1970

УДК – 519.21

НЕКОТОРЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПЛОТНОСТЕЙ МНОГОМЕРНЫХ УСТОЙЧИВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ С ПОКАЗАТЕЛЕМ $\alpha>1$

Н. Калинаускайте

Многомерное распределение называетя устойчивым, если каковы бы ни были векторы A_1, A_2 и положительные числа B_1, B_2, всегда найдутся постоянный вектор A и положительное число B, при которых для трех независимых случайных векторов X_1, X_2, X, имеющих это распределение, случайный вектор $\frac{1}{B}(X-A)$ является суммой векторов $\frac{1}{B_1}(X_1-A_1)$ и $\frac{1}{B_2}(X_2-A_2)$.

Известно [1], что k-мерное распределение устойчиво тогда и только тогда, когда логарифм его характеристической функции равен

$$\psi(t)=\chi(\rho,\ \varphi)=\begin{cases} -\rho^{\alpha}\Big(C_1(\varphi)+iC_2(\varphi)\Big)+i(t,\ \Gamma_1) & \text{при } 0<\alpha\leqslant 2,\ \alpha\neq 1\\ -\rho\,\Big(C_1(\varphi)+iC_2'(\rho,\ \varphi)\Big)+i(t,\ \Gamma_1) & \text{при } \alpha=1,\end{cases} \tag{1}$$

где

$$C_1(\varphi)=C_0\int\limits_S|\cos\Theta|^{\alpha}H(ds),$$

$$C_2(\varphi)=-C_0\int\limits_S\frac{\cos\Theta}{|\cos\Theta|}\operatorname{tg}\frac{\alpha\pi}{2}|\cos\Theta|^{\alpha}H(ds),$$

$$C_2'(\rho,\ \varphi)=\int\limits_S\cos\Theta\lg|\rho\cos\Theta|\,H(ds).$$

Здесь введены обозначения:

- ρ – модуль вектора $t=(t_1,\ \ldots,\ t_k)$, а $\varphi=(\varphi_1,\ \ldots,\varphi_{k-1})$, его угловые координаты,
- Γ_1 – постоянный вектор,
- $(t,\ \Gamma_1)$ – скалярное произведение векторов t и Γ_1,
- S – единичная сфера,
- $H(s)$ – аддитивная неотрицательная мера, определенная на единичной сфере,
- C_0 – положительная константа,
- Θ – угол между вектором t и единичным вектором ω, конец которого находится в ds.

Далее будем рассматривать невырожденные плотности устойчивого распределения с $\Gamma_1=0$.

Заметим, что для невырожденного k-мерного устойчивого распределения всегда

$$\inf_{\varphi}C_1(\varphi)=c_1>0.$$

Действительно, пусть $\inf\limits_{\varphi} c_1(\varphi)=0$, т.е. для некоторого φ_0, $C_1(\varphi_0)=0$, так как $c_1(\varphi)$ непрерывная функция в замкнутой области

$$D'_{k-1}=[0\leqslant\varphi_1\leqslant\pi,\ \ldots,\ 0<\varphi_{k-2}=\pi,\ 0\leqslant\varphi_{k-1}\leqslant 2\pi].$$

Следовательно, либо мера $H(s)$ тождественно равна нулю, либо сконцентрирована на пересечении k-мерной сферы S с подпространством ортогональным вектору $(1, \varphi_0)$, что и есть вырождение распределения.

Во всем дальнейшем $x=(x_1, \ldots, x_k)\in R_k$, и если $x\in R_k$, $y\in R_k$, то

$$(x, y)=\sum_{j=1}^{k} x_j y_j.$$

Плотность k-мерного устойчивого распределения равна

$$p_\alpha(x)=\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{R_k}\exp\{-i(x,\ t)-\psi(t)\}\,dt.$$

Заменой

$$t_j=\rho\prod_{l=1}^{j-1}\sin\varphi_l\cos\varphi_j \quad \text{при } 1\leqslant j\leqslant k-1$$

$$t_k=\rho\prod_{i=1}^{k-1}\sin\varphi_i$$

с якобианом преобразования равным

$$J=\rho^{k-1}\prod_{l=1}^{k-2}\sin^{k-l-1}\varphi_i=\rho^{k-1}\cdot J_1$$

плотность $p_\alpha(x)$ приводится к виду

$$\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_0^\infty\int\limits_{D'_{k-1}}\exp\left\{-i\rho(x,\ \omega)-\rho^\alpha\left(C_1(\varphi)+iC_2(\varphi)\right)\right\}J d\rho d\varphi,$$

