зависит от фиксированной траектории $\tilde{\theta}_{(\cdot)}$. Пусть $\tilde{\theta}'_{(\cdot)}$, $\tilde{\theta}''_{(\cdot)}$ принадлежат $B_0\,[0, T]$. Так как для каждого $\tilde{\theta}_{(\cdot)} \in B_0\,[0, T]$ $\alpha^{\tilde{0}}_{0,T}$ положительна и конечна с вер. $\mathbf{P}^{\tilde{0}} = 1$, то по определению:

$$\frac{d\mathbf{Q}^{\tilde{0}'}}{d\mathbf{Q}^{\tilde{0}''}} = \frac{\alpha^{\tilde{0}'}_{0,T}}{\alpha^{\tilde{0}''}_{0,T}} \cdot \frac{d\mathbf{P}^{\tilde{0}'}}{d\mathbf{P}^{\tilde{0}''}}$$

По теореме 5 [1], воспользовавшись соотношениями (12), нетрудно подсчитать, что правая часть последнего равенства тождественно равна 1. Возможность пользоваться этой теоремой следует из $(a_1)-(a_5)$ из (a_5) следует, что мера $\mathbf{P}^{\tilde{0}}$ однозначно определяется через $A_{\tilde{0}_{(\cdot)}}(\cdot, \cdot)$, $\mathrm{A}(\cdot, \cdot)$, $\Pi_{\tilde{0}_{(\cdot)}}(\cdot, \cdot, \cdot)$ *). Так что в дальнейшем будем обозначать $\mathbf{Q}^{\tilde{0}}$ просто $\mathbf{Q}$.

По определению имеем:

$$\mathbf{Q}_{t',t''}(A) = \int_A \alpha^{\tilde{0}}_{t',t''}\,d\mathbf{P}^{\tilde{0}}_{t',t''}, \quad A \in \mathscr{F}^\eta_{t',t''},$$

и, таким образом,

$$\frac{d\mathbf{P}^{\tilde{0}}_{t',t''}}{d\mathbf{Q}_{t',t''}} = (\alpha^{\tilde{0}}_{t',t''})^{-1}.$$

Тогда из леммы 2 [5] следует, что $\mathbf{P}^{\mathfrak{B}}_{t',t''} \ll \mathbf{Q}_{t',t''}$ и

$$\frac{d\mathbf{P}^{\mathfrak{B}}_{t',t''}}{d\mathbf{Q}_{t',t''}} = \int_{B_0\,[0,T]} (\alpha^{\tilde{0}}_{t',t''})^{-1}\,\mathbf{R}^{\mathfrak{B}}(d\tilde{\theta}_{(\cdot)}) = \alpha^{\mathfrak{B}}_{t',t''}.$$

Для доказательства леммы остается получить (9), для чего поступим аналогично [5], [7]. Сперва, по обобщенной формуле К. Ито (см., напр., [2]), вос-

*) Так как это не вызовет недоразумений, будем обозначать $\mathbf{P}^{\tilde{0}}$ также сужение меры $\mathbf{P}^{\tilde{0}}$ на $\mathscr{F}^\eta$ (это относится и к мере $\mathbf{P}$ в дальнейшем).

пользовавшись неравенствами $(a_1)-(a_2)$, а также соотношениями (10), (12), из (11) получаем:

$$(\alpha^{\tilde{0}}_{t',\,t})^{-1}=1-\int\limits_{t'}^{t}(\alpha^{\tilde{0}}_{t',\,s})^{-1}C_{\tilde{0}_s}(s,\ \eta_s)\,d\tilde{\eta}_c(s)-\int\limits_{t'}^{t}\int\limits_{R_m}(\alpha^{\tilde{0}}_{t',\,s})^{-1}$$

$$\left(1-\rho_{\tilde{0}_s}(s,\ \eta_s,\ y)\right)\tilde{q}(ds,\ dy).$$

Если при интегрировании последнего выражения по $\mathbf{R}^{\mathfrak{B}}(d\tilde{\theta}_{(\cdot)})$ можно переменить порядок интегрирования в стохастических интегралах, то по лемме 2 [5]:

$$\alpha^{\mathfrak{B}}_{t',\,t}=1-\int\limits_{t'}^{t}\alpha^{\mathfrak{B}}_{t',\,s}\,\bar{C}(s)\,d\tilde{\eta}_c(s)-\int\limits_{t'}^{t}\int\limits_{R_m}\alpha^{\mathfrak{B}}_{t',\,s}\left(1-\bar{\rho}(s,\ y)\right)\tilde{q}(ds,\ dy). \tag{13}$$

Совершенно аналогично, как в [5], [7], доказывается единственность представления $\alpha^{\mathfrak{B}}_{t',\,t}$, удовлетворяющего разложению (13), в виде формулы (9). Возможность перемены порядка интегрирования следует из леммы 2 [7] $(a_1)-(a_3)$ и теоремы 1 [1], согласно которой:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}^{\mathfrak{B}}_{t',\,t}}(\alpha^{\tilde{0}}_{t',\,t})^{-2}=\mathbf{E}_{\mathbf{P}^{\mathfrak{B}}_{t',\,t}}\mathbf{E}_{\mathbf{P}^{\tilde{0}}_{t',\,t}}(\alpha^{\tilde{0}}_{t',\,t})^{-2}\leqslant\exp\{(t-t')\,K(2)\}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Для любого* $\Gamma\in\mathscr{B}_m\cap\bar{U}(\bar{0})$, $i=1,\ \ldots,\ m$ $q(t,\ \Gamma)\in\mathfrak{M}^{\mathbf{P}}$, $\tilde{\eta}_c^{(i)}(t)\in\mathfrak{M}^{\mathbf{P}}$, *причем выполняются соотношения* (3′).

