X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 3
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1970

УДК – 517.949.2

О ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЦЕЛЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА. I–II

Л. Навицкайте

В работе изучается система дифференциально-разностных уравнений

$$\mathbf{L}[F(z)] \equiv A_1(z) F(z+\alpha_1) + A_n(z) F(z+\alpha_n) + \\ + \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=0}^{s_k} A_{kl}(z) F^{(l)}(z+\alpha_k) = G(z), \tag{1}$$

где неизвестная $F(z)$, ее производные $F^{(l)}(z)$ и свободный член $G(z)$ – одностолбцевые матрицы вида:

$$F(z) = \begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \\ \cdots \\ f_m(z) \end{pmatrix}, \quad F^{(l)}(z) = \begin{pmatrix} f_1^{(l)}(z) \\ f_2^{(l)}(z) \\ \cdots\cdot \\ f_m^{(l)}(z) \end{pmatrix}, \quad G(z) = \begin{pmatrix} g_1(z) \\ g_2(z) \\ \cdots \\ g_m(z) \end{pmatrix},$$

а коэффициенты $A_1(z)$, $A_n(z)$, $A_{kl}(z)$ $|k=2, 3, \ldots, n-1;\ l=0, 1, \ldots, s_k|$ – квадратные матрицы размера $(m \times m)$.

Числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ предполагаем действительными и расположенными в порядке возрастания: $\alpha_1 < \alpha_2 < \quad < \alpha_n$.

Заметим, что в уравнение (1) производные неизвестной $F(z)$ входят только в членах, соответствующих промежуточным шагам α_k, $1 < k < n$. В старших же членах, т. е. в членах, соответствующих крайним шагам α_1 и α_n, производные от неизвестной отсутствуют.

Кроме того, на протяжении всей работы считаем, что

1) коэффициенты $A_1(z)$, $A_n(z)$, $A_{kl}(z)$ $|k=2, 3. \ldots, n-1;\ l=0, 1, \ldots, s_k$ – целые матрицы конечного порядка, или, другими словами, все элементы этих матриц – целые функции конечного порядка, а свободный член $G(z)$ – целая или мероморфная матрица;

2) определители старших коэффициентов $|A_1(z)|$ и $|A_n(z)|$ не равны тождественно нулю.

При этих условиях изучаются целые и мероморфные решения неоднородного уравнения (1) и однородного уравнения

$$L[F(z)] = 0. \tag{2}$$

В работе показано, что уравнение (1) имеет мероморфное решение, а уравнение (2) – бесконечное множество линейно независимых мероморфных решений.

При некоторых дополнительных условиях доказывается существование целых решений как неоднородного уравнения (1), так и однородного уравнения (2).

Заметим, что чисто разностное уравнение вида

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(z) f(z+\alpha_k) = g(z)$$

с целыми коэффициентами (конечного порядка) изучалось Н. Э. Нэрлундом [8], [9] в случае, когда шаги α_k образуют арифметическую прогрессию, и А. Г. Нафталевичем [3] в случае, когда шаги α_k — произвольные действительные числа.

I. ФОРМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

§ 1. Формальные решения

1. Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение

$$\mathbf{L}[F(z)] \equiv A_1(z) F(z+\alpha_1) + A_n(z) F(z+\alpha_n) + \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=0}^{s_k} \times$$
$$\times A_{kl}(z) F^{(l)}(z+\alpha_k) = G(z), \tag{1}$$

где, как это уже отмечалось во введении, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — действительные числа, неизвестная $F(z)$ и свободный член $G(z)$ — одностолбцевые матрицы, и коэффициенты $A_1(z)$, $A_n(z)$, все $A_{kl}(z)$ — квадратные матрицы. Предполагаем, что $G(z)$ — целая или мероморфная матрица, $A_1(z)$, $A_n(z)$, $A_{kl}(z)$ — целые матрицы, и ни один из детерминантов $|A_1(z)|$ и $|A_n(z)|$ не равен тождественно нулю.

Нам будет удобно дифференциально-разностному оператору $\mathbf{L}[F(z)]$, стоящему в правой части уравнения (1), придать вид чисто дифференциального оператора. Для этого определим дифференциальные операторы D и $e^{\alpha D}$ (α — действительное или мнимое число) равенствами

$$D F(z) = F'(z)$$

$$e^{\alpha D} F(z) = F(z+\alpha).$$

Повод для такого определения оператора $e^{\alpha D}$ дает разложение матрицы $F(z+\alpha)$ в ряд Тейлора

$$F(z+\alpha) = F(z) + \frac{\alpha}{1!} F'(z) + \frac{\alpha^2}{2!} F''(z) + \ldots,$$

которое посредством оператора D может быть выражено и в таком виде

$$F(z+\alpha) = \left(1 + \frac{\alpha}{1!} D + \frac{\alpha^2}{2!} D^2 + \ldots\right) \cdot F(z) = e^{\alpha D} F(z).$$

Пользуясь этими обозначениями и общепринятыми определениями умножения и сложения операторов, оператор $\mathbf{L}[F(z)]$ можем записать в виде

$$\mathbf{L}[F(z)] = L(D) F(z),$$

где

$$L(D)=A_1(z)e^{\alpha_1 D}+A_n(z)e^{\alpha_n D}+\sum_{k=2}^{n-1}\sum_{l=0}^{s_k}A_{kl}(z)D^l e^{\alpha_k D}, \tag{1.1}$$

а уравнение (1) в виде

$$L(D)\ F(z)=G(z). \tag{1.2}$$

Заметим, что между дифференциально-разностными операторами $\mathbf{L}$ и дифференциальными операторами $L(D)$ имеется взаимно однозначное соответствие. При этом, если $\mathbf{L}\,[F(z)]$ и $\mathbf{M}\,[F(z)]$ соответствуют $L(D)$ и $M(D)$, то

$$\mathbf{L}\Big[M\,[F(z)]\Big]\equiv L(D)\cdot M(D)\ F(z).$$

2. Решение уравнения (1.2) формально можно записать

$$F(z)=L^{-1}(D)\cdot G(z). \tag{1.3}$$

Чтобы придать смысл оператору $L^{-1}(D)$, представим $L(D)$ в виде

$$L(D)=A_1(z)e^{\alpha_1 D}\Big(1-l_1(D)\Big), \tag{1.4}$$

или в виде

$$L(D)=A_n(z)e^{\alpha_n D}\Big(1-l_n(D)\Big), \tag{1.5}$$

где

$$l_1(D)=-e^{-\alpha_1 D}A_1^{-1}(z)A_n(z)e^{\alpha_n D}-\sum_{k=2}^{n-1}\sum_{l=0}^{s_k}e^{-\alpha_1 D}A_1^{-1}(z)A_{kl}(z)D^l e^{\alpha_k D} \tag{1.6}$$

а

$$l_n(D)=-e^{-\alpha_n D}A_n^{-1}(z)A_1(z)e^{\alpha_1 D}-\sum_{k=2}^{n-1}\sum_{l=0}^{s_k}e^{-\alpha_n D}A_n^{-1}(z)A_{kl}(z)D^l e^{\alpha_k D} \tag{1.7}$$

Обратный справа оператор $L^{-1}(D)$ получим из (1.4) и (1.5):

$$L^{-1}(D)=\frac{1}{1-l_1(D)}\,e^{-\alpha_1 D}A_1^{-1}(z)=[1+l_1(D)+l_1^2(D)+\ldots]\times$$
$$\times e^{-\alpha_1 D}A_1^{-1}(z)=L_1(D), \tag{1.8}$$

или

$$L^{-1}(D)=\frac{1}{1-l_n(D)}\,e^{-\alpha_n D}A_n^{-1}(z)=[1+l_n(D)+l_n^2(D)+\ldots]\times$$
$$\times e^{-\alpha_n D}A_n^{-1}(z)=L_2(D). \tag{1.9}$$

Легко видно, что

$$L(D)\ L_1(D)=L(D)\ L_2(D)=1. \tag{1.10}$$

Поэтому выражение

$$F(z)=L_1(D)S(z)+L_2(D)T(z)=$$
$$=[1+l_1(D)+l_1^2(D)+\ldots]\,e^{-\alpha_1 D}A_1^{-1}(z)S(z)+$$
$$+[1+l_n(D)+l_n^2(D)+\ldots]\,e^{-\alpha_n D}A_n^{-1}(z)T(z) \tag{1.11}$$

будет формальным решением уравнения (1.2), если

$$S(z)+T(z)=G(z). \tag{1.12}$$

Действительно, из (1.10) следует

$$L(D)\,F(z)=L(D)\,L_1(D)\,S(z)+L(D)\,L_2(D)\,T(z)=S(z)+T(z).$$

Условие (1.12) будет выполнено, если взять

$$S(z)=\frac{1}{2}\,[G(z)-\Phi(z)] \text{ и } T(z)=\frac{1}{2}\,[G(z)+\Phi(z)], \tag{1.13}$$

где $\Phi(z)$ — произвольная одностолбцевая матрица.