где

$$\omega=(\omega_1,\ \ldots,\ \omega_k)$$

$$\omega_j=\prod_{l=1}^{j-1}\sin\varphi_l\cos\varphi_j \quad \text{при } 1\leqslant j\leqslant k-1$$

$$\omega_k=\prod_{l=1}^{k-1}\sin\varphi_l,$$

$$d\varphi=d\varphi_1 \qquad d\varphi_{k-1}.$$

Теорема 1. *Для всех* $x\in R_k$, $x\neq 0$ *и* $2\geqslant\alpha>1$ *имеет место разложение*

$$p_\alpha(x)=\frac{2}{\alpha(2\pi)^k}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\Gamma\left(\frac{m+k}{\alpha}\right)\int\limits_{D_{k-1}}\left(C_1^2(\varphi)+\right.$$

$$\left.+C_2^2(\varphi)\right)^{-\frac{m+k}{2\alpha}}(x,\ \omega)^m\cdot\cos\left(\frac{m+k}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{C_2(\varphi)}{C_1(\varphi)}+\frac{m\pi}{2}\right)J_1\,d\varphi,$$

где

$$D_{k-1}=[0\leqslant\varphi_j\leqslant\Pi,\ 1\leqslant j\leqslant k-1].$$

Теорема 2. *Для каждого* $\alpha \in (0, 2]$, $\alpha \neq 1$ *при* $|x| \to 0$ *имеет место оценка*

$$p_\alpha(x) = \frac{2}{\alpha(2\pi)^k} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m!} \Gamma\left(\frac{m+k}{\alpha}\right) \int_{D_{k-1}} \Big(C_1^2(\varphi) +$$

$$+ C_2^2(\varphi)\Big)^{-\frac{m+k}{2\alpha}} \cdot (x, \omega)^m \cos\left(\frac{m+k}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{C_2(\varphi)}{C_1(\varphi)} + \frac{m\pi}{2}\right) J_1 \, d\varphi +$$

$$+ O\left(|x|^{n+1}\right).$$

Доказательство теоремы 1. Обозначим через Θ угол между единичными векторами $\omega = \frac{t}{\rho}$ и $z \in R_k$. Тогда $\cos \Theta$ равен их скалярному произведению. Единичный вектор $\tilde{y}$ с полярными координатами

$$(1, \pi - \varphi_1, \quad \pi - \varphi_{k-2}, \varphi_{k-1} + \pi) = (1, \bar{\varphi})$$

симметричный относительно начала координат вектору

$$y = (1, \varphi_1, \quad \varphi_{k-1}).$$

Следовательно, если Θ – угол между векторами z и y, а Θ_1 – угол между векторами z и $\tilde{y}$, то $\Theta_1 = \pi + \Theta$.

$$\cos \Theta_1 = -\cos \Theta.$$

Поэтому

$$C_1(\bar{\varphi}) = C_1(\varphi)$$

$$C_2(\bar{\varphi}) = -C_2(\varphi)$$

$$C_2'(\rho, \varphi) = -C_2'(\rho, \varphi).$$

Тогда при $\alpha \neq 1$ имеем

$$p_\alpha(x) = \frac{2}{(2\pi)^k} \int_0^\infty \int_{D_{k-1}} \exp\{-\rho^\alpha C_1(\varphi)\} \cos\Big(\rho^\alpha C_2(\varphi) +$$

$$+ \rho(x, \omega)\Big) \rho^{k-1} J_1 \, d\rho \, d\varphi =$$

$$= \frac{2}{(2\pi)^k} \int_0^\infty \int_{D_{k-1}} \exp\{-\rho^\alpha C_1(\varphi)\} \cdot \Big\{\cos\left(\rho^\alpha C_2(\varphi)\right) \cdot \cos\left(\rho(x, \omega)\right) -$$

$$- \sin\left(\rho^\alpha C_2(\varphi)\right) \sin\left(\rho(x, \omega)\right)\Big\} J d\rho \, d\varphi.$$

Разложения

$$\cos z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{(2m)!}$$

$$\sin z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} z^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

имеют место для всех z, поэтому

$$p_\alpha(x)=\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_0^\infty\int\limits_{D_{k-1}}\exp\{-\rho^\alpha C_1(\varphi)\}\times$$

$$\times\Big\{\cos\left(\rho^\alpha C_2(\varphi)\right)\cdot\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m}{(2m)!}\rho^{2m}(x,\ \omega)^{2m}-$$

$$-\sin\left(\rho^\alpha C_2(\varphi)\right)\cdot\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}\rho^{2m-1}(x,\ \omega)^{2m-1}Jd\rho\,d\varphi.$$

Так как (см. [2], стр. 503)

$$\int\limits_0^\infty z^{\mu-1}e^{-\beta z}\cos\delta z dz=\Gamma(\mu)(\beta^2+\delta^2)^{-\frac{\mu}{2}}\cos\left(\mu\operatorname{arctg}\frac{\delta}{\beta}\right)$$

и

$$\int\limits_0^\infty z^{\mu-1}e^{-\beta z}\sin\delta z dz=\Gamma(\mu)(\beta^2+\delta^2)^{-\frac{\mu}{2}}\sin\left(\mu\operatorname{arctg}\frac{\delta}{\beta}\right),$$