Доказательство. Проверим только часть леммы, касающуюся $\bar{q}\ (t,\ \Gamma)$, так как другая часть получается аналогично. Обозначим $\alpha_{s,\,t}=\dfrac{d\mathbf{P}_{s,\,t}}{d\mathbf{Q}_{s,\,t}}$. Тогда для $\alpha_{s,\,t}$ тоже справедлива формула (13), с заменой $\bar{C}\ (t)$, $\bar{\rho}\ (t,\ y)$ на $C\ (t)$, $\rho\ (t,\ y)$. Возьмем теперь $\Gamma\in\mathscr{B}_m\cap\overline{U}\ (\bar{0})$. Покажем сперва, что с вер. 1:

$$\mathbf{E}\{p(t,\ \Gamma)-p(s,\ \Gamma)\mid\mathscr{F}^{\eta}_s\}=\mathbf{E}\left\{\int\limits_s^t\bar{\Pi}(u,\ \Gamma)\,du\mid\mathscr{F}^{\eta}_s\right\} \tag{14}$$

для всех $0\leqslant s<t\leqslant T$ Из леммы 1, соотношений (3), (10) и формулы (13) для $\alpha_{s,\,t}$:

$$\mathbf{E}\{p(t,\ \Gamma)-p(s,\ \Gamma)\mid\mathscr{F}^{\eta}_s\}=\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_{s,\,t}}\alpha_{s,\,t}\left(p(t,\ \Gamma)-p(s,\ \Gamma)\right)=$$

$$=\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_{s,\,t}}\Bigg(\Bigg(\int\limits_s^t\int\limits_{R_m}\chi_\Gamma(y)\,\tilde{q}(du,\ dy)+$$

$$+\int\limits_s^t\Pi(u,\ \eta_u,\ \Gamma)\,du\Bigg)\Bigg(1-\int\limits_s^t\alpha_{s,\,u}\,C(u)\,d\tilde{\eta}_c(u)-$$

$$-\int\limits_s^t\int\limits_{R_m}\alpha_{s,\,u}\left(1-\rho(u,\ y)\right)\tilde{q}(du,\ dy)\Bigg)\Bigg)=\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_{s,\,t}}\alpha_{s,\,t}\int\limits_s^t\Pi(u,\ \eta_u,\ \Gamma)\,du-$$

$$-\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_{s,\,t}}\int\limits_s^t\int\limits_{R_m}\chi_\Gamma(y)\left(1-\bar{\rho}(u,\ y)\right)\alpha_{s,\,u}\,\Pi(u,\ \eta_u,\ \Gamma)\,du=$$

$$= \int_s^t \mathbf{E}_{Q_{s,u}} \alpha_{s,u} \int_{R_m} \chi_\Gamma(y)\bar\rho(u, y)\Pi(u, \eta_u, dy)\,du +$$

$$+ \mathbf{E}_{Q_{s,t}} \int_s^t \Pi(u, \eta_u, \Gamma)\mathbf{E}_{Q_{u,t}}(\alpha_{s,t} - \alpha_{s,u})\,du.$$

(В третьем промежуточном равенстве мы воспользовались равенством (1) [2], а также $\langle \bar q\,(\quad \Gamma),\ \bar\eta_c^{(i)}\rangle_t = 0$ с вер. 1). В правой части последнего выражения первый член равен по определению правой части (14), а во втором:

$$\mathbf{E}_{Q_{u,t}}(\alpha_{s,t} - \alpha_{s,u}) = 0,$$

что доказывает (14). Нетрудно заметить, что условия (a_1), (a_3), а также интегрируемость в квадрате $\alpha_{s,t}$ обеспечивают интегрируемость в квадрате $\bar q\,(t, \Gamma) - \bar q\,(s, \Gamma)$, откуда вместе с (14) путем несложных рассуждений следует выражение для $\langle \bar q\,(\cdot, \Gamma)\rangle_t$. Лемма доказана.

Пусть $f(t) = f(t, \omega)$ – непрерывная справа кусочно постоянная функция, принимающая значения из R_m, $\mathcal{F}_t^\eta$ – измеримая в каждой точке $t \in [0, T]$, для которой:

$$\mathbf{E}\int_0^T \langle f(t)\rangle\,dt < \infty, \quad \mathbf{E}_Q\int_0^T \langle f(t)\rangle\,dt < \infty. \tag{15}$$

Тогда, согласно лемме 2 mod **P**, **Q**:

$$\int_s^t f(u)\,d\bar\eta_c(u) = \int_s^t f(u)\,d\tilde\eta_c(u) - \int_s^t \sum_{i,j=1}^m a^{ij}(u, \eta_u)\,C^{(i)}(u) f^{(j)}(u) \tag{16}$$

для любых $0 \leqslant s < t \leqslant T$. Предельным переходом (16) доказывается для любой m-мерной $\mathcal{B}\,[0, T] \times \mathcal{F}^\eta$-измеримой функции $f(t) = f(t, \omega)$, $\mathcal{F}_t^\eta$-измеримой в каждой точке $t \in [0, T]$, для которой выполняется (15). Аналогично, если $g\,(t, y) = g\,(t, y, \omega)$ – вещественная $\mathcal{B}\,[0, T] \times \mathcal{B}_m \times \mathcal{F}^\eta$ – измеримая и $\mathcal{F}_t^\eta$ – измеримая при каждом $t \in [0, T]$, $y \in R_m$ функция, для которой:

$$\mathbf{E}\int_0^T \int_{R_m} g^2(t, y)\,\bar\Pi(t, dy)\,dt < \infty,$$

$$\mathbf{E}_Q \int_0^T \int_{R_m} g^2(t, y)\,\Pi(t, \eta_t, dy)\,dt < \infty, \tag{17}$$

