X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 3
1970

УДК – 518. 9

ОПТИМАЛЬНОСТЬ В БЕСКОАЛИЦИОННЫХ ИГРАХ: ОБЗОР ПОДХОДОВ

Э. Вилкас

1. В литературе [1 – 5] имеется несколько различных подходов к определению оптимальных стратегий в бескоалиционной (некооперативной) игре. Эти различия возникли, по-видимому, из-за различной трактовки самой бескоалиционной игры. Из общего определения игры, данного Н. Н. Воробьевым [6], следует, что в такой игре правилами не предусмотрены ни коалиции действия, ни коалиции интересов, отличные от отдельных игроков, т. е. правилами не предусмотрено ни объединение игроков в группы для совместных действий (отсутствие переговоров по координации стратегий с принятием обязывающих соглашений), ни по их интересам (отсутствие торга и дележа на основе результатов торга). Здесь мы будем придерживаться этого определения и считать, что игроки действуют совершенно изолированно.

Сделанные нами предположения лежат в основе определения равновесных стратегий Дж. Нэша [1], как оптимальных стратегий бескоалиционной игры. Как известно, в неантагонистических играх ситуации равновесия вообще неединственны и невзаимозаменяемы, что приводит к стратегической неопределенности [3] таких игр. Это заставило искать дополнительных предположений, чтобы как-то получить единственное решение, как обоснованный исход игры. Встречающиеся в литературе предположения можно классифицировать следующим образом.

1. Предположения о способе осуществления игры. Таковыми являются предположения о возможности передачи информации (гласная игра) Дж. Харшаньи [2] и повторяемость игры Н. Ховарда [4]. Как нетрудно видеть, они могут быть отражены в обычной игре соответствующим изменением множеств стратегий игроков и их выигрышей. Поэтому решить первоначальную проблему такого рода предположения не могут.

2. Привлечение новых формул рассуждений игроков, более полное „использование их интеллекта“. Хотя торг и переговоры правилами игры не допускаются, все же никто не может запретить игрокам об этом думать. Как отмечают многие авторы (см. [2]), интеллектуальные игроки всегда могут проводить торг заочно. Мы добавим, что они также могут заочно образовывать фактические коалиции, если им это выгодно и устойчивые в известном смысле коалиции существуют. К этому вопросу мы вернемся позже.

3. Предположения нестратегического характера. На них основаны доминирование по риску Дж. Харашаньи [2] и определение значения игры, данное

автором [5]. На наш взгляд, значение работы [2] прежде всего состоит в том, что в ней сформулированы весьма приемлемые принципы поведения, вытекающие из психологических свойств игроков, которые в классической теории никак не постулируются. В ней наряду с заданным упорядочением ситуаций по выигрышам (вообще недостаточным для единственного решения) вводится вторичное (затем и третичное) упорядочение по риску. Как предположение о среде, в которой игра происходит, упорядочение по риску не является единственным возможным и универсальным. Дж. Харшаньи пользуется также некоторым социологическим предположением о конституции принятия групповых решений. Это предположение также нельзя считать достаточно общим.

В работе автора [5] вся информация о среде, в которой игра происходит, отражена в априорно заданном прогнозе поведения партнеров. На самом деле, заданной следует считать среду (предположение автора лишь подчеркивало необходимость ее задания), а прогноз необходимо установить по более первичным факторам. В настоящей статье мы попытаемся это сделать для нескольких типов среды.

2.1. Среди многочисленных применений теоретико-игрового подхода, особенно не социального происхождения, можно найти немало примеров, в которых какие бы то ни было дополнительные нестратегические предположения обосновать весьма трудно. Если при этом упорядочение ситуаций игроками по их выигрышам не устраняет неопределенности, то игра является в известном смысле неразрешимой. Естественно тогда предположить, что игра с недоминируемыми стратегиями является игрой с природой или игрой с неполностью определенными правилами (с неполной информацией).

Пусть $S_1, \qquad S_n$ — некоторые множества стратегий игроков. Обозначим

$$S=S_1\times \qquad \times S_n=\{s\},\ S_i=\{s_i\},$$

$$S^i=S_1\times \qquad \times S_{i-1}\times S_{i+1}\times \qquad \times S_n=\{s^i\}.$$

Также будем писать $s=(s_i,\ s^i)$. Пусть $f_i(s)$ — функция выигрыша i-го игрока.