Таким образом, какова бы ни была, целая или мероморфная, одностолбцевая матрица $\Phi(z)$, сумма двух рядов

$$F(z)=\frac{1}{2}\,\{L_1(D)\,[G(z)-\Phi(z)]+L_2(D)\,[G(z)+\Phi(z)]\} \tag{1.14}$$

является формальным решением уравнения (1). Если ряды (1.14) сходятся абсолютно и равномерно в любом конечном круге, то их сумма $F(z)$ является целым или мероморфным решением уравнения (1).

Отметим некоторые частные случаи формальных решений. Положив в (1.14) $\Phi(z)=-G(z)$ и $\Phi(z)=G(z)$, получим следующие два формальных решения уравнения (1):

$$F(z)=L_1(D)\,G(z) \tag{1.15}$$

и

$$F(z)=L_2(D)\,G(z). \tag{1.16}$$

В случае однородного уравнения

$$\mathbf{L}\,[F(z)]=0,$$

формальное решение принимает вид

$$F(z)=-L_1(D)\,\Phi(z)+L_2(D)\,\Phi(z), \tag{1.17}$$

где $\Phi(z)$ — как раньше, произвольная одностолбцевая матрица.

§ 2. Общий член формального ряда

1. Норму матрицы $C(z)=[c_{ik}(z)]$, $i, k,=1, 2, \ldots m$, определим равенством

$$\|C(z)\|=\max_i \sum_{k=1}^{m} |c_{ik}(z)|. \tag{2.1}$$

Отметим следующие свойства нормы (см. [1]):

$$\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\|\leqslant\|\mathbf{A}\|+\|\mathbf{B}\| \tag{2.2}$$

$$\|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\|\leqslant\|\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{B}\|.$$

Пусть $C(z)$ — целая матрица, порядок которой не больше ρ, $\rho>0$. Из (2.1) и из определения порядка целой функции следует, что для любого $\varepsilon>0$ найдется число r_0, такое, что

$$\|C(z)\|<e^{r^{\rho+\varepsilon}} \text{ при } |z|=r>r_0. \tag{2.3}$$

Определитель $|C(z)|$ такой матрицы также является целой функцией, порядок которой не больше ρ. Если определитель $|C(z)|$ не равен тождественно нулю, то и порядок обратной матрицы не больше ρ.

Условимся также точку α называть полюсом (нулем) кратности k мероморфной матрицы $M(z)$, если α является полюсом (нулем) кратности k хотя бы для одного элемента матрицы $M(z)$ и ни для одного элемента этой матрицы α не является полюсом (нулем) кратности, большей (меньшей) k.

Если $C(z)$ — целая матрица и α — нуль кратности k определителя $|C(z)|$, то α является полюсом кратности k для обратной матрицы $C^{-1}(z)$.

Укажем здесь еще на два обозначения, используемые на протяжении всей работы:

$$\begin{aligned} &\Delta_{k_1 k_2 \ldots k_m} = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_1 - \alpha_{k_i}), \qquad k_i = 2,\ 3, \\ &\Delta_{l_1 l_2 \ldots l_m} = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_n - \alpha_{l_i}), \qquad l_i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1. \end{aligned} \tag{2.4}$$

2. Формальное решение является суммой двух рядов, исследование которых ведется вполне аналогично. Ограничимся поэтому рассмотрением одного из них, а именно, ряда $L_1(D)\,S(z)$. При этом нам будет удобно матрицы $A_1(z)$ и $A_n(z)$ в некоторых местах снабдить еще одним индексом и считать $A_1(z) = A_{10}(z)$ и $A_n(z) = A_{n0}(z)$.

Лемма 1. 1. *Общий член*

$$\Phi_m(z) = l_1^m(D)\, e^{-\alpha_1 D} A_1^{-1}(z) \cdot S(z) \tag{2.5}$$

ряда $L_1(D)\,S(z)$ можно представить в виде конечной суммы

$$\Phi_m(z) = \sum \prod_{i=1}^{m} e^{-\alpha_1 D} A_1^{-1}(z)\, A_{k_i l_i}(z)\, D^{l_i} e^{\alpha_{k_i} D} \cdot S(z), \tag{2.6}$$

где каждый индекс l_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) принимает, независимо от других, значения $0, 1, 2, \ldots, s_{k_i}$, а k_i — значения $2, 3,\ \ \ n$.

Число ν_m членов этой суммы удовлетворяет неравенству

$$\nu_m \leqslant (ns)^m, \tag{2.7}$$

где $s = \max\limits_{2 \leqslant k \leqslant n-1} s_k + 1$.

Доказательство. В самом деле (см. (1.6),

$$\Phi_1(z) = l_1(D)\, e^{-\alpha_1 D} A_1^{-1}(z)\, S(z) =$$

$$= \left[e^{-\alpha_1 D} A_1^{-1}(z)\, A_n(z)\, e^{\alpha_n D} - \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=0}^{s_k} e^{-\alpha_1 D} A_1^{-1}(z)\, A_{kl}(z)\, D^l e^{\alpha_k D} \right] \times$$

$$\times\, e^{-\alpha_1 D} A_1^{-1}(z)\, S(z),$$

а число членов не превышает ns.

Далее, в выражение $\Phi_2(z) = l_1^2(D)\, e^{-\alpha_1 D} A_1^{-1}(z) \cdot S(z)$ входит не более $(ns)^2$ членов вида:

$$e^{-\alpha_1 D} A_1^{-1}(z)\, A_{k_1 l_1}(z)\, D^{l_1} e^{\alpha_{k_1} D} \cdot e^{-\alpha_1 D} A_1^{-1}(z)\, A_{k_2 l_2}(z)\, D^{l_2} e^{\alpha_{k_2} D} \cdot$$

$$\cdot\, e^{-\alpha_1 D} A_1^{-1}(z)\, S(z).$$

Методом индукции легко завершить доказательство и получить оценку $\nu_m \leqslant (ns)^m$.

Лемма 1.2. *Пусть*

$$\begin{cases} A_1^{-1}(z)\,A_{k_1 l_1}(z) \equiv B_{k_1 l_1}(z) \equiv B_1(z), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_1^{-1}(z)\,A_{k_m l_m}(z) \equiv B_{k_m l_m}(z) \equiv B_m(z) \end{cases} \tag{2.8}$$

и

$$K = e^{-\alpha_1 D} B_1(z)\, D^{l_1} e^{(\alpha_{k_1}-\alpha_1)D} B_2(z)\, D^{l_2} e^{(\alpha_{k_2}-\alpha_1)D} \times$$

$$\times B_m(z)\, D^{l_m} e^{(\alpha_{k_m}-\alpha_1)D} A_1^{-1}(z)\, S(z). \tag{2.9}$$

(Обратим внимание, что K является общим членом суммы (2.6). Для сокращения записи ограничимся одним только индексом для обозначения матриц $B_i(z)$).