то согласно лемме 2 для любых $0 \leqslant s < t \leqslant$ T mod **P**, **Q**:

$$\int_s^t \int_{R_m} g(u, y)\,\bar q\,(du, dy) = \int_s^t \int_{R_m} g(u, y)\,\tilde q\,(du, dy) -$$

$$- \int_s^t \int_{R_m} g(u, y)\left(1 \quad \bar\rho(u, y)\right)\Pi(u, \eta_u, dy)\,du. \tag{18}$$

Перейдем теперь к непосредственному доказательству теоремы. С помощью несложных рассуждений (см., напр., лемму 2 [6]) получаем:

$$\xi(t'', f)-\xi(t', f)=\int_\Theta\int_\Theta \Big(f(\theta')-f(\theta)\Big)\, p_{t',t''}(\theta, d\theta')\,\pi_{t'}(d\theta)+$$

$$+\int_\Theta\int_\Theta f(\theta')(\alpha_t^{\theta,o}-1)p_{t',t''}(\theta, d\theta')\,\pi_{t'}(d\theta)+\int_\Theta\int_\Theta f(\theta')(\alpha_t^{\theta,\theta'}-\alpha_t^{\theta,o})$$

$$p_{t',t''}(\theta, d\theta')\,\pi_{t'}(d\theta)=\sum_{k=1}^{3} I_k(t', t''), \tag{19}$$

где

$$p_{t',t''}(\theta, A)=\mathbf{P}\{\theta_{t''}\in A\,|\,\theta_{t'}=\theta\},\qquad \alpha_t^{\theta,\theta'}=\frac{d\mathbf{P}_{t',t}^{\theta,\theta'}}{d\mathbf{P}_{t',t}},$$

$$\mathbf{P}_{t',t}^{\theta,\theta'}(B)=\mathbf{P}\{B\,|\,\eta_0^{t'},\ \theta_{t'}=\theta,\ \theta_{t''}=\theta'\}$$

для всех $A\in\mathscr{B}_\Theta$, $B\in\mathscr{F}_{t',t}^{\eta}$, $0\leqslant t'\leqslant t\leqslant t''\leqslant T$, $\theta\in\Theta$, $\theta'\in\Theta\cup\{o\}$, а множество $\{\omega\in\Omega,\ \theta_t(\omega)=o\}$, где $o\bar\in\Theta$, определим как Ω.

Производные мер $\alpha_t^{\theta,\theta'}$ находятся из леммы 1 и соотношений (16), (18), где условия (15), (17) легко проверяются, так что:

$$\alpha_t^{\theta,\theta'}=\exp\Bigg\{-\frac{1}{2}\int_{t'}^{t}\langle\bar C(s)-C_{\theta,\theta'}(s)\rangle\, ds+\int_{t'}^{t}\Big(\bar C(s)-C_{\theta,\theta'}(s)\Big)\, d\bar\eta_c(s)+$$

$$+\int_{t'}^{t}\int_{R_m}\log\frac{\rho_{\theta,\theta'}(s, y)}{\bar\rho(s, y)}\,\bar q(ds, dy)+$$

$$+\int_{t'}^{t}\int_{R_m}\left(1-\frac{\rho_{\theta,\theta'}(s, y)}{\bar\rho(s, y)}+\log\frac{\rho_{\theta,\theta'}(s, y)}{\bar\rho(s, y)}\right)\bar\Pi(s, dy)\, ds\Bigg\},$$

где

$$\rho_{\theta,\theta'}(t, y)=\mathbf{E}\{\rho_{\theta_t}(t, \eta_t, y)\,|\,\eta_0^t,\ \theta_{t'}=\theta,\ \theta_{t''}=\theta'\},$$

$$C_{\theta,\theta'}(t, y)=\mathbf{E}\{C_{\theta_t}(t, \eta_t)\,|\,\eta_0^t,\ \theta_{t'}=\theta,\ \theta_{t''}=\theta'\}.$$

По обобщенной формуле К. Ито:

$$\alpha_t^{\theta,\theta'}=1+\int_{t'}^{t}\Big(\bar C(s)-C_{\theta,\theta'}(s)\Big)\,\alpha_s^{\theta,\theta'}\, d\bar\eta_c(s)+$$

$$+\int_{t'}^{t}\int_{R_m}\alpha_s^{\theta,\theta'}\left(\frac{\rho_{\theta,\theta'}(s, y)}{\bar\rho(s, y)}-1\right)\bar q(ds, dy). \tag{20}$$

Неравенства $(a_1)-(a_3)$ позволяют легко доказать существование постоянной $K_5>0$, такой, что для всех t, θ, θ' с вер. 1:

$$\int_{t'}^{t}\langle\bar C(s)-C_{\theta,\theta'}(s)\rangle\, ds+$$

$$+\int_{t'}^{t}\int_{R_m}\left(\frac{\rho_{\theta,\theta'}(s, y)}{\bar\rho(s, y)}-1\right)^2\bar\Pi(s, dy)\, ds\leqslant K_5(t-t'). \tag{21}$$

Обозначим для краткости:

$$I_t^{\theta,\theta'} = 1 + \int_{t'}^{t} \left(\bar C(s) - C_{\theta,\theta'}(s)\right) d\bar\eta_c(s) + \int_{t'}^{t} \int_{R_m} \left(\frac{\rho_{\theta,\theta'}(s, y)}{\bar\rho(s, y)} - 1\right) \bar q(ds, dy).$$

Докажем теперь несколько вспомогательных предложений.