В силу принятого здесь предположения задача прогнозирования действий партнеров для i-го игрока сводится к отысканию оптимальной стратегии природы в игре двух лиц

$$\Gamma_1=\{S_i,\ S^i,\ f_i(s_i,\ s^i)\}.$$

При сведении задачи к игре Γ_1 мы наиболее полно используем предположение об отсутствии какой-либо информации о природе, кроме ее антагонистичности.

Использование здесь максиминного подхода (антагонистичности природы) согласуется с понятием полезности информации (самое неинформированное состояние оценивается выигрышем при наиболее неблагоприятном распределении вероятностей). Такое решение также совпадает с решением Дж. Харшаньи для „безвыходных“ игр.

Такая концепция все же является весьма консервативной. В игре Γ_1 теряется первоначальная информация о „многогранности интересов“ природы.

Наиболее близкой к первоначальной задаче игрой явилась бы игра с $n-1$ „природами“:

$$\Gamma_2=\{S_i,\ f_i,\ i\in N\},\ N=\{1, \qquad n\}.$$

К сожалению, такие игры в литературе не рассматривались, и мы можем лишь предварительно в качестве решения этой игры предложить следующее. Пусть

$$f_i\left(s(i)\right)=\max_{s_i\in S_i}\ \min_{s^i\in S^i} f_i(s_i,\ s^i).$$

Тогда $\bar{s}^i=(s_1(1),\ \dots,\ s_{i-1}(i-1),\ s_{i+1}(i+1),\ \dots,\ s_n(n))$ является прогнозом i-го игрока о поведении партнеров, а стратегия s_i^*, для которой

$$f_i(s_i^*,\ {}^i)=\max_{s_i\in S_i} f_i(s_i,\ \bar{s}^i),$$

принимается в качестве оптимальной.

Возможны здесь и другие подходы, которым нетрудно дать содержательное истолкование. Например, рассмотрим другую неантагонистическую игру с двойственной природой:

$$\Gamma_3=\{S_i,\ S^i,\ \Lambda,\ f_i,\ F_i,\ -f_i)\},$$

где

$$F_i(\lambda,\ s)=\sum_{j\neq i}\lambda_j f_j(s),\ \lambda_j\geqslant 0,\ \Sigma\lambda_j=1,$$

$$\Lambda=\{\lambda=\lambda^i:\lambda_j\geqslant 0,\ \Sigma\lambda_j=1\}.$$

Пусть

$$F_i\left(\lambda,\ s_i,\ \bar{s}^i(\lambda,\ s_i\right)=\max_{s^i\in S^i} F_i(\lambda,\ s_i,\ s^i)$$

$$f_i\left(s_i^*,\ \bar{s}^i(\lambda^*,\ s_i^*)\right)=\max_{s_i\in S_i}\ \min_{\lambda\in\Lambda} f_i\left(s_i,\ \bar{s}^i(s_i,\ \lambda)\right).$$

Если принять в качестве прогноза $\left(\lambda^*,\ \bar{s}^i(s_i^*,\ \lambda^*)\right)$, а в качестве оптимальных стратегий s_i^*, то этим в какой-то мере мы учтем и антагонистичность и эгоистичность природы. Заметим, что здесь нетривиален вопрос существования решения.

2.2. В собственно игровых ситуациях наиболее естественным дополнительным упорядочением игроками ситуаций, кроме упорядочения по выигрышам, является упорядочение по риску, порождаемое упорядочением по выигрышам. Его введение было обосновано в [2]. Ради удобства приведем употребляемые там определения.

Прямая функция риска

$$P_i(s,\ t)=\begin{cases}\dfrac{f_i(s)-f_i(t)}{f_i(s)-f_i(s_i,\ t^i)}, & \text{если } f_i(s)>f_i(t)\\ 0, \text{ если } f_i(s)\leqslant f_i(t),\ t\in S, & \end{cases}$$

означает максимальный риск, на который может пойти i-ый игрок, желая s, а не t, или наибольшую субъективную вероятность, которую i-ый игрок может дать тому, что партнеры выберут t^i вместо того, чтобы „отговаривать“ его от s_i.