Выражение K можно представить в виде конечной суммы

$$K = \Sigma\, B_1(z-\alpha_1)\cdot B_2^{(i_1)}(z-\alpha_1-\Delta_{k_1})\cdot$$

$$\cdot B_m^{(i_{m-1})}(z-\alpha_1-\Delta_{k_1 k_2 \dots k_{m-1}})\cdot$$

$$\cdot\left[A_1^{-1}(z-\alpha_1-\Delta_{k_1 k_2 \dots k_m})\cdot S(z-\alpha_1-\Delta_{k_1 k_2 \dots k_m})\right]^{(i_m)} = \Sigma B, \tag{2.10}$$

где $i_1, i_2, \dots, i_m$ — целые неотрицательные числа, удовлетворяющие неравенствам $0 \leqslant i_1 \leqslant s$; $0 \leqslant i_m \leqslant ms$. (Заметим, что они пробегают не обязательно все значения из указанных промежутков, но один и тот же член в (2.10) может повторяться несколько раз.)

В этой сумме содержится не более $\left((m+1)!\right)^s$ членов.

Доказательство. Заметим, что производную от произведения нескольких функций $u_1, u_2, \quad u_m$ можно записать

$$(u_1\cdot u_2\cdot\ldots\cdot u_m)' = \Sigma\, u_1^{(i_1)}\cdot u_2^{(i_2)}\cdot \quad \cdot u_m^{(i_m)},$$

где каждое число $i_1, i_2, \dots, i_m$ равно нулю или единице, и сумма содержит m членов. Методом индукции можно получить, что l-ая производная такого произведения имеет вид

$$(u_1\cdot u_2\cdot \quad \cdot u_m)^{(l)} = \Sigma\, u_1^{(j_1)}\cdot u_2^{(j_2)}\cdot \quad \cdot u_m^{(j_m)},$$

где $j_1, j_2, \dots, j_m$ могут принимать значения $0, 1, \dots, l$, и число членов этой суммы равно m^l.

Рассмотрим теперь выражение K, данное равенством (2.10). Чтобы раскрыть его, следует произведение $A_1^{-1}(z-\alpha_1-\Delta_{k_1 \dots k_m})\cdot S(z-\alpha_1-\Delta_{k_1 \dots k_m})$ дифференцировать l_m раз, затем умножить полученную производную на $B_m(z-\alpha_1-\Delta_{k_1 k_2 \dots k_{m-1}})$, это произведение дифференцировать l_{m-1} раз и так далее.

После первого шага, по ранее изложенному, получим сумму

$$\Sigma\,(A_1^{-1}(z-\alpha_1-\Delta_{k_1 k_2 \dots k_m}))^{(i)}\cdot S^{(j)}(z-\alpha_1-\Delta_{k_1 k_2 \dots k_m}),$$

где все значения i и j содержатся в промежутке $[0, l_m]$. Так как $l_m \geqslant 0$, $l_m \leqslant s$, то число членов этой суммы не больше 2^s.

Методом индукции нетрудно убедиться, что после m шагов получим указанный в лемме результат.

Лемма 1.3. *Общий член* $\Phi_m(z)$ *ряда* $L_1(D)S(z)$ *можно представить в виде*

$$\Phi_m(z)=\Sigma B_{k_1 l_1}(z-\alpha_1)\cdot B^{(i_1)}_{k_2 l_2}(z-\alpha_1-\Delta_{k_1})\cdot$$

$$\ldots\cdot B^{(i_{m-1})}_{k_m l_m}(z-\alpha_1-\Delta_{k_1 k_2\ldots k_{m-1}})\cdot$$

$$\cdot[A_1^{-1}(z-\alpha_1-\Delta_{k_1 k_2\ldots k_m})]^{(i_m)}\cdot S^{(i_{m+1})}(z-\alpha_1-\Delta_{k_1 k_2\ldots k_m}), \tag{2.11}$$

где значения i_t *содержатся в промежутке* $0\leqslant i_t\leqslant st$.

Число ν_m *членов суммы* (2.11)

$$\nu_m\leqslant(ns)^m\cdot[(m+1)!]^s. \tag{2.12}$$

Это неравенство непосредственно вытекает из лемм (1.1) и (1.2).

3. Пусть $|z|=r$, $S(z)$ — целая матрица и

$$S_m(r)=\max\|S^{(j)}(z-\alpha_1-\Delta_{k_1 k_2\ldots k_m})\|,$$

где max берется по всем $|z|\leqslant r$, $0\leqslant j\leqslant ms$ и по всем $k_t=2, 3, \ldots n$; $t=1, 2, \ldots, m$.

Лемма 1.4. *Если определитель* $|A_1(z)|\neq 0$, *и порядок коэффициентов* $A_{kl}(z)$, $k\in[1, n]$, *уравнения* (1) — *не больше* ρ, *то для любого* $\varepsilon>0$ *и* $K>0$ *имеется число* $r_0=r_0(\varepsilon, K)$, *такое, что при* $|z|<r$, $r>r_0$ *и при* $m>Kr$ *норма общего члена* (2.5) *ряда* $L_1(D)S(z)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\|\Phi_m(z)\|\leqslant e^{m\rho_0+1+\varepsilon}\cdot S_m(r),\qquad \rho_0=\max(\rho, 1). \tag{2.13}$$

Если же $m<Kr$ *и* $r>r_0$, *то*

$$\|\Phi_m(z)\|<e^{r^{\rho_0+1+\varepsilon}}\cdot S_m(r). \tag{2.14}$$

Доказательство. Если $m>Kr$ и $r>r_0$, то для всех $t=1, 2, \ldots m$

$$|z-\alpha_1-\Delta_{k_1 k_2\ldots k_t}|<r+\alpha_1+(\alpha_n-\alpha_1)m\leqslant C_1 m. \tag{2.15}$$

(C_1 не зависит от m), а если $m<Kr$, то

$$|z-\alpha_1-\Delta_{k_1 k_2\ldots k_t}|<r+\alpha_1+m(\alpha_n-\alpha_1)\leqslant C_2 r. \tag{2.16}$$

Используя еще равенства (2.8) и (2.11), при достаточно большом r и $m>Kr$ для всех t получим

$$\|B_{k_t l_t}(z-\alpha_1-\Delta_{k_1 k_2\ldots k_{t-1}})\|\leqslant e^{m^{\rho+\frac{\varepsilon}{2}}} \tag{2.17}$$

$1\leqslant t\leqslant m$,

и
$$\|B_t^{(i_{t-1})}(z-\alpha_1-\Delta_{k_1 k_2\ldots k_{t-1}})\|<i_{t-1}|e^{m^{\rho+\frac{\varepsilon}{2}}} \tag{2.18}$$

Таким же неравенствам удовлетворяет и $\|A_1^{-1^{(i_m)}}(z-\alpha_1-\Delta_{k_1\ldots k_m})\|$.

Пользуясь этими оценками и леммой (1.3), получим, что норма общего члена суммы (2.11)

$$\|\Phi_m(z)\| \leqslant (ns)^m [(m+1)!]^s \prod_{k=1}^{m} (ks)!\, e^{m^{\rho+\frac{\varepsilon}{2}}} S_m(r) \leqslant$$

$$\leqslant (ns)^m [(m+1)!]^s [(ms)!]^{m+1} e^{m^{\rho+1+\frac{\varepsilon}{2}}} S_m(r) \leqslant e^{m^{\rho_0+1+\varepsilon}} \cdot S_m(r).$$

Учитывая неравенство (2.16), аналогично покажем, что при $m<Kr$, $r>r_0$

$$\|\Phi_m(z)\| \leqslant e^{r^{\rho_0+1+\varepsilon}} \cdot S_m(r).$$

4. Откажемся теперь от условия, что $|A_1(z)|$ не имеет нулей. Предварительно заметим следующее.

