X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

1970

УДК–519.21

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ К. ИТО

Д. СУРГАЙЛИС

1. В доказательствах единственности решения стохастического уравнения К. Ито с коэффициентами переноса $a(t, x)$, диффузии $b(t, x)$ и функцией скачков $f(t, x, y)$ в основном используется (см. [1], [2]) следующий аналог условия Липшица (в одномерном случае):

$$|a(t,x)-a(t,y)|^2+|b(t,x)-b(t,y)|^2+\int_{-\infty}^{\infty}|f(t,x,u)- \tag{1}$$

$$-f(t,y,u)|^2\frac{du}{|u|^2}\leqslant L|x-y|^2.$$

Это требование, которое выполняется для достаточно гладких $a(t, x)$ и $b(t, x)$, в случае разрывного процесса является несколько специфическим. Например, для процесса рождения с $\lambda(x)\neq\mathrm{const}$, $0\leqslant x<\infty$, (1) дает:

$$\left|\int_{\lambda(x)^{-1}}^{\lambda(y)^{-1}}\frac{du}{|u|^2}\right|=|\lambda(x)-\lambda(y)|\leqslant L|x-y|^2,$$

что очевидно невозможно. Поэтому представляет интерес найти другие условия единственности решения, где для $f(t, x, y)$ не требовалось бы выполнения неравенства (1). В этой работе получен один такой критерий, правда, при этом на $f(t, x, y)$ накладываются условия другого рода.

2. Введем обозначения: R_m – m-мерное эвклидово пространство, B_m – σ-алгебра борелевских подмножеств из R_m, $B[t_1, t_2]$ – σ-алгебра борелевских подмножеств интервала $[t_1, t_2]$ $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}$ – координаты точки $x\in R_m$; $U_\varepsilon=\{x\in R_m, |x|>\varepsilon\}$.

Основное вероятностное пространство $(\Omega, \{\mathfrak{F}_t\}, \mathbf{P})$, где $\mathfrak{F}_t\subseteq\mathfrak{F}_T$, $0\leqslant t\leqslant T$ – семейство возрастающих σ-алгебр, определим как ортогональное произведение 2 пространств $(\Omega_i, \{\mathfrak{F}_{it}\}, \mathbf{P}_i)$, $i=1, 2$, следующим образом:

Пусть Ω_1 – множество всех непрерывных функций $\omega_1=\omega_1(t)\in R_r$, $t\in[0, T]$, $\mathfrak{F}_{1t}$ – σ-алгебра, порожденная цилиндрическими подмножествами вида $\{\omega_1\in\Omega_1, \omega_1(t_i)\in A_i, i=1, \ldots n\}$, где $t_i\in[0, t]$, $A_i\in B_r$, $i=1, 2, \ldots, n<\infty$, а P_1 – r-мерная винеровская мера. Далее, пусть имеется декартово произведение $R_m\times[0, T]$ с соответственной σ-алгеброй $B_m\times B[0, T]$, а Ω_2 – множество всех целочисленных мер на ней, таких, что для каждого $\varepsilon>0$ и $A\in B_m\cap U_\varepsilon\times B[0, T]$ $\omega_2(A)<\infty$. Множество $\mathscr{A}\subset\Omega_2$ назовем цилиндрическим, если существует конечная система непересекающихся множеств $A_1, \ldots A_n$ из $B_m\times B[0, T]$

и набор натуральных чисел $k_1, \ldots, k_n$, такой что $\mathscr{A}=\{\omega_2\in\Omega_2,\ \omega_2(A_i)=k_i,\ i=1, \ldots, n\}$. На каждом из таких множеств определим

$$P_2(\mathscr{A})=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i^{k_i}}{k_i!}e^{-\lambda_i},$$

где
$$\lambda_i=\int\limits_{A_i}\int\frac{ds\,du}{|u|^{m+1}}$$

Можно показать, что система, образованная конечными суммами непересекающихся цилиндрических множеств, является полукольцом, и, таким образом, P_2 можно продолжить на σ-алгебру $\mathfrak{F}_2$, порожденную этой системой. Легко заметить, что при таком определении ω_2 оказывается пуассоновской мерой с независимыми значениями.