Обозначим

$$W_i(t)=\{r \quad r\in S,\ f_i(r)<f_i(t)\}\cup\{t\}.$$

Расширенной функцией риска называется

$$R_i(s,\ t)=\min_{r\in W_i(t)} P_i(s,\ r).$$

Она означает максимальный риск, на который может пойти i-ый игрок для достижения s, а не t или любой другой ситуации, хуже ее.

Как показал Дж. Харшаньи, применение функции $R_i(s,\ t)$ согласуется с принципом монотонности риска, являющимся естественным обобщением известного принципа рациональности Ф. Зейтена [7] и психологического доминирования Р. Д. Льюса и Х. Райффы ([8], стр. 151).

Наконец,

$$K_i(s)=\max_t R_i(t,\ s)$$

означает максимальный риск, при котором i-ый игрок не согласен с выбором s.

Даже принятие функций $K_i(s)$ для дополнительного упорядочения вообще не приводит к упорядочению, общему для всех игроков, так как минимум $K_i(s)$ для различных i достигается вообще при различных s. Желая все же такое упорядочение получить, Дж. Харшаньи определяет функцию

$$K(s)=\max K_i(s),$$

которая индуцирует транзитивное упорядочение ситуаций: $s\succ t$, если $K(s)\leqslant K(t)$. В качестве решения принимается s_0,

$$K(s_0)=\min_s K(s).$$

Полученное таким образом решение соответствует такому социальному предположению: если при данном уровне риска хотя бы один игрок с ситуацией s не согласен, то она не может быть принята и всеми игроками. С точки зрения теории принятия групповых решений, это предположение не является единственным возможным. С другой стороны, общеизвестна роль психологического давления большинства при принятии решений. Не отрицая рациональности подхода Дж. Харшаньи, мы укажем далее и некоторые другие социальные предположения и соответствующие им решения.

2.3.1. Рассмотрим задачу принятия группового решения, когда альтернативами индивидов являются ситуации $s\in S$, а их упорядочение индуцирует функции $K_i(s)$. Следует заметить, что в решении Дж. Харшаньи принимается во внимание не только порядок, задаваемый функциями $K_i(s)$, но в некоторой мере и значения этих функций, именно при определении финального упорядочения посредством функции $K(s)=\max\limits_i K_i(s)$. Тем самым производится сравнение рисков отдельных игроков. Мотивы, позволяющие это сравнение производить, следующие: 1) функция риска не меняется при неубывающей линейной трансформации выигрышей игроков, 2) так как в качестве выигрышей игроков выступают их полезности, то отношение игроков к риску (его полезности) уже отражено в выигрышах и есть мера объективного риска. Конечно, если в игре смешанные стратегии не участвуют, то 2) может и не иметь места.

Учитывая все сказанное, мы приходим к такой задаче группового решения: каждый игрок против s подает $K_i(s)$ голосов; задана конституция выбора групповой альтернативы. Эта альтернатива и считается решением. Если конституция такова, что выбранной считается ситуация, за которую голосует игрок с наименьшим $K_{i_0}(s)$ и $K_{i_0}(s) \geqslant K_i(s)$, $i \neq i_0$, то мы получаем решение Дж. Харшаньи.

Естественным правилом выбора является правило большинства (в данном случае меньшинства против). Оно отражает взвешенное давление большинства. Если отбросить веса $K_i(s)$ и оставить только упорядочение, индуцируемое функцией $K_i(s)$, то это соответствовало бы предположению о психологическом давлении массы индивидов. В этом случае мы пришли бы к классической задаче принятия группового решения.

2.3.2. Использование модели принятия группового решения имеет смысл лишь в случае, если задано правило группового решения или имеется система социальных предположений, приводящих к какому-то правилу. В противном случае такое применение по крайней мере произвольно.

Выход из положения тогда может состоять в трактовке риска $K_i(s)$ как субъективной вероятности индивида. Обозначим

$$p_i(s) = \frac{1 - K_i(s)}{\sum\limits_s \left(1 - K_i(s)\right)}, \qquad i \in N,$$

субъективную вероятность того, что i-ый игрок выберет ситуацию s. Так как $0 \leqslant K_i(s) \leqslant 1$, то и $0 \leqslant p_i(s) \leqslant 1$ для всех i и s. Для составления прогноза поведения партнеров нам необходимо вычислить распределение вероятностей на множестве стратегий каждого игрока. Пусть $p_i(s)$ — распределение вероятностей на множестве Q. Разобьем множество Q на классы

$$Q_{t_i} = \{ s : s = (t_i, s^i) \in Q \}.$$

Тогда

$$P(s_i = t_i) = \sum_{s \in Q_{t_i}} p_i(s) = p_i(t_i)$$

и

$$P(s^i = t^i) = \prod_{j \neq i} p_j(\bar{t}_j) = p_i(t^i).$$

где $\bar{t}_j$ пробегает значения из t^i.