Лемма 3. *Существуют* $K_6 > 0$, $K_7 > 0$, *такие, что для всех* t, θ, θ' *с вер.* 1:

$$\mathbf{E}_{t'}^{*)} (\alpha_t^{\theta,\theta'} - 1)^2 \leqslant K_6 (t - t'), \quad \mathbf{E}_{t'} (\alpha_t^{\theta,\theta'} - I_t^{\theta,\theta'})^2 \leqslant K_7 (t - t')^2.$$

Доказательство. Из (21) следует, что $\mathbf{E}_{t'} (I_t^{\theta,\theta'} - 1)^2 \leqslant K_5 (t - t')$. Таким же образом, как в лемме 2 [1] можно показать, что $\mathbf{E}_{t'} (\alpha_t^{\theta,\theta'})^2 < \infty$, так что:

$$\mathbf{E}_{t'} (\alpha_t^{\theta,\theta'} - 1)^2 \leqslant 2\mathbf{E}_{t'} (\alpha_t^{\theta,\theta'} - I_t^{\theta,\theta'})^2 + 2\mathbf{E}_{t'} (I_t^{\theta,\theta'} - 1)^2.$$

Еще раз воспользовавшись (21), получаем:

$$\mathbf{E}_{t'} (\alpha_t^{\theta,\theta'} - 1)^2 \leqslant 2K_5 \int_{t'}^{t} \mathbf{E}_{t'} (\alpha_s^{\theta,\theta'} - 1)^2 ds + 2K_5 (t - t'),$$

откуда следует первое неравенство леммы. Далее,

$$\mathbf{E}_{t'} (\alpha_t^{\theta,\theta'} - I_t^{\theta,\theta'})^2 \leqslant K_5 \int_{t'}^{t''} \mathbf{E}_{t'} (\alpha_s^{\theta,\theta'} - 1)^2 ds \leqslant \frac{1}{2} K_5 K_6 (t - t')^2.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Существует* ε*-функция* $\varepsilon_h^{(2)}(t, x, \theta)$ *такая, что с вер.* 1:

$$\mathbf{E}_{t'} \left(I_3(t', t'')\right)^2 \leqslant \mathbf{E}_{t'} \int_{t'}^{t} \int_{\Theta} \varepsilon_{t''-t'}^{(2)}(t, \eta_t, \theta)\, \pi_{t'}(d\theta)\, dt.$$

Доказательство. Пусть $K(f) = \sup\limits_{\theta\in\Theta} |f(\theta)|$, $\delta > 0$ и $A_{\theta,\delta} = \{\theta' \in \Theta, \rho(\theta', \theta) \leqslant \delta\}$. В силу стохастической непрерывности процесса θ_t всегда можно выбрать $\delta = \delta(t, \theta, h)$ $\mathscr{B}[0, T] \times \mathscr{B}_\theta$ — измеримым и монотонно убывающим к нулю, когда $h \to 0$ при любых t, θ, таким, чтобы

$$p_{t,t+h}(\theta, \Theta \setminus A_{\theta,\delta}) = \varepsilon_h^{(3)}(t, \theta) \tag{22}$$

представляло собой ε-функцию. Тогда, согласно лемме 3:

$$\mathbf{E}_{t'} \left(\int_{\Theta \setminus A_{\theta,\delta}} f(\theta') (\alpha_t^{\theta,\theta'} - \alpha_t^{\theta,\theta^o}) p_{t',t''}(\theta, d\theta')\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant p_{t',t''}(\theta, \Theta \setminus A_{\theta,\delta}) \cdot 2K^2(f) \left(\mathbf{E}_{t'} (\alpha_t^{\theta,\theta'} - 1)^2 + \mathbf{E}_{t'} (\alpha_t^{\theta,\theta^o} - 1)^2\right) \leqslant$$

$$\leqslant 4K^2(f) K_6 (t'' - t')\, \varepsilon_{t''-t'}^{(3)}(t', \theta).$$

---

*) $\mathbf{E}_{t'} = \mathbf{E}\{\cdot \mid \eta_0^{t'}\}$.

Принимая во внимание второе неравенство леммы 3, нам достаточно получить оценку для:

$$\gamma(t'', t') = \mathbf{E}_{t'} \int\limits_{A_{\theta,\delta}} (I_{t''}^{\theta,\theta'} - I_{t''}^{\theta,o})^2 p_{t',t''}(\theta, d\theta') =$$

$$= \mathbf{E}_{t'} \int\limits_{A_{\theta,\delta}} \Biggl\{ \int\limits_{t'}^{t''} \langle C_{\theta,\theta'}(t) - C_{\theta,o}(t) \rangle\, dt +$$

$$+ \int\limits_{t'}^{t''} \int\limits_{R_m} \left(\frac{\rho_{\theta,\theta'}(t, y) - \rho_{\theta,o}(t, y)}{\bar\rho(t, y)} \right)^2 \bar\Pi(t, dy)\, dt \Biggr\} p_{t',t''}(\theta, d\theta).$$