Пусть $f(z)$ — мероморфная функция конечного порядка ρ, $C>0$, $h>0$ — произвольно зафиксированные числа и z — точка, расстояние d которой до множества полюсов функции $f(z)$ удовлетворяет неравенству

$$d \geqslant c \cdot |z|^{-h}. \tag{2.19}$$

Для любого $\varepsilon>0$ существует такая постоянная $C=C(\varepsilon)$, что

$$|f^{(s)}(z)| < s!\, 2^s C e^{r^{\rho+\varepsilon}} \cdot r^{sh}, \qquad |z|=r. \tag{2.20}$$

Действительно, для целой функции $\varphi(z)$ конечного порядка ρ на окружности $|z|=r$, не пересекающей ни одного из кружков радиуса $|a_k|^{-h}$, $h>\rho$, $\varphi(a_k)=0$, при любом $\varepsilon>0$ выполняется

$$|\varphi(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}} \tag{2.21}$$

Оценка (2.20) следует из указанного неравенства и выражения для производной аналитической функции

$$f^{(s)}(z) = \frac{s!}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta-z|=R,} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{s+1}}\, d\zeta. \tag{2.22}$$

Лемма 1.5. *Пусть $|z|=r$ и $S_m(r)=\max \| S^{(j)}(z-\alpha_1-\Delta_{k_1 k_2 \ldots k_m})\|$, где $\max$ берется по всем $|z|\leqslant r$, $0\leqslant j\leqslant ms$ и по всем $k_l=2, 3, \ldots, n$; $l=1, 2, \ldots, m$.*

Если порядок целых матриц $A_{kl}(z)$ не больше ρ, то для любых $\varepsilon>0$, $k>0$ существует такое число $r_0=r_0(\varepsilon, k)$, что при $r>r_0$ для фиксированных целых чисел $k_1, k_2, \ldots, k_m$ из отрезка $[2, n]$ можно найти положительное число p, $p=p(k_1, k_2, \ldots, k_m)$, $\frac{r}{2}\leqslant p\leqslant r$, такое, что на окружности $|z|=p$ имеет при $m>kr$ место оценка

$$\|K\| \leqslant e^{m^{\rho_0+1+\varepsilon}} \cdot S_m(r), \qquad \rho_0=\max(\rho, 1), \tag{2.23}$$

а при $m<kr$ — оценка

$$\|K\| \leqslant e^{r^{\rho_0+1+\varepsilon}} \cdot S_m(r) \qquad \left(\text{см. } (2.6)\right). \tag{2.24}$$

Доказательство. Обозначим через $\{\beta_i\}$, $i=1, 2, \ldots$, $\lim \beta_i=\infty$, последовательность нулей определителя $|A_1(z)|$ и опишем вокруг каждого нуля β_i кружок K_i радиуса $2c\cdot|\beta_i|^{-h}$, где $c>0$ — достаточно малое число и $h>\rho$.

В работе [3] показано, что для фиксированных чисел $k_1, k_2, \ldots, k_m$, $1\leqslant k_i\leqslant \leqslant n$ и $r>r_0$ можно выбрать число $p=p(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ так, что $\frac{r}{2}\leqslant p\leqslant r$, а окружность $P(|z|=p)$ и все (сдвинутые) окружности $P_{k_1 k_2 \ldots k_t}$ $(|z-\alpha_1-\Delta_{k_1 k_2 \ldots k_t}|=p)$, $1\leqslant t\leqslant m$ не пересекают ни одного кружка K_i.

Следовательно, если z – точка одной из окружностей $P_{k_1, k_2 \ldots k_t}$ или P, то расстояние

$$d=\min|z-\beta_i|$$

удовлетворяет неравенству

$$d\geqslant c|z|^{-h}. \tag{2.26}$$

Воспользуемся теперь неравенством (2.20) и оценим на окружности $|z|=p$ матрицы

$$\prod_{t=1}^{m} B_t^{(i_t-1)}(z-\alpha_1-\Delta_{k_1 k_2 \ldots k_{t-1}})\equiv\prod_{t=1}^{m} B_{k_t i_t}^{(i_t-1)}(z-\alpha_1-\Delta_{k_1 k_2 \ldots k_{t-1}}),$$

входящие в выражение (2.10).

Норма каждого множителя этого произведения

$$\|B_{t+1}^{(i_t)}(z-\alpha_1-\Delta_{k_1 k_2 \ldots k_t})\|\leqslant C\cdot i_t!\,2^{i_t}e^{(r+\alpha_1+\Delta_{k_1 k_2 \ldots k_t})^{\rho+\varepsilon}}\cdot$$
$$\cdot(r+\alpha_1+\Delta_{k_1 \ldots k_t})^{h\cdot i_t}. \tag{2.27}$$

Аналогичные оценки верны и для множителя

$$A_1^{-1(i_m)}(z-\alpha_1-\Delta_{k_1 k_2 \ldots k_m}).$$

Так как для всех натуральных m в выражение B (2.10) входит только конечное число, не большее ms, различных матриц B_t, то C можно считать зависящим только от ε (но не от B_t).

Заметим, что

$$0\leqslant i_t\leqslant ts. \tag{2.28}$$

Отсюда и из формул (2.27) и (2.25) получим на окружности $|z|=p$ при $m>Kr$

$$\|B\|\leqslant\prod_{k=1}^{m} C^{ks}2^{ks}(ks)!\,m^{ks}e^{m^{\rho+\varepsilon}}\cdot S_m(r)\leqslant$$
$$\leqslant C_1 m^{sm^2}[(ms)!]^m e^{m^{\rho+1+\varepsilon}}S_m(r)\leqslant$$
$$\leqslant C_1 e^{sm^{2+\varepsilon_1}+m^{2+\varepsilon_1}+m^{\rho+1+\varepsilon}}\cdot S_m(r)\leqslant$$
$$\leqslant e^{m^{\rho_0+1+\varepsilon_1}}\cdot S_m(r),\ \text{где}\ \rho_0=\max(\rho,\ 1).$$

По лемме 1.2, матрица K является суммой не более $[(m+1)!]^s$ слагаемых вида B. Отсюда и из только что приведенной оценки для $\|B\|$ легко убеждаемся в справедливости оценки (2.23) при $m>Kr$ и $|z|=p$.

Учитывая неравенство (2.15), таким же способом покажем, что при $m<Kr$ на окружности $|z|=p$ выполняется неравенство (2.24).

6. В следующей лемме будет доказано одно утверждение о величине $S_m(r)$, входящей в оценку общего члена ряда $L_1(D)\,S(z)$.

Лемма 1.6. *Пусть* δ, C и $\nu>1$ — *положительные числа и* $S(z)$ — *целая матрица, удовлетворяющая для достаточно больших* r *в угле* $|\arg z|\leqslant\delta$ *неравенству*

$$\|S(z)\|\leqslant\exp[-c|z|^{\nu}]. \tag{2.30}$$

Тогда имеются такие числа K *и* r_0, *что при* $r>r_0$ *и* $m>Kr$ *будет*

$$S_m(r)\leqslant\exp\left(-\frac{c}{d}\,m^{\nu}\right),\quad где\ d=\frac{K^{\nu}}{2^{\nu+1}}.$$

Если порядок целой матрицы $S(z)$ *равен* ρ, *то для любого* $\varepsilon>0$ *имеется число* r_0, *такое, что при* $r>r_0$ *и* $m<Kr$ *будет*

$$S_m(r)\leqslant\exp r^{\rho+\varepsilon}. \tag{2.31}$$

Доказательство. Из определения величины

$$\Delta_{k_1k_2\ldots k_m}=\sum_{i=1}^{m}(\alpha_1-\alpha_{k_i}),\qquad \alpha_1<\alpha_2<\quad<\alpha_n,$$

легко следует, что

$$-\Delta_{k_1k_2\ldots k_m}\geqslant m(\alpha_2-\alpha_1). \tag{2.32}$$

Обозначим через K_1 и K_2 круги

$$K_1:|z+\alpha_1+\Delta_{k_1k_2\ldots k_m}|<r,$$

$$K_2:|z+\alpha_1+\Delta_{k_1k_2\ldots k_m}|<2r,$$

(полученные из кругов $|z|<r$ и $|z|<2r$ сдвигом на $-\alpha_1-\Delta_{k_1k_2\quad k_m}$) и зафиксируем число K таким большим, чтобы выполнялись неравенства:

$$\frac{2}{K(\alpha_2-\alpha_1)}<\sin\delta,\quad \alpha_2-\alpha_1>\frac{4}{K}.$$