Считая теперь, что $p_i(t_i)$ заданы, можем применить подход автора [5].

3.1. Введенная Дж. Харшаньи мера риска является индивидуальной и поэтому требует дополнительных предположений о правилах принятия группового решения при $n > 2$. Эти предположения иногда окажутся излишними, если рассматривать меру, определенную для любых коалиций интересов, а не только для отдельных игроков. Коалиции интересов в бескоалиционной игре также реализуемы как и торг. Коалиции действия естественно не могут считаться таковыми, так как отсутствие сообщения и обязывающих соглашений делает их неустойчивыми.

Определить меру риска коалиции можно аналогично случаю отдельных игроков. Все рассуждения Дж. Харшаньи остаются в силе, причем завершающая часть становится более убедительной.

Пусть $M \subset N$ — некоторая коалиция

$$s_M = (s_{i_1}, \ \ldots, \ s_{i_m}), \ i_k \in M, \ m \text{ — число элементов } M,$$

$$s^M = (s_{i_1}, \ \ldots, \ s_{i_{n-m}}), \ i_k \in N \backslash M, \ (s_M, \ s^M) \in S,$$

$$P^i_M(s, \ t) = \begin{cases} \dfrac{f_i(s) - f_i(t)}{f_i(s) - f_i(s_M, \ t^M)}, & \text{если } f_i(s) > f_i(t), \\ 0 \text{ в противном случае.} & \end{cases}$$

Тогда

$$P_M(s, \ t) = \min_{i \in M} P^i_M(s, \ t)$$

означает максимальный коллективный риск, на который может пойти коалиция M, желая s, а не t.

Обозначим

$$W_M(t) = \{ r : r \in S, \ f_i(r) \leqslant f_i(t), \ i \in M \}$$

$$R_M(s, \ t) = \min_{r \in W_M(t)} P_M(s, \ r)$$

$$R_M(t) = \max_{s \in \bar{W}_M(t)} R_M(s, \ t),$$

где $\bar{W}_M(t)$ означает множество тех s, которые не хуже t для коалиции M. Эти функции имеют примерно такое же значение, что и $R_i(s, \ t)$, $K_i(s)$.

Самая сильная эффективная коалиция M выбирает предпочитаемую всеми ее участниками ситуацию s, а $N \backslash M$ должна делать уступку и согласиться на s. Она и принимается в качестве решения. Точнее,

$$R(s) = \min_{t \in S} R(t),$$

где

$$R(t) = \max_{M \subset N} R_M(t).$$

3.2. Можно дать и другую интерпретацию подходу Дж. Харшаньи, которая более естественна при рассмотрении коалиций интересов.

Рассмотрим сначала игру двух лиц, каждый игрок в которой имеет по две конкурирующие альтернативы (ситуации равновесия s и t). Пусть $f_1(s) > f_1(t)$, $f_2(s) < f_2(t)$. Средний выигрыш первого игрока, когда он выбирает s, есть

$$u_1(s) = p f_1(s, \ t) + (1 - p) f_1(s, \ s),$$

где p — вероятность того, что второй игрок выберет ситуацию t. Очевидно, $u_1(s) \geqslant f_1(t, \ t)$, если только вероятность p удовлетворяет неравенству

$$f_1(t, \ t) \leqslant p f_1(s, \ t) + (1 - p) f_1(s, \ s)$$

$$p \leqslant \frac{f_1(s, \ s) - f_1(t, \ t)}{f_1(s, \ s) - f_1(s, \ t)} = p^*.$$