Члены последней суммы обозначим соответственно $\gamma^c(t', t'')$ и $\gamma^\Pi(t', t'')$ $\bigl(\gamma^c(t', t'') + \gamma^\Pi(t', t'') = \gamma(t', t'')\bigr)$. Так как оба они оцениваются подобным образом, возьмем, напр., $\gamma^\Pi(t', t'')$. Аналогично равенству (19) можем записать:

$$\rho_{\theta,\theta'}(t, y) - \rho_{\theta,o}(t, y) =$$

$$= \int\limits_{\Theta} \bigl(\rho_{\theta''}(t, \eta_t, y) - 1\bigr) \frac{d\mathbf{P}_{t',t,t''}^{\theta,\theta'',\theta'}}{d\mathbf{P}_{t',t,t''}^{\theta,o,\theta'}} \mathbf{P}\{\theta_t \in d\theta'' \mid \theta_{t'} = \theta,\ \theta_{t''} = \theta'\} -$$

$$- \int\limits_{\Theta} \bigl(\rho_{\theta''}(t, \eta_t, y) - 1\bigr) \frac{d\mathbf{P}_{t',t,t''}^{\theta,\theta'',o}}{d\mathbf{P}_{t',t,t''}^{\theta,o,o}} p_{t',t}(\theta, d\theta''), \tag{24}$$

где:

$$\mathbf{P}_{t',t,t''}^{\theta,\theta'',\theta'}(A) = \mathbf{P}\{A \mid \eta_0^{t'},\ \theta_{t'} = \theta,\ \theta_t = \theta'',\ \theta_{t''} = \theta'\}, \quad A \in \mathcal{F}_{t',t}^{\eta}.$$

Производные мер, стоящие под знаками интеграла в (24), подсчитываются из леммы 1 также, как и $\alpha_t^{\theta,\theta'}$, причем остается в силе первая оценка леммы 3, а именно:

$$\mathbf{E}_{t'} \left(\frac{d\mathbf{P}_{t',t,t''}^{\theta,\theta'',\theta'}}{d\mathbf{P}_{t',t,t''}^{\theta,o,\theta'}} - 1 \right)^2 \leqslant K_6(t - t') \tag{25}$$

для всех $t \in [t', t'']$, $\theta \in \Theta$, $\theta' \in \Theta \cap \{o\}$. Заметим далее, что из (a_1) следует существование $K_8 > 0$, такой что для всех t, x, θ:

$$\int\limits_{R_m} \bigl(1 - \rho_\theta(t, x, y)\bigr)^2 \Pi(t, x, dy) \leqslant K_8. \tag{26}$$

Из (a_1), (23), (24), (25) и (26) получаем:

$$\gamma^\Pi(t', t'') \leqslant e^{K_1} \int\limits_{A_{\theta,\delta}} \Biggl\{ \mathbf{E}_{t'} \int\limits_{t'}^{t''} \int\limits_{R_m} \Biggl(\int\limits_{\Theta} \bigl(\rho_{\theta''}(t, \eta_t, y) - 1\bigr) \times$$

$$\times \mathbf{P}\{\theta_t \in d\theta'' \mid \theta_{t'} = \theta,\ \theta_{t''} = \theta'\} -$$

$$- \int\limits_{\Theta} \bigl(\rho_{\theta''}(t, \eta_t, y) - 1\bigr) p_{t',t}(\theta, d\theta'') \Biggr)^2 \Pi(t, \eta_t, dy)\, dt \Biggr\} \times$$

$$\times p_{t',t''}(\theta, d\theta') + 2K_6 K_8 e^{K_1} (t'' - t')^2. \tag{27}$$

В (27) область интегрирования по $d\theta''$ разобьем на две части — $A_{\theta,\delta}$ и $\Theta\setminus A_{\theta,\delta}$. Оценив интегралы по второй из них согласно (22) и воспользовавшись условием (a_4), для доказательства леммы достаточно получить оценку для:

$$\int\limits_{A_{\theta,\delta}}\Bigg\{\mathbf{E}_{t'}\int\limits_{t'}^{t''}\int\limits_{R_m}\Big(\rho_\theta(t,\eta_t,y)-1\Big)^2\Big(\mathbf{P}\{\theta_t\in A_{\theta,\delta}\mid\theta_{t'}=\theta,\ \theta_{t''}=\theta'\}-$$

$$-p_{t',t}(\theta,A_{\theta,\delta})\Big)^2\Pi(t,\eta_t,dy)\,dt\Bigg\}p_{t',t''}(\theta,d\theta')\leqslant$$

$$\leqslant 2K_5\int\limits_{t'}^{t''}\int\limits_{A_{\theta,\delta}}(1-\mathbf{P}\{\theta_t\in A_{\theta,\delta}\mid\theta_{t'}=\theta,\ \theta_{t''}=\theta'\})^2p_{t',t''}(\theta,d\theta')+$$

$$+2K_5\Big(1-p_{t',t}(\theta,A_{\theta,\delta})\Big)^2p_{t',t''}(\theta,A_{\theta,\delta})\Bigg\}\,dt.$$

Так как квадраты в правой части последнего неравенства меньше первых степеней, то тем самым последнее выражение меньше

$$4K_5\int\limits_{t'}^{t''}p_{t',t}(\theta.\ \Theta\setminus A_{\theta,\delta})\,dt\leqslant 4K_5\,(t''-t')\,\varepsilon^{(3)}_{t''-t'}(t',\theta).$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Существует* ε-*функция* $\varepsilon^{(4)}_h(t,x,\theta)$, *такая, что с вер.* 1:

$$\mathbf{E}_{t'}\Big(I_2(t',t'')-\int\limits_{t'}^{t''}b(t,f)\,d\bar\eta_c(t)-\int\limits_{t'}^{t''}\int\limits_{R_m}\varphi(t,y,f)\,\bar q(dt,dy)\Big)^2\leqslant$$