Тогда при $m>Kr$, как это следует из (2.32),

$$\left(m\cdot(\alpha_2-\alpha_1)>Kr\,(\alpha_2-\alpha_1)\right)$$

круг K_2 лежит в угле $|\arg z|<\delta$ и расстояние h от начала координат до круга K_2 удовлетворяет неравенству

$$h>m\cdot(\alpha_2-\alpha_1)-2r>m\cdot(\alpha_2-\alpha_1)-\frac{2m}{K}>\frac{2m}{K}.$$

Поэтому (см. (2.30)) при $|z|\leqslant 2r$ и $r>r_0$ будет

$$\|S(z-\alpha_1-\Delta_{k_1k_2\ldots k_m})\|<\exp\left(-C\left|\frac{2m}{K}\right|^{\nu}\right)$$

и при $|z|\leqslant r$ и $j\leqslant sm$

$$\|S^{(j)}(z-\alpha_1-\Delta_{k_1k_2\ldots k_m})\|=\left\|\frac{j!}{2\pi}\int_{|\zeta|=2r}\frac{S(\zeta-\alpha_1-\Delta_{k_1k_2\ldots k_m})}{(\zeta-z)^{j+1}}\,d\zeta\right\|\leqslant$$

$$\leqslant(sm)!\exp\left[-c\left|\frac{2m}{K}\right|^{\nu}\right]\leqslant(sm)!\exp\left(-\frac{c}{d}\,m^{\nu}\right),$$

где $d=\frac{k^{\nu}}{2^{\nu+1}}$.

Аналогично (но более просто) устанавливается неравенство (2.31).

II. РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

§ 3. Вспомогательные предложения

1. Для изучения однородного уравнения

$$\mathbf{L}[F(z)] \equiv A_1(z)F(z+\alpha_1) + A_n(z)F(z+\alpha_n) + \sum_{k=2}^{n-1}\sum_{l=(}^{s_k} A_{kl}(z)F^{(l)}(z+\alpha_k) = 0 \quad (2)$$

нам понадобятся некоторые леммы. Первые две леммы приведем без доказательства. В них говорится о последовательностях T_1, T_2, S_1, S_2, часто исползуемых в дальнейшем.

Последовательность T_1 включает точку $z=0$, как простую, и любую точку $\Delta_{k_1 k_2 \dots k_m}$ (см. введение (3)), как $s_{k_1}+s_{k_2}+ \quad +s_{k_m}$ раз кратную точку. При этом точки $\Delta_{k_1 k_2 \dots k_m}$ и $\Delta_{h_1 h_2 \quad h_m}$ считаем равными, если они отличаются только порядком индексов, и различными, если они отличаются хотя бы одним индексом.

Аналогично, последовательность T_2 содержит точку $z=0$, как простую, и любую точку $\Delta_{l_1 l_2 \dots l_m}$ — как $s_{l_1}+s_{l_2}+ \quad +s_{l_m}$ раз кратную точку.

Пусть, далее, $\{\beta_i\}$, $\lim \beta_i = \infty$, $/\{\gamma_i\}$, $\lim \gamma_i = \infty/$ последовательность точек, лежащих (за исключением, может быть, конечного числа) вне некоторого достаточно малого угла около отрицательной (положительной) действительной полуоси

$$\pi - |\arg \beta_i| \geqslant \alpha > 0 \qquad \Big|\, |\arg \gamma_i| \geqslant \delta > 0 \Big|.$$

Обозначим через $S_1\,/S_2/$ множество точек вида $\beta - t_1\,/\gamma - t_2/$,

$$S_1 \quad \{\beta - t_1\}, \quad S_2 : \{\gamma - t_2\}, \tag{3.1}$$

где $\beta\,/\gamma/$ и $t_1\,/t_2/$ пробегают независимо друг от друга последовательности $\{\beta_i\}$ и $T_1\,/\{\gamma_i\}$ и $T_2/$. При этом, если $\beta\,/\gamma/$ входит в последовательность $\{\beta_i\}$ $/\{\gamma_i\}/$ с кратностью k, а $t_1\,/t_2/$ в последовательность $T_1\,/T_2/$ с кратностью l, то точку $\beta - t_1\,/\gamma - t_2/$ считаем $k+l$ раз кратной точкой последовательности $S_1\,/S_2/$.

Лемма 2.1. *Последовательности T_1 и T_2 не имеют предельных точек в конечной плоскости, и их показатели сходимости λ_1 и λ_2 удовлетворяют неравенствам*

$$\lambda_1 \leqslant n, \quad \lambda_2 \leqslant n. \tag{3.2}$$

Лемма 2.2. *Последовательности S_1 и S_2 не имеют предельных точек в конечной плоскости. Если μ_1 и μ_2 являются, соответственно, показателями сходимости последовательностей $\{\beta_i\}$ и $\{\gamma_i\}$, то показатели сходимости последовательностей S_1 и S_2 не больше, соответственно, чисел $\mu_1+\lambda_1$ и $\mu_2+\lambda_2$.*

Доказательство лемм 2.1 и 2.2 см. в [5].

2. **Лемма 2.3.** *Для любого числа τ, $\tau \geqslant 1$ существует целая функция $G(z, \tau)$, имеющая такие свойства:*

1) *порядок этой функции равен* 2τ,

2) $G(z, \tau)$ *— четная функция и на действительной оси она принимает только положительные значения*;

3) *существует такое число* M, $M=M(\tau)$, *что в достаточно малых углах* U_1 *и* U_2 *около положительной и отрицательной полуосей*

$$U_1 : |\arg z|<\delta; \quad U_2 : \pi-|\arg z|<\delta, \quad \delta>0,$$

выполнено неравенство

$$|G(z, \tau)| \leqslant Me^{-|z|^{2\tau}}$$

Доказательство. Если τ — натуральное число, то все указанные в лемме свойства имеет функция

$$G(z, \tau)=e^{-Cz^{2\tau}}, \tag{3.10}$$

где C — достаточно большое число.

Если $\tau>0$ — не целое число, то обозначим через $K(z, \tau)$ каноническое произведение с нулями в точках $-n^{\frac{1}{\tau}}$, $n=1, 2,$

$$K(z, \tau)=\prod\left(1+\frac{z}{n^{\frac{1}{\tau}}}\right)e^{-\frac{z}{n^{\frac{1}{\tau}}}+\ldots+\frac{1}{p}\left(-\frac{z}{n^{\frac{1}{\tau}}}\right)^p} \tag{3.11}$$

где $p=[\tau]$ — означает целую часть числа τ.

В угле

$$|\arg z|<\pi-\varepsilon, \quad \varepsilon>0$$

имеет место (см. [6], 185) асимптотическое равенство

$$\ln K(z, \tau)\sim(-1)^p \frac{\pi}{\sin\pi(\tau-p)} z^{\tau}. \tag{3.12}$$

Легко проверить, что функция

$$G(z, \tau)=\begin{cases} K(Cz^2, \tau), & p=[\tau]=2k+1, \\ K(Ce^{\frac{i\pi}{\tau}} z^2, \tau)\cdot K(Ce^{-\frac{i\pi}{\tau}} z^2, \tau), & p=2k, \end{cases} \tag{3.13}$$

где $C>0$ — достаточно большое число, имеет все три указанных свойства.

§ 4. Решение однородного уравнения

Рассмотрим однородное уравнение

$$\mathrm{L}[F(z)]\equiv A_1(z)F(z+\alpha_1)+A_n(z)F(z+\alpha_n)+ \\ +\sum_{k=2}^{n-1}\sum_{l=0}^{s_k} A_{kl}(z)F^{(l)}(z+\alpha_k)=0 \tag{2}$$

и предположим сначала, что выполнены следующие условия.

А. *Числа* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *действительны и* $\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n$.

Б. *Матрицы* $A_1(z)$, $A_n(z)$, $A_{kl}(z)$ $/k=2, 3, \ldots, n-1;\ l=0, 1, \ s_k/$ *целые и имеют конечный порядок не выше* ρ.