3. Пусть имеются некоторые измеримые по совокупности своих переменных функций $a(t, x)$, $b_k(t, x)$, $k=1, \ldots, r\leqslant m$, $f(t, x, y)$, определенные для всех $t\in[0, T]$, $x\in R_m$, $y\in R_m$ и принимающие значения из R_m. Пусть существует $K>0$, такая что для всех $t\in[0, T]$, $x\in R_m$:

$$a^2(t,x)+\sum_{k=1}^{r}b_k^2(t,x)+\int\limits_{y\in R_m}f^2(t,x,y)\frac{dy}{|y|^{m+1}}\leqslant K(1+x^2). \tag{2}$$

В таком случае на вероятностном пространстве $(\Omega, \{\mathfrak{F}_t\}, P)$ можно определить стохастическое уравнение Ито:

$$\xi(t)=\int_0^t a(s,\xi(s))\,ds+\sum_{k=1}^{r}\int_0^t b_k\big(s,\xi(s)\big)\,d\omega_1^{(k)}(s)+$$
$$+\int_0^t\int\limits_{y\in R_m}f\big(s,\xi(s),y\big)\,\nu(ds,dy), \tag{3}$$

где $0\leqslant t\leqslant T$, $\nu(A)=\omega_2(A)-E\omega_2(A)$ для каждого $A\in B_m\cap U_\varepsilon\times B[0, T]$, $\varepsilon>0$. Из свойств стохастических интегралов и условия (2) следует, что каждое решение $\xi(t)$ уравнения (3) определяет п. вс. на Ω отображение $\xi(\cdot, \omega)$ на некоторое подмножество $\xi(\Omega)\subset B_m[0, T]$, где $B_m[t_1, t_2]$ — множество всех непрерывных справа функций $x(t)\in R_m$, $t\in[t_1, t_2]$, у которых отсутствуют разрывы II рода.

4. Следующая лемма является аналогом леммы 3.1 [3].

Лемма. *Пусть $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — 2 решения (3) уравнения, для которых $\mu_{\xi_1}=\mu_{\xi_2}$*). Тогда, если ранг матрицы*

$$A(t, x)=\Big\|\sum_{k=1}^{r}b_k^{(i)}(t,x)\,b_k^{(j)}(t,x)\Big\|_{i,j=\overline{1,m}}$$

не зависит от t, x и равен r, то $\xi_1(t)=\xi_2(t)$ с вероятностью 1.

*) μ_ξ — мера, порожденная конечномерными распределениями процесса $\xi(t)$.

Доказательство. Пусть $\xi(t)$ — любое из решений $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$. Легко проверить, что оно удовлетворяет условиям $A_1 - A_3$ [4] и процесс

$$\bar{\xi}(t) = \xi(t) - Q(t) = \xi(t) - \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sum_{0\leqslant s\leqslant t} \chi_{U_\varepsilon}\Big(\xi(s) - \xi(s-0)\Big) \times$$

$$\times \Big(\xi(s) - \xi(s-0)\Big) \tag{4}$$

непрерывный с вероятностью 1. Легко заметить, что

$$Q(t) = \int_0^t \int_{y\in R_m} f\Big(s, \xi(s), y\Big)\, \nu(ds, dy).$$

Далее, существуют (см. [4]) матрицы — ортогональная $U(t, x)$ и диагональные $\Lambda_1(t, x)$, $\Lambda_2(t, x)$, такие что первые r координат процесса

$$w(t) = \int_0^t \Lambda_1\Big(s, \xi(s)\Big)\, U\Big(s, \xi(s)\Big)\, d\xi'(s) \tag{5}$$

образуют r-мерный винеровский процесс $w^{(r)}(t)$, а стохастический интеграл в матричной форме берется по мартингалу $\xi'(t) = \xi(t) - Q(t) - \int_0^t a\Big(s, \xi(s)\Big)\, ds$.

Учитывая теперь вид $\xi'(t)$, а также выражение для $b_k(t, x)$ через элементы матриц $U(t, x)$ и $\Lambda_2(t, x)$, можно утверждать, что

$$w^{(r)}(t) = \omega_1(t).$$

Заметим, что п. вс. на $\xi(\Omega)$ можно определить отображения $\tilde{x}$ и $\tilde{\tilde{x}}$ так, чтобы с вероятностью 1:

$$\tilde{x}\Big(\xi(\cdot, \omega)\Big)(t) = \bar{\xi}(t, \omega),$$

$$\tilde{\tilde{x}}\Big(\xi(\cdot, \omega)\Big)(t) = \omega_1(t) \tag{6}$$

для всех $t\in[0, T]$. Действительно, можно выбрать такие последовательности $\varepsilon_k \downarrow 0$ и T^{n_k}, где T^n: $0 < t_1^{(n)} < \quad < t_n^{(n)} = T$ — разбиение интервала $[0, T]$, $\max_{0\leqslant k<n} (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) \to 0$, $n\to\infty$, что предел в (4) можно заменить $\lim_{\varepsilon_k\downarrow 0}$ с вероятностью 1, а (5) можно понимать как предел с вер. 1 частичной интегральной суммы по разбиению T^{n_k}, когда $k\to\infty$.