$$\leqslant\mathbf{E}_{t'}\int\limits_{t'}^{t''}\int\limits_{\Theta}\varepsilon^{(4)}_{t''-t'}(t,\eta_t,\theta)\,\pi_{t'}(d\theta)\,dt. \tag{28}$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что в силу ранее доказанных свойств $\bar\eta_c(t)$, $\bar q(t,\Gamma)$, а также неравенств типа (21) стохастические интегралы в (28) имеют смысл. Далее, согласно лемме 3, можно в $I_2(t',t'']$ вместо $\alpha^{\theta;\,\theta'}_{t''}-1$ подставить $I^{\theta;\,\theta'}_{t''}-1$; естественным образом левую часть (28) разобьем на две части, которые оцениваются одинаково, так что возьмем, напр.:

$$\int\limits_{\Theta}\int\limits_{\Theta}f(\theta')\Bigg(\int\limits_{t'}^{t''}\Big(\bar C(t)-C_{\theta,o}(t)\Big)\,d\bar\eta_c(t)\Bigg)p_{t',t''}(\theta,d\theta')\,\pi_{t'}(d\theta)-$$

$$-\int\limits_{t'}^{t''}\int\limits_{\Theta}f(\theta)\Big(\bar C(t)-C_\theta(t,\eta_t)\Big)\pi_t(d\theta)\,d\bar\eta_c(t). \tag{29}$$

Заметим теперь, что лемма 2 [7] и ограничения в (a_2) дают нам право переменить порядок интегрирования в первом слагаемом (29). Далее, область интегрирования по $d\theta'$ разобьем на $A_{\theta,\delta}$ и $\Theta\setminus A_{\theta,\delta}$ и оценим интеграл по $\Theta\setminus A_{\theta,\delta}$, как в предыдущей лемме. В области $A_{\theta,\delta}$ воспользуемся непрерывностью функции $f(\theta)$ и неравенством (8), замечая, что поскольку $\varepsilon^{(f)}_\delta(t,\theta)$ непрерывна по t, θ, δ, то функция $\varepsilon^{(f)}_{\delta(t,x,h)}(t,\theta)$ окажется ε-функцией; тем самым мы можем в области $A_{\theta,\delta}$ заменить $f(\theta')$ на $f(\theta)$. Проделав все перечисленные выше операции, нам остается оценить:

$$\mathbf{E}_{t'}\left(\int_{t'}^{t''}\left\{\int_{\Theta} f(\theta)\left(\bar{C}(t)-C_{\theta,\circ}(t)\right)\pi_{t'}(d\theta)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int_{\Theta} f(\theta)\left(\bar{C}(t)-C_{\theta}(t,\ \eta_t)\,\pi_t(d\theta)\right)\right\}d\bar{\eta}_c(t)\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant 3\mathbf{E}_{t'}\int_{t'}^{t''}\left(\xi(t,f)-\xi(t',f)\right)^2\langle\bar{C}(t)\rangle\,dt+$$

$$+3\mathbf{E}_{t'}\int_{t'}^{t''}\left\langle\int_{\Theta} f(\theta)\,C_{\theta}(t,\ \eta_t)\,\pi_t(d\theta)-\int_{\Theta} f(\theta)\,C_{\theta}(t,\ \eta_t)\,\pi_{t'}(d\theta)\right\rangle dt+$$

$$+3\mathbf{E}_{t'}\left(\int_{t'}^{t''}\int_{\Theta} f(\theta)\left(C_{\theta}(t,\ \eta_t)-C_{\theta,\circ}(t)\right)\pi_{t'}(d\theta)\,d\bar{\eta}_c(t)\right)^2=$$

$$=3\sum_{k=1}^{3} i_k(t',\ t'').$$

Фиксируем теперь точки $t,\ t'$ $(t''\geqslant t\geqslant t')$ и рассмотрим ограниченную вещественную функцию $\varphi_t(\theta)=\varphi_t(\theta,\ \omega)$, непрерывную по θ для почти всех ω, и $\mathcal{F}_t^{\eta}$ – измеримую для всех $\theta\in\Theta$. Тогда для $\varphi_t(\theta)$, t', t мы можем написать равенство, аналогичное (19), причем в силу оценок леммы 3, а также (22) и (8) легко доказывается существование ε-функции $\bar{\varepsilon}_h^{(\varphi)}(t,\ x,\ \theta)$, такой, что:

$$\mathbf{E}_{t'}\left(\int_{\Theta}\varphi_t(\theta)\,\pi_t(d\theta)-\int_{\Theta}\varphi_t(\theta)\,\pi_{t'}(d\theta)\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant\mathbf{E}_{t'}\int_{\Theta}\bar{\varepsilon}_{t-t'}^{(\varphi)}(t,\ \eta_t,\ \theta)\,\pi_{t'}(d\theta). \tag{30}$$

Воспользовавшись (30), мы можем оценить $i_1(t',\ t'')$ и $i_2(t',t'')$, так как из условий $(a_2)-(a_4)$ следует ограниченность и непрерывность по θ функций:

$$\varphi_t^k(\theta)=f(\theta)\sum_{j=1}^{m} C_{\theta}^{(j)}(t,\ \eta_t)\,B^{jk}(t,\ \eta_t),\qquad k=1,$$

Для оценки последнего члена опять переменим порядок интегрирования. Тогда:

$$i_3(t',\ t'')\leqslant K^2(f)\int_{\Theta}\int_{t'}^{t''}\mathbf{E}_{t'}\langle C_{\theta}(t,\ \eta_t)-C_{\theta,\circ}(t)\rangle\,dt\,\pi_{t'}(d\theta).$$

Разницу под знаком математического ожидания можно записать аналогично формуле (24); дальнейшие рассуждения совпадают с оценкой $\gamma^{\text{п}}(t',\ t'')$ в лемме 4. Лемма доказана.