В. *Определители* $|A_1(z)|$ *и* $|A_n(z)|$ *не равны нулю ни в одной точке комплексной плоскости.*

Теорема 2.1. *Если выполнены условия* **А, Б** *и* **В**, *то уравнение* (2) *имеет бесконечное множество линейно независимых целых решений конечного порядка.*

Доказательство. Как было показано в § 1, формальное решение уравнения (1) имеет вид

$$F(z) = -L_1(D)\,\Phi(z) + L_2(D)\,\Phi(z), \tag{1.17}$$

где $L_1(D)$ и $L_2(D)$ выражаются рядами (1.8) и (1.9).

Чтобы обеспечить сходимость этих рядов, положим

$$\Phi(z) = \varphi(z)\cdot I, \quad \text{где } I = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

а $\varphi(z)$ — целая функция, для которой в малых углах около положительной и отрицательной действительных полуосей выполнено неравенство

$$|\varphi(z)| < e^{-|z|^{\rho^*}} \tag{4.2}$$

где $\rho^* > 0$ — достаточно большое число.

В качестве $\varphi(z)$ можно взять

$$\varphi(z) = e^{-z^{2t}} \tag{4.3}$$

где $2t$ — достаточно большое четное число.

Действительно, по лемме 1.6,

$$S_m(r) = \max \| S^{(j)}(z - \alpha_1 - \Delta_{k_1 k_2 \ldots k_m}) \|,$$

(max берется по всем $|z| \leqslant r$; $0 \leqslant j \leqslant ms$ и по всем $k_l = 2, 3, \ldots, n$; $l = 1, 2, \ldots, m$) при $S(z) = \Phi(z)$ и $m > Kr$, где K — достаточно большое число, удовлетворяет неравенству

$$S_m(r) \leqslant e^{-Cm^{\rho^*}} \qquad (C \text{ не зависит от } m \text{ и } r). \tag{4.4}$$

По лемме 1.4, норма общего члена $\Phi_m(z)$ ряда $L_1(D)\,\Phi(z)$

$$\|\Phi_m(z)\| < e^{m^{\rho_0+1+\varepsilon}} S_m(r), \qquad \rho_0 = \max(\rho, 1).$$

Если взять $\rho^* > \rho_0$ и $m > Kr$, то из (4.4) и из приведенной оценки следует

$$\|\Phi_m(z)\| < e^{-\frac{c}{2}} \tag{4.5}$$

Следовательно, ряд $L_1(D)\,\Phi(z)$ равномерно сходится в любом конечном круге.

Аналогично доказывается равномерная сходимость ряда $L_2(D)\,\Phi(z)$, и матрица $F(z)$, определенная формулой (1.17), является целым решением уравнения (2).

Не исключена возможность, что построенное решение $F(z)$ будет тривиальным: $F(z) \equiv 0$. Чтобы избежать этого, зафиксируем число z_0 и обозначим через $S^*(z_0)$ множество точек вида $z_0 - \alpha_n$, $z_0 - \alpha_n - t_2$ и $z_0 - \alpha_1 - t_1$, где $t_1 \neq 0$ принимает все значения из последовательности T_1, а $t_2 \neq 0$ — из T_2 (см. § 3). При этом считаем, что точка $z_0-\alpha_n-t_2$ входит в $S^*(z_0)$ с кратностью, на единицу большей кратности t_2 в T_2. Аналогично, кратность $z_0-\alpha_1-t_1$ на единицу больше кратности t_1 в T_1.

Матрицу $\Phi(z)$ изменим следующим образом:

$$\Phi(z)=\varphi(z)\cdot I, \tag{4.6}$$

где $\varphi(z)=e^{-z^{2t}}\cdot\varphi_1(z)$, а $\varphi_1(z)$ — каноническое произведение с нулями в точках множества $S^*(z_0)$.

Заметим, что эта матрица $\Phi(z)$ в точке $z_0-\alpha_1$ не равна нулю и принимает нулевое значение во всех точках множества $S^*(z_0)$.

Если число $2t=\rho^*$ возьмем большим показателя сходимости последовательности $S^*(z_0)$, то оценка (4.4) останется в силе, и ряд (1.17) будет абсолютно и равномерно сходиться в любой замкнутой области и представлять целое решение уравнения (1). Полученное решение не равно тождественно нулю, так как ряд (1.17) при $z=z_0$ сводится (как это следует из вида общего члена этого ряда (см. лемму 1.1)) к одному только члену

$$F(z_0)=A_1^{-1}(z_0-\alpha_1)\,\Phi(z_0-\alpha_1)\neq 0.$$

Для получения бесконечной последовательности линейно независимых целых решений рассматриваемого уравнения произвольно зафиксируем последовательность попарно не эквивалентных*) между собой точек $\varkappa_j, j=1, 2,$ $\lim \operatorname{Im}\varkappa_j=\infty$; при $i\neq j$, $\operatorname{Im}\varkappa_i\neq\operatorname{Im}\varkappa_j$, имеющую конечный показатель сходимости, и обозначим через $\chi(z)$ каноническое произведение с нулями в точках всех множеств $S(\varkappa_j)$, $j=1, 2,$ (множество $S(z_0)$ состоит из всех точек множества $S^*(z_0)$ и еще одной точки $z_0-\alpha_1$).

Если в (1.17) поставить $\Phi(z)=\varphi_j(z)$, где

$$\varphi_j(z)=\frac{\varkappa(z)}{z-\varkappa_j+\alpha_1}\,e^{-z^{2t}}I, \qquad j=1, 2, \tag{4.7}$$

то получим последовательность соответствующих решений $F_j(z)$.

Эти решения удовлетворяют условиям

$$F_j(\varkappa_j)\neq 0,\quad F_j(\varkappa_i)=0, \qquad i\neq j,$$

откуда следует, что любое конечное число решений $F_j(z)$ линейно независимо.

Нам осталось доказать конечность порядка полученных решений.

Обозначим через $\varkappa$ показатель сходимости последовательности $\{\varkappa_i\}$. Тогда порядок канонического произведения $\chi(z)$ равен $\max(\varkappa+\lambda_1, \varkappa+\lambda_2)$, где λ_1 и λ_2 — показатели сходимости последовательностей T_1 и T_2 (см. леммы 2.1 и 2.2).

Если

$$2t>\max(\rho_0+1, \varkappa+\lambda_1, \varkappa+\lambda_2), \tag{4.8}$$

где $\rho_0=\max(\rho, 1)$, то порядок матриц $\Phi(z)=\varphi_j(z)$ равен $2t$ и, по лемме 1.4, для $m<Cr$

$$\|\Phi_m(z)\|\leqslant e^{Cr^{2t}}, \qquad |z|=r, \tag{4.9}$$

где $\Phi_m(z)$ — общий член ряда $L_1(D)\,\Phi(z)$, а C не зависит от r и m.

*) Два комплексных числа a и b назовем эквивалентными, если их разность $a-b$ принадлежит множеству T_1 или T_2.

Тогда

$$\sum \| L_1(D)\Phi(z)\| \leqslant \sum_{m<Cr} \|\Phi_m(z)\| + \sum_{m>Cr} \|\Phi_m(z)\|.$$

Первая из сумм, стоящих в правой части, по оценке (4.9), меньше $Cr \cdot \exp(Cr^{2t})$, а вторая по (4.5) меньше постоянного C_1.

Таким же образом оцениваем и $L_2(D)\Phi(z)$, откуда и следует, что порядок решения $F_j(z)$ не больше $2t$.

2. Заметим, что теорема 2.1 останется в силе, если условие **В** заменим таким условием:

Г *Определитель* $|A_1(z)|$ *не имеет нулей (за исключением, может быть, конечного числа) в точках угла* $\pi-|\arg z|\leqslant\delta$, *а определитель* $|A_n(z)|$ — *в угле* $|\arg z|\leqslant\delta$, $\delta>0$.

Теорема 2.2. *Если выполнены условия* **А**, **Б**, *и* **Г**, *то уравнение* (2) *имеет бесконечную последовательность линейно независимых целых решений конечного порядка.*

Доказательство. Обозначим через $\{\beta_i\}$ нули определителя $|A_1(z)|$, $\pi-|\arg\beta_i|>\delta>0$, а через $\{\gamma_i\}$ — нули $|A_n(z)|$, $|\arg\gamma_i|>\delta$, и опять рассмотрим ряд (1.17).