Обозначим для каждого $A\in B_m \cap U_\varepsilon \times B[0, T]$, $\varepsilon > 0$ и $x(\cdot)\in\xi(\Omega)$

$$p(A)\Big(x(\cdot)\Big) = \sum_{0\leqslant t\leqslant T} \chi_A\Big(x(t) - x(t-0), t\Big).$$

Ясно, что $p(A)\in\Omega_2$. Пусть $\mathfrak{A}\Big(x(\cdot)\Big)$ — σ-алгебра, порожденная множествами вида

$$\Big\{(y, t)\in R_m \times [0, T],\ \exists A\in B_m \times B[0, T],\ \Big(f(t, x(t-0), y),\ t\Big) \in A\Big\}.$$

Так как $f(t, x, y)$ $B[0, T]\times B_m\times B_m$-измерима, а $x(\cdot)\in \boldsymbol{B}_m[0, T]$, то $\mathfrak{A}\left(x(\cdot)\right)\subset$ $\subset B_m\times B[0, T]$. Обозначим:

$$\{\omega_2\}\left(x(\cdot)\right)=\left\{\omega_2\in\Omega_2,\ \omega_2(A)=p(\tilde{A})\ \forall A\in\mathfrak{A}\left(x(\cdot)\right)\right\},$$

где $\tilde{A}$ — образ множества A при отображении $(y, t)\to\left(f\left(t, x(t-0),\ y\right), t\right)$. Покажем, что для п. вс. $x(\cdot)\in\xi(\Omega)$ с вер. 1:

$$\xi(\cdot,\ \omega')=x(\cdot), \tag{7}$$

где $\omega'=(\omega_1',\ \omega_2')$, $\omega_1'=\bar{\bar{x}}\left(x(\cdot)\right)$, $\omega_2'\in\{\omega_2\}\left(x(\cdot)\right)$. Действительно, так как $x(\cdot)\in\xi(\Omega)$, то существует $\omega''=(\omega_1'',\ \omega_2'')$, такая что $\xi(\cdot,\ \omega'')=x(\cdot)$. Из (6) следует, что $\omega_1''=\bar{\bar{x}}\left(x(\cdot)\right)$, и очевидным образом $\omega_2''\in\{\omega_2\}\left(x(\ )\right)$. Пусть

$$\tau=\inf\{t\in[0, T],\ \xi(t, \omega')\neq\xi(t, \omega'')\}.$$

Далее, так как с вер. 1 $\xi(\cdot, \omega')\in\xi(\Omega)\subset \boldsymbol{B}_m[0, T]$, то по определению $\xi(\tau-0,$ $\omega')=\xi(\tau-0,\ \omega'')$, $f(\tau, \xi(\tau-0, \omega'), y)=f\left(\tau, \xi(\tau-0, \omega''), y\right)$ и таким образом $\xi(\tau, \omega')=\xi(\tau, \omega'')$. Но это ведет к противоречию, ибо в силу непрерывности справа $x(t)$ в точке $t=\tau<T$ мы имели бы $\bar{\bar{x}}\left(\xi(\ \ , \omega')\right)\neq\bar{\bar{x}}\left(\xi(\cdot, \omega'')\right)$.

Утверждение леммы следует теперь из (7) путем рассуждений, аналогичных лемме 3.1 [3].