то

$$\int\limits_0^\infty\exp\{-\rho^\alpha C_1(\varphi)\}\cos^\alpha C_2(\varphi)\rho^{2m+k-1}d\rho=\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{2m+k}{\alpha}\right)\Big(C_1^2(\varphi)+$$

$$+C_2^2(\varphi)\Big)^{-\frac{2m+k}{2\alpha}}\cdot\cos\left(\frac{2m+k}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{C_2(\varphi)}{C_1(\varphi)}\right)$$

$$\int\limits_0^\infty\exp\{-\rho^\alpha C_1(\varphi)\}\sin\left(\rho^\alpha C_2(\varphi)\right)\rho^{2m+k-2}d\rho=\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{2m-1+k}{\alpha}\right)\Big(C_1^2(\varphi)+$$

$$+C_2^2(\varphi)\Big)^{-\frac{2m-1+k}{2\alpha}}\cdot\sin\left(\frac{2m-1+k}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{C_2(\varphi)}{C_1(\varphi)}\right).$$

Следовательно,

$$p_\alpha(x)=\frac{2}{\alpha(2\pi)^k}\int\limits_{D_{k-1}}\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m}{m!}\Gamma\left(\frac{m+k}{\alpha}\right)\Big(C_1^2(\varphi)+$$

$$+C_2^2(\varphi)\Big)^{-\frac{m+k}{2\alpha}}\cdot(x,\ \omega)^m\cos\left(\frac{m+k}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{C_2(\varphi)}{C_1(\varphi)}+\frac{m\pi}{2}\right)\cdot J_1\,d\varphi.$$

Ряд под знаком интеграла мажорируется рядом

$$\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m}{m!}\Gamma\left(\frac{m+k}{\alpha}\right)\Big[\inf_\varphi\left(C_1^2(\varphi)+C_2^2(\varphi)\right)^{-\frac{m+k}{2\alpha}}\cdot|x|^m$$

сходящимся при $\alpha>1$. Следовательно, почленным интегрированием немедленно получаем (2).

В случае $\alpha<1$ разложение (2) не имеет места, так как соответствующий ряд под знаком интеграла расходится.

При $|x|\to0$ в (4) разлагая $\sin z$ и $\cos z$ по формуле Тейлора до члена n-ого порядка таким же методом получаем (3).

При $k=2$, $\alpha>1$, $C_1(\varphi)\equiv 1$, и $C_2(\varphi)\equiv 0$ для плотности имеет место разложение

$$p_\alpha(x)=\frac{1}{2\pi\alpha}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\Gamma\left(\frac{2m+2}{\alpha}\right)}{\Gamma^2(m+1)\,2^{2m-1}}|x|^{2m}.$$

В случае $k=1$ разложения устойчивых плотностей получены Г. Бергстремом [3].

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
27.VI.1969

Литература

1. Е. Л. Рвачева, Об областях притяжения многомерных устойчивых распределений, Уч. зап. Львовск. Гос. Ун-та. им. И. Франко. сер. мех.-матем., 29 в 1(6), (1954), 5–44.
2. И. С. Градштейн и И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Москва, 1962.
3. H. Bergström, On some expansions of stable distribution functions, Arkiv för mat., II, h. 18 (1952), 375–378.

KAI KURIE DAUGIAMAČIŲ STABILIŲ TANKIŲ SU RODIKLIU $\alpha>1$ SKLEIDIMAI

N. Kalinauskaitė

(*Reziumė*)

Straipsnyje gautas daugiamačių stabilių tankių skleidimas eilute, kai rodiklis $\alpha\in(1, 2]$, ir asimptotinės formulės visiems $\alpha\in[0, 2]$ nulio aplinkoje, išskyrus $\alpha=1$.

ON SOME EXPANSIONS FOR THE MULTIDIMENSIONAL STABLE DENSITIES WITH PARAMETER $\alpha>1$

N. Kalinauskaitė

(*Summary*)

Let $p_\alpha(x)$, $x\in R_k$ be the density of the stable distribution function with the logarithm of characteristic function (1). For all $x\in R_k$, $x\neq(0, \ldots, 0)$ and $1<\alpha\leqslant 2$ the expansion

$$p_\alpha(x)=\frac{2}{\alpha(2\pi)^k}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\Gamma\left(\frac{m+k}{\alpha}\right)\times$$

$$\times\int_0^\pi\cdot(k-1)\int_0^\pi\left(C_1^2(\varphi)+C_2^2(\varphi)\right)^{-\frac{m+k}{2\alpha}}\left(\sum_{j=1}^{k-1}x_j\prod_{l=1}^{j-1}\sin\varphi_l\cos\varphi_j+\right.$$

$$\left.+x_k\prod_{l=1}^{k-1}\sin\varphi_l\right)^m\cos\left(\frac{m+k}{\alpha}\right)\operatorname{arctg}\frac{C_2(\varphi)}{C_1(\varphi)}+\frac{m\pi}{2}\Big)\times$$

$$\times\prod_{l=1}^{k-2}\sin^{k-l+1}\varphi_l\,d\varphi_1\quad d\varphi_{k-1}$$

is obtained. Also the asymptotic formulas for $p_\alpha(x)$ with $\alpha\neq 1$, $\alpha\in(0, 2]$ when $|x|\to 0$ are found.