Возвращаясь к доказательству теоремы, заметим, что неравенство (6) следует теперь из лемм 4, 5 и ограниченности $\mathcal{A}f(t,\ \theta)$. Для завершения доказательства нужно получить свойство мартингала для процесса:

$$\xi(t,\ f)-\int_0^t a(s,\ f)\,ds.$$

Согласно формуле (19), так как при $t''\to t'$.

$$\frac{I_1(t', t'')}{t''-t'}\to\mathcal{A}f(t,\ \theta),$$

причем выполняется неравенство (7), для этой цели нам нужно оценить:

$$\mathbf{E}_{t'}\left|\int\limits_{t'}^{t''}\left(\int\limits_{\Theta}\mathcal{A}f(t',\ \theta)\,\pi_{t'}(d\theta)-\int\limits_{\Theta}\mathcal{A}f(t,\ \theta)\,\pi_t(d\theta)\right)dt\,\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{t'}^{t''}\mathbf{E}_{t'}^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{\Theta}\mathcal{A}f(t',\ \theta)\,\pi_{t'}(d\theta)-\int\limits_{\Theta}\mathcal{A}f(t,\ \theta)\,\pi_t(d\theta)\right)^2dt.$$

В силу ограниченности и непрерывности по t, θ $\mathcal{A}f(t,\ \theta)$ мы можем воспользоваться (8) и (30), и тем самым окажется, что последнее выражение суть порядка $o(t''-t')$ (в смысле ε-функции). Теорема доказана.

В качестве важного приложения теоремы рассмотрим случай, когда процесс θ_t принимает конечное число значений $1, 2, \ldots, N$, причем:

$$|\,\mathbf{P}\,\{\theta_{t+h}=j\,|\,\theta_t=i\}-\delta_{ij}-hq_{ij}(t)\,|\leqslant\varepsilon(h)\,h \qquad (31$$

для всех $0\leqslant t<t+h\leqslant T$, $i,\ j=1,\ \ldots,\ N$; $q_{ij}(t)$ ограничены и непрерывны по t, а $\varepsilon(h)\downarrow 0\ (h\downarrow 0)$. Обозначим

$$\pi_k(t)=\mathbf{P}\,\{\theta_t=k\,|\,\eta_0^t\},\quad 0\leqslant t\leqslant T,\quad k=1,\ \ldots,\ N,$$

а $\zeta_t=\zeta_t(\omega)$, $0\leqslant t\leqslant T-m+N$-мерный процесс, определяемый как

$$\zeta_t=\left(\eta_t^{(1)},\ \ldots,\ \eta_t^{(m)},\ \pi_\rho(t),\ \ldots,\ \pi_N(t)\right),$$

где η_t удовлетворяет предположениям теоремы, за исключением (a_4), которое в этом случае теряет смысл. Пусть

$$a^{(i)}(t,\ z),\ b^{ij}(t,\ z),\ \varphi^{(i)}(t,\ z,\ y),\ i=1,\ \ldots,\ m+N,\ j=1,\ \ldots,\ m,$$

$$t\in[0,\ T],\ z=(x,\ \pi_1,\quad \pi_N),\ x\in R_m,\ y\in R_m,\ 0\leqslant\pi_k\leqslant 1,\ k=1,\ldots N,$$

определяются следующим образом:

$$a^{(i)}(t,\ z)=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{N}A_k^{(i)}(t,\ x)\,\pi_k, & i=1,\ \ldots,\ m,\\ \sum\limits_{k=1}^{N}q_{ki}(t)\,\pi_k, & i=m+1,\ \ldots,\ m+N,\end{cases}$$

$$b^{ij}(t,\ z)=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\ 1\leqslant i\leqslant m,\\ \pi_i\left(\sum\limits_{k=1}^{N}C_k^{(j)}(t,\ x)\,\pi_k-C_i^{(j)}(t,\ x)\right), & m+1\leqslant i\leqslant m+N,\end{cases}$$

$$\varphi^{(j)}(t,\ z,\ y)=\begin{cases}y^{(i)}, & i=1,\ \ldots,\ m,\\ \pi_i\left(\dfrac{\rho_i(t,\ x,\ y)}{\sum\limits_{k=1}^{N}\rho_k(t,\ x,\ y)\,\pi_k}-1\right), & i=m+1,\ \ldots,\ m+N.\end{cases}$$

Тогда для процесса ζ_t справедливо разложение:

$$\zeta_t=\zeta_0+\int_0^t a(s,\ \zeta_s)\,ds+\int_0^t b(s,\ \zeta_s)\,d\tilde{\eta}_c(s)+$$

$$+\int_0^t\int_{R_m}\varphi(s,\ \zeta_s,\ y)\,\tilde{q}(ds,dy), \tag{32}$$

где $a(t,\ z)=\left(a^{(i)}(t,\ z)\right)$, $\varphi(t,\ z,\ y)=\left(\varphi^{(i)}(t,\ z,\ y)\right)$, $b(t,z)=\left(b^{(ij)}(t,z)\right)$ — соответственно два $m+N$-мерных вектора и $(m+N)\times m$ матрица.

С помощью теоремы 3 [1] сформулируем теперь достаточные условия для того, чтобы (32) представляло собой стохастическое уравнение в смысле К. Ито.