Аналогично средний выигрыш второго при выборе им t будет не меньше $f_2(s, s)$, если первый выбирает s с вероятностью

$$q \leqslant \frac{f_2(t, t) - f_2(s, s)}{f_2(t, t) - f_2(s, t)} = q^*.$$

В торге сильнее оказывается первый игрок, если $p^* > q^*$. Величины p^* и q^* есть максимальные вероятности конфликта, при которых игроки еще могут рисковать выбрать лучшую для себя ситуацию. Кроме того, эти вероятности могут быть интерпретированы как меры благоприятных случаев (значений вероятностей) для выбора предпочитаемых ситуаций. Становится ясным, что в основе принципа доминирования риска для этой простой игры лежит следующее допущение: если все возможные действия противника (вероятностные распределения) считать равновероятными, а мера благоприятных для выбора s действий больше, чем аналогичная мера противника для его выбора t, то решением будет s. Это еще раз показывает, что введение риска связано с принятием неклассических предположений.

Пусть в игре n лиц игроки ведут торг о выборе одной ситуации из некоторого множества. Пусть в обозначениях п. 3.1

$$\mathcal{P}_M(s, r) = \{t^M : f_i(t) \leqslant f_i(s_M, t^M) \text{ для всех } i \in M\},$$

если $f_i(s) > f_i(r)$ для всех $i \in M$. Тогда соответствующим заданием меры μ на симплексах $S_M = \{s_M\}$ мы можем задать упорядочение коалиций: M сильнее M' при выборе s и t, если

$$\mu\Big(\mathcal{P}_M(s, t)\Big) > \mu\Big((\mathcal{P}_{M'}(t, s)\Big).$$

Очевидно, если μ – лебегова мера, то одной из возможных конкретизаций этого подхода, если ограничиться парными сравнениями конкурирующих ситуаций, будет подход, изложенный в п. 3.1.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
15.IX.1969

Литература

1. Дж. Нэш, Бескоалиционные игры, сб. „Матричные игры", Физматгиз, М., (1961), 205–221.
2. J. C. Harsanyi, A general solution for finite non-cooperative games, based on risk-dominance, Advances in game theory, Wiley, Princeton, (1964), 651–679.
3. W. Krelle, D. Coenen, Das nichtkooperative Nichtnullsummen-Zwei-Personen-Spiel, Unternehmensforshung, 9, 2 (1965), 57–79.
4. N. Howard, The mathematics of meta-games, Gen. Syst., vol. 11, Ann Arbor, Michigan (1966), 187–200.
5. Э. Вилкас, Аксиоматическое определение ситуации равновесия и значения бескоалиционной игры n лиц, Теория вероятн. и ее примен., XIII, 3(1968), 555–560.
6. Н. Н. Воробьев, Современное состояние теории игр, I Всесоюзная конференция по теории игр, Ереван, 1968.
7. F. Zeuthen, Problems of monopoly and economic warfare, Routlege, London, 1930.
8. Р. Д. Льюс, Х. Райфа, Игры и решения, ИЛ, М., 1961.

OPTIMALUMAS NEKOALICINIUOSE LOŠIMUOSE: KONCEPCIJŲ APŽVALGA

E. Vilkas

(Reziumė)

Aptariami žinomi literatūroje optimalių strategijų apibrėžimai nekoaliciniams *n* asmenų lošimams. Kai *n* asmenų lošimas yra traktuojamas kaip lošimas su gamta, tai optimalumas yra atitinkama maksimino modifikacija. Nagrinėjamos Haršanji sprendinio priimtinumo sąlygos bei duodami keli variantai optimalumo apibrėžimų, priklausomai nuo lošimo prielaidų. Ypač dėmesys skiriamas galimybei sudarinėti „neakivaizdines" koalicijas pagal lošėjų interesus.

THE OPTIMALITY IN NON-COALITIONAL GAMES: REVIEW OF THE APROACHES

E. Vilkas

(Summary)

There are discussed the known conceptions of optimality in *n* person non-coalitional games. Some variations of the maxmin principle are given for the games where any additional propositions about behaviour of players exept „maximization of own utility" cannot be made. For properly game-theoretical problems the risk-dominance principle of Harsanyi is discussed. There are shown the psychological and sociological propositions which lie in basis of Harsanyi's conception. If other conditions take place the new definition of optimality, based on risk-dominance relation, must be accepted. The Harsanyi's conception is generalized for quasi-coalitional risk-dominance relations. Also general measure of quality of the coalitional strategies is investigated instead of risk.