Если $\Phi(z)$ — целая матрица (например, $\Phi(z)$ имеет вид (4.7)), то члены этого ряда при условии **Г** будут не обязательно целыми, а могут оказаться мероморфными матрицами. Для нахождения возможных полюсов членов ряда $-L_1(D)\Phi(z)$ воспользуемся леммой 2.1. По этой лемме члены ряда $-L_1(D)\Phi(z)$ имеют вид:

$$K=-\left(\prod_{t=1}^{m} e^{-\alpha_1 D}A_1^{-1}(z)A_{k_t l_t}(z)D^{l_t}e^{\alpha_{k_t}D}\right)e^{-\alpha_1 D}A_1^{-1}(z)\Phi(z). \tag{4.10}$$

Матрицу K можно записать в виде

$$K=-C_1D^{l_1}C_2\cdot \quad \cdot D^{l_{m-1}}C_mD^{l_m}C, \tag{4.11}$$

где

$$C_1=A_1^{-1}(z-\alpha_1)A_{k_1l_1}(z-\alpha_1),$$

$$C_m=A_1^{-1}(z-\alpha_1-\Delta_{k_1k_2\quad k_{m-1}})A_{k_ml_m}(z-\alpha_1-\Delta_{k_1k_2\quad k_{m-1}}), \tag{4.12}$$
$$C=A_1^{-1}(z-\alpha_1-\Delta_{k_1k_2\quad k_m})\Phi(z-\alpha_1-\Delta_{k_1k_2\dots k_m}).$$

Так как $\{\beta_i\}$ — последовательность полюсов матрицы $A_1^{-1}(z)$, то возможные полюсы матрицы $D^{l_m}C$ и находятся среди точек $\beta_i+\alpha_i+\Delta_{k_1k_2\quad k_m}$, полюсы матрицы $D^{l_{m-1}}C_{m-1}D^{l_m}C$ среди точек $\beta_i+\alpha_i+\Delta_{k_1k_2\quad k_{m-1}}$ и $\beta_i+\alpha_i+\Delta_{k_1k_2\quad k_m}$ и, как легко убедиться методом индукции, полюсы матрицы K — среди точек

$$\beta_i+\alpha_1,\ \beta_i+\alpha_1+\Delta_{k_1},\ \beta_i+\alpha_1+\Delta_{k_1k_2},\qquad \beta_i+\alpha_1+\Delta_{k_1\ k_m}$$

При этом, если кратность некоторого полюса β равна k, то возможная наибольшая кратность полюса $\beta+\alpha_1$ (относительно матрицы K) также равна k, кратность полюса $\beta+\alpha_1+\Delta_{k_1}$ равна $k+l_1\leqslant k+s_{l_1}$ и кратность полюса $\beta+\alpha_1+$

$+\Delta_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ равна $k+l_1+l_2+\ldots+l_m \leqslant k+s_{l_1}+\ldots+s_{l_m}$. Таким образом, множество полюсов членов ряда $-L_1(D)\,\Phi(z)$ содержится в множестве $\beta+\alpha_1+t_1$, где $t_1 \in T_1$ (см. § 3). Аналогично, множество полюсов членов ряда $L_2(D)\,\Phi(z)$ содержится в множестве $\gamma-\alpha_n+t_2$, где $t_2 \in T_2$.

Заметим, что множество полюсов всех членов ряда (1.17) может иметь предельные точки в конечной плоскости.

Чтобы избавиться от полюсов и получить целые решения, образуем множества S_1 и S_2 из точек вида $\{\beta_i-t_i\}$ и $\{\gamma_i-t_2\}$ и составим каноническое произведение $M(z)$ с нулями в точках множеств S_1 и S_2. Это произведение $M(z)$ введем как дополнительный множитель в выражение (4.5) для матрицы $\Phi(z)=$ $=\varphi_j(z)$:

$$\Phi(z)=\varphi_j(z)=M(z)\,\frac{\mathrm{K}(z)}{z-\varkappa_j+\alpha_1}\,e^{-z^{2t}}I, \tag{4.13}$$

причем выбор точек $\varkappa_j$ подвергнем еще дополнительным условиям:

$$\operatorname{Im}\varkappa_i \neq \operatorname{Im}\gamma_j,\ \operatorname{Im}\varkappa_i \neq \operatorname{Im}\beta_s;\ i,\ j,\ s=1,\ 2,$$

Если в (4.2) поставим $\Phi(z)=\varphi_j(z)$ вида (4.13), то члены такого ряда будут, как сейчас покажем, целыми матрицами.

Рассмотрим опять член K ряда $-L_1(D)\,\Phi(z)$, представим его в виде (4.11) и предположим, что β — некоторый полюс кратности k матрицы $A_1^{-1}(z)$. Тогда $\beta+\alpha_i+\Delta_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ является полюсом кратности k матрицы $A_1^{-1}(z-\alpha_1-$ $-\Delta_{k_1 k_2 \ldots k_m})$, но эта же точка является нулем кратности k матрицы $\Phi(z-\alpha_1-\Delta_{k_1 k_2 \ldots k_m})$. Значит, матрицы C и $D^{l_m}C$ (см. (4.12) — целые. Поэтому матрица $C_m D^{l_m} C$ может иметь полюсы только в точках, в которых $A_1^{-1}(z-\alpha_1-\Delta_{k_1 k_2 \ldots k_{m-1}})$ имеет полюсы, т. е. в точках $\beta+\alpha_1+\Delta_{k_1 k_2 \ldots k_{m-1}}$ кратности k, но эти точки являются нулями кратности $k+s_{k_m}$ для матрицы C так как $\beta_i+\Delta_{k_m}$ является нулем такой же кратности для функции $M(z)$.

Значит, матрица $D^{l_m}C$, $l_m \leqslant s_m$ в точке $\beta+\alpha_1+\Delta_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ имеет нуль кратности не меньшей k, поэтому матрица $C_m D^{l_m} C$ в этой точке целая. Методом индукции легко показать, что и матрица K (член ряда $-L_1(D)\,\Phi(z)$) также целая матрица.

Итак, мы установили, что для $\Phi(z)$, определенного равенством (4.10), все члены ряда (1.17) — целые матрицы.

Воспользуемся теперь леммой 1.5. По этой лемме, для любого $r>r_0$ имеем числа p и ε, $\frac{r}{2} \leqslant p \leqslant r$ такие, что на окружности $|z|=p$ выполнено неравенство

$$\|K\| \leqslant e^{m^{\rho_0+1+\varepsilon}} \cdot S_m(r), \tag{4.14}$$

где K — матрица (4.10), $S(z)=\Phi(z)$ и $\rho_0=\max(\rho,\ 1)$. Так как K — целая матрица, то неравенство (4.31) имеет место во всем круге $|z| \leqslant \frac{r}{2}$.

Учитывая лемму 1.1, для общего члена ряда $-L_1(D)\,\Phi(z)$ получим

$$\|\Phi_m(z)\| \leqslant (ns)^m \cdot e^{m^{\rho_0+1+\varepsilon}} \cdot S_m(r).$$

Если в (4.13) четное число $2t$ выберем большим числа ρ_0+1 и порядков функций $M(z)$ и $x(z)$, то, по лемме 1.6, получим

$$S_m(r) < e^{-Cm^{2t}},$$

где C — некоторая постоянная.

Как в доказательстве теоремы 2.1, мы легко убедимся, что ряды (1.17), полученные при $\Phi(z)=\varphi_j(z)$, равномерно и абсолютно сходятся, а их суммы $F_j(z)$ представляют линейно независимые решения, порядок которых не больше $2t$.

3. Откажемся от каких-либо ограничений на расположение нулей определителей $|A_1(z)|$ и $|A_n(z)|$, но предположим, что выполнено условие.

Д. *Ни один из определителей* $|A_1(z)|$ *и* $|A_n(z)|$ *не равен тождественно нулю.*

Теорема 2.3. *Пусть произвольно зафиксированы конечные числа* a, b *и положительное число* δ.