Пусть для $(\theta_t,\ \eta_t)$ *(где* θ_t *— вышеопределенный процесс, удовлетворяющий* (31)*, выполняются предположения теоремы и, кроме того, матрица* $A(t,x)$ *имеет постоянный ранг* $\tilde{r}\leqslant r$*, а мера* $\Pi(t,x,\Gamma)$ *не зависит от* x *(т.е.* $\Pi(t,x,\Gamma)=\Pi(t,\Gamma)$ *для всех* $t,\ x,\ \Gamma$*). Тогда существует* $\tilde{r}$*-мерный винеровский процесс* $(\tilde{w}_t,\ \mathcal{F}_t^\eta,\ \mathbf{Q})$*, независящий от случайной меры* $\tilde{q}(\cdot)$*, которая относительно* $\mathbf{Q}$ *является пуассоновской, такой, что процесс* $(\zeta_t,\ \mathcal{F}_t^\eta,\ \mathbf{Q})$ *является решением стохастического уравнения К. Ито:*

$$d\zeta_t=\tilde{a}(t,\ \zeta_t)\,dt+\tilde{b}(t,\ \zeta_t)\,d\tilde{w}_t+\int_{R_m}\varphi(t,\ \zeta_t,\ y)\,\tilde{q}(dt,\ dy),$$

где

$$\tilde{a}^{(i)}(t,\ z)=a^{(i)}(t,\ z)+\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{m}b^{lk}(t,\ z)\,a^{kl}(t,\ x)\right)\left(\sum_{k=1}^{N}C_k^{(l)}(t,\ x)\,\pi_k\right)+$$

$$+\int_{R_m}\varphi^{(i)}(t,\ z,\ y)\left(1-\sum_{k=1}^{N}\rho_k(t,\ x,\ y)\,\pi_k\right)\Pi(t,\ dy),\quad i=1,\ \ldots,m,$$

$$\tilde{b}(t,\ z)=b(t,\ z)\,\tilde{B}(t,\ x),$$

где $\tilde{B}(t,x)$ *—* $\tilde{r}\times m$ *— матрица, составленная из* m*-мерных векторов* $b_k(t,\ x)$*, определяемых матрицей* $A(t,x)$ (см. подробнее [2]).

Сделаем еще пару замечаний насчет условий теоремы. Неравенства в (a_1) — (a_3), по-видимому, можно ослабить, хотя они необходимы в смысле эквивалентности мер $P^{\tilde{\theta}}$, соответствующих различным реализациям $\tilde{\theta}_{(\cdot)}$ процесса $\theta_t(\omega)$; в противном случае апостериорные вероятности могут вырождаться. Что касается (a_6), то оно в настоящее время доказано при сильных ограничениях на гладкость по x для коэффициентов уравнения (1).

Автор благодарит Б. Григелиониса, Р. Ш. Липцера и А. Н. Ширяева за предоставленную ими возможность пользоваться во время работы еще не опубликованными результатами.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
3.XI.1969

Литература

1. Б. Григелионис, Об абсолютно непрерывной замене меры и марковском свойстве случайных процессов, Лит. матем. сб., **IX**, 1 (1969), 57–71.
2. Б. Григелионис, О марковском свойстве случайных процессов, Лит. матем. сб., **VII**, 3 (1968).
3. А. Н. Ширяев, Стохастические уравнения нелинейной фильтрации скачкообразных марковских процессов, Проб. перед. инф., **11**, 3 (1966), 3–22.
4. Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, Нелинейная фильтрация диффузионных марковских процессов, Труды МИАН, CIV, 1968, 135–180.
5. Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, О плотностях вероятностных мер процессов диффузионного типа, Изв. АН СССР, сер. матем., 5 (1969).
6. М. П. Ершов, Нелинейная фильтрация марковских процессов, Советско-японский симпозиум по теории вероятностей, Хабаровск, 1969.
7. Л. И. Гальчук, О плотности вероятностных мер для скачкообразных процессов, Советско-японский симпозиум по теории вероятностей, Хабаровск, 1969.
8. А. В. Скороход, Исследования по теории случайных процессов, Изд. КГУ, 1961.
9. Д. Сургайлис, О единственности решения стохастического уравнения К. Ито, Лит. матем. сб., **X**, 2 (1970).

APIE MARKOVO PROCESŲ FILTRACIJOS STOCHASTINES LYGTIS

D. Surgailis

(*Reziumė*)

Darbe gauta sistema stochastinių lygčių dvimačio Markovo proceso (θ_t, η_t) „nestebimos komponentės θ_t aposteriorinėms tikimybėms rasti, kai θ_t reikšmių skaičius yra baigtinis, o η_t — tolydinis iš dešinės procesas, tenkinantis K. Ito stochastinę lygtį (žr. (1)). Šis rezultatas yra išdava aposteriorinio vidurkio $\mathbf{E}\{f(\theta_t) \mid \eta_0^t\}$ išskaidymo tam tikrai tolydinių funkcijų $f(\theta)$ klasei, gauto bendresnio (stochastiškai tolydinio) proceso θ_t atvejui.

ON STOCHASTIC EQUATIONS IN FILTERING OF MARKOV PROCESSES

D. Surgailis

(*Summary*)

In the paper a system of stochastic equations for a posteriori probabilities of „unobservable“ component θ_t of a two-dimensional Markov process (θ_t, η_t) is given for the case when θ_t is a Markov process with a finite number of states and η_t is a right-continuous process, satisfying some stochastic K. Ito's equation (see (1)); as a result of decomposition of a posteriori expectation $\mathbf{E}\ \{f(\theta_t) \mid \eta_0^t\}$ for some class of continuous functions $f(\theta)$ when θ_t is a more general (stochastically continuos) process.