Если выполнены условия А, Б *и* Д *то уравнение* (2) *имеет бесконечное множество линейно независимых мероморфных решений конечного порядка, все полюсы которых лежат в углах*

$$U_a^*: \pi - |\arg (z-a)| \leqslant \delta,$$

$$V_b^* \quad |\arg (z-b)| \leqslant \delta.$$

Доказательство. Обозначим через U_a и V_b углы:

$$U_a: \pi - |\arg (z-a+\alpha_1)| \leqslant \delta,$$

$$V_b \quad |\arg (z-b+\alpha_n)| \leqslant \delta. \tag{4.16}$$

Множество нулей $\{\beta_i\}$ определителя $|A_1(z)|$ разобьем на подмножества $\{\beta_i^+\}$ и $\{\beta_i^-\}$, где $\{\beta_i^+\}$ лежат вне, а $\{\beta_i^-\}$ – внутри угла U_a. Соответственно, нули $|A_n(z)|$, лежащие вне V_b, обозначим $\{\gamma_i^+\}$, а нули внутри этого угла – $\{\gamma_i^-\}$.

Пусть S_1^+, S_2^+, S_1^-, S_2^- – множества точек вида

$$S_1^+ : \{\beta_i^+ - t_1\},\ S_2^+ : \{\gamma_i^+ - t_2\}, \tag{4.17}$$

$$S_1^- : \{\beta_i^- + \alpha_1 + t_1\}, S_2^- : \{\gamma_i^- + \alpha_n + t_2\},$$

где $t_1 \in T_1$, а $t_2 \in T_2$ (§ 3.1). При этом считаем, что кратность точки $\beta_i^+ - t_1$ в последовательности S_1^+ равна сумме кратностей точки β_i^+, как нуля детерминанта $|A_1(z)|$, и точки t_1, как члена последовательности T_1. Аналогично определяются и кратности точек последовательностей S_2^+, S_1^- и S_2^-

Поставим в выражение (4.13) вместо $M(z)$ каноническое произведение $M^*(z)$ с нулями в точках множеств S_1^+ и S_2^-:

$$\Phi(z) = \varphi_j(z) = M^*(z) \frac{\varkappa(z)}{z - \varkappa_j + \alpha_1} e^{-z^{2+}} I. \tag{4.18}$$

Рассуждая таким же образом, как при доказательстве теоремы 2.2., мы убедимся, что при таком выборе матриц $\Phi(z)$ члены ряда (1.17) будут уже мероморфными матрицами, полюсы которых лежат в точках множеств S_1^- и S_2^+

Составим каноническое произведение $M^{**}(z)$ с нулями в точках последовательностей S_1^- и S_2^+ Порядок σ функции $M^{**}(z)$ равен, как известно, наибольшему из показателей сходимости этих последовательностей.

Поэтому

$$\sigma \leqslant \max(\lambda_1 + \mu_1,\ \lambda_2 + \mu_2),$$

где λ_1, μ_1, λ_2, μ_2 имеют тот же смысл, что и в теореме 2.2.

Если ряд вида (1.17) почленно перемножить на каноническое произведение $M^{**}(z)$, то получим ряд, все члены которого – целые матрицы. Кроме того, если в (4.18) число $2t$ возьмем большим числа ν, определенного равенством (4.15), то перемноженный на $M^{**}(z)$ ряд (1.17) будет сходиться абсолютно и равномерно в любом конечном круге, и его сумма $F_j^*(z)$ является целой матрицей, порядок которой не превышает $2t$.

Матрицы же

$$F_j(z) = \frac{F_j^*(z)}{M^{**}(z)}$$

являются мероморфными решениями однородного уравнения (2). Эти решения линейно независимые, все их полюсы лежат в углах U_a и V_b, и их порядки не больше четного числа $2t$, если $2t > \nu$.

Замечание. Для обеспечения сходимости рядов (1.17) мы в матрицах $\Phi(z)$ ввели множитель $e^{-z^{2t}}$, где $2t > \nu$. Если этот множитель $\exp(-z^{2t})$ в выражении для $\Phi(z)$ заменить функцией $G(z, \tau)$, о которой говорилось в лемме 2.3, то при $2\tau > \nu$ тоже будет обеспечена сходимость (абсолютная и равномерная) рядов (1.17), и мы получим решения уравнения (2), порядок которых не больше 2τ.

Вильнюсский Государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию 11.IX.1969

Литература

1. И. С. Березин, Н. П. Жидков, Методы вычислений, М., 1959.
2. С. Н. Мергелян, Равномерные приближения функций комплексного переменного, УМН, Т, 2(48) (1952), 31–122.
3. А. Г. Нафталевич, О применении метода итераций для решения разностного уравнения, Матем. сб., 57 (99), 2 (1962), 151–178.
4. А. Г Нафталевич, Двойные системы разностных уравнений, Докторская диссертация, Вильнюс, 1964.
5. Л. И. Навицкайте, Целые и мероморфные решения дифференциально-разностного уравнения, Лит. матем. сб., IV, 1 (1964), 133–140.
6. Р. Неванлинна, Однозначные аналитические функции, М., 1941.
7. L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. 2., Leipzig-Berlin, 1927.
8. N. E. Nörlund, Differenzenrechnung, Berlin, 1924.
9. N. E. Nörlund, Neuere Untersuchungen über Differenzengleichungen, Enzyklopädie der math. Wiss., II c, 7, 1923.
10. J. M. Whittaker, A theorem on meromorphic functions. Proc. London Math. Soc., 40, 1935, 255–272.

DIFERENCIALINIŲ-SKIRTUMINIŲ LYGČIŲ TIESINĖS SISTEMOS SU SVEIKAIS BAIGTINĖS EILĖS KOEFICIENTAIS KLAUSIMU. I—II

L. Navickaitė

(Reziumė)

Nagrinėjama tiesinė diferencialinių-skirtuminių lygčių sistema

$$L[F(z)] \equiv A_1(z) F(z+\alpha_1) + A_n(z) F(z+\alpha_n) + \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=0}^{s_k} A_{kl}(z) F^{(l)}(z+\alpha_k) = G(z), \qquad (1)$$

kur $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$, koeficientai $A_1(z)$, $A_n(z)$, $A_{kl}(z)$ — kvadratinės matricos, kurių elementai — sveikos baigtinės eilės funkcijos, nežinomasis $F(z)$, išvestinės $F^{(l)}(z)$ ir laisvasis narys $G(z)$ — matricos pavidalo

$$F(z)=\begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \\ \cdot\ \cdot \\ f_m(z) \end{pmatrix},\quad F^{(l)}(z)=\begin{pmatrix} f_1^{(l)}(z) \\ f_2^{(l)}(z) \\ \cdot\ \cdot \\ f_m^{(l)}(z) \end{pmatrix},\quad G(z)=\begin{pmatrix} g_1(z) \\ g_2(z) \\ \\ g_m(z) \end{pmatrix},$$

kur $g_k(z)$, $k=1, 2, \ldots, m$, sveikos arba memorfinės funkcijos.

Straipsnyje įrodomas lygties (1) sveikų ir meromorfinių sprendinių egzistavimas, nustatoma jų augimo eilė. Taip pat nagrinėjamas sveikų ir meromorfinių sprendinių interpoliavimo klausimas.

ÜBER DAS LINEARE SYSTEM DER DIFFERENZ-DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT GANZEN KOEFFIZIENTEN, DIE ENDLICHES WACHSTUM BESITZEN. I—II

L. Navickaitė

(*Zusammenfassung*)

Es sei

$$L[F(z)] \equiv A_1(z) F(z+\alpha_1) + A_n(z) F(z+\alpha_n) + \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=0}^{s_k} A_{kl}(z) F^{(l)}(z+\alpha_k) = G(z)$$

ein System von linearen Differenz-Differentialgleichungen, in dem die Koeffizienten ganze Matrixen sind, $G(z)$ — ganze oder meromorphe Matrix-Kollone, $\alpha_1 < \alpha_2 < \quad < \alpha_n$ — reale Zahlen.

In der Arbeit wird die Existenz der ganzen und meromorphen Lösungen eines solchen Systems bewiesen, das Wachstum solcher Lösungen untersucht und auch die Frage der Interpolation berührt.