5. Теорема. *Пусть для уравнения* (3) *выполняется* (2) *и, кроме того,*

а) *существует* $B[0, T]\times B_m\times B_m$-*измеримая положительная функция* $\rho(t, x, y)$ *и мера* $\Pi(t, \Gamma)$, *такая что*

$$\Pi(t, x, \Gamma)=\int\limits_{f(t, x, y)\in\Gamma}\frac{dy}{|y|^{m+1}}=\int\limits_{\Gamma}\rho(t, x, y)\,\Pi(t, dy)$$

для всех t, x, $\Gamma\in B_m$;

б) *существуют* $K_1>0$, $K_2>0$, *такие что для всех* t, x:

$$|\ln\rho(t, x, y)|\leqslant K_1,\qquad \int\limits_{R_m}\ln^2\rho(t, x, y)\,\Pi(t, x, dy)\leqslant K_2;$$

в) *существует* $L>0$, *такая что для всех* t, x, y:

$$|\tilde{a}(t, x)-\tilde{a}(t, y)|^2+\sum_{k=1}^{r}|b_k(t, x)-b_k(t, y)|^2\leqslant L|x-y|^2,$$

где

$$\tilde{a}(t, x)=a(t, x)+\int\limits_{R_m}y\left(1-\rho(t, x, y)\right)\Pi(t, dy);$$

г) *ранг матрицы* $A(t, x)$ *равен* r *для всех* t, x.

Тогда уравнение (3) имеет единственное с вер. 1 решение.

Доказательство. Пусть $\xi(t)$ — некоторое решение. Тогда в обозначениях работы [5] из теоремы 3 вытекает, что процесс

$$\bar{\xi}(t)=(\xi(t),\ \mathfrak{F}_t,\ \tilde{P}),$$

удовлетворяет уравнению Ито с $\tilde{a}(t, x)$, $b_k(t, x)$, $k=1, \ldots, r$, и мерой скачков $\Pi(t, \Gamma)$, не зависящей от x. Тогда к процессу $\tilde{\xi}(t)$ можно применить в силу условий (2), (в) критерий единственности решения (см., напр., теорему 3 § 2 гл. 3 [2]), поэтому мера $\tilde{\mu}=\mu_{\tilde{\xi}}$, порожденная $\tilde{\xi}(t)$ на $\mathfrak{B}_m[0, T]$*), не зависит от первоначально выбранного решения $\xi(t)$. По теореме 5 [5]:

$$\frac{d\mu_\xi}{d\tilde{\mu}}=\alpha_T\left(\xi(\cdot)\right),$$

поэтому для любого множества $A \in \mathfrak{B}_m[0, T]$:

$$\mu_\xi(A)=\boldsymbol{P}\{\xi(\cdot, \omega)\in A\}=\int\limits_{x(\cdot)\in A}\alpha_T\left(x(\cdot)\right)d\tilde{\mu},$$

так что для любой пары решений $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ $\mu_{\xi_1}(A)=\mu_{\xi_2}(A)$, т. е. $\mu_{\xi_1}=\mu_{\xi_2}$. Теперь для доказательства теоремы остается воспользоваться вышеуказанной леммой.

6. Заметим, наконец, что условия (б) теоремы могут быть ослаблены (см. замечание 4 [5]). Например, для процесса рождения из 1 условия теоремы выполняются, если $\lambda(x)$ удовлетворяет условию Липшица и $0<c_1\leqslant\lambda(x)\leqslant c_2<$ $<\infty$, где ограничение снизу вызвано именно условием (б) и, очевидно, несущественно для единственности решения. Условия (в) в одномерном случае можно заменить условием Гельдера с $\alpha\geqslant\frac{1}{2}$ (аналогично тому, как это делалось в [2], гл. 5 § 4).

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
1.VII.1969

ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. Гихман, А. В. Скороход, Стохастические дифференциальные уравнения, Киев, „Наук думка", 1968.
2. А. В. Скороход, Исследования по теории случайных процессов, Изд. КГУ, 1961.
3. И. В. Гирсанов, О стохастическом интегральном уравнении Ито, ДАН СССР, **138**, 1 (1961), 18–21.
4. Б. Григелионис, О марковском свойстве случайных процессов, Лит. матем. сб., **VIII**, 3 (1968), 502–520.
5. Б. Григелионис, Об абсолютно непрерывной замене меры и марковском свойстве случайных процессов, Лит. матем. сб., **IX**, 1 (1969), 71–82.

APIE K. ITO STOCHASTINĖS LYGTIES SPRENDINIO VIENATINUMĄ

D. SURGAILIS

(Reziumė)

Darbe gautas vienas kriterijus stochastinės K. Ito lygties sprendinio vienatinumui.

*) $\mathfrak{B}_m[0, T]$ – σ-алгебра, порожденная цилиндрическими подмножествами $B_m[0, T]$.

ON THE UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF A K. ITO'S STOCHASTIC EQUATION

D. SURGAILIS

(*Summary*)

In the paper a criterion for the uniqueness of the solution of a Ito's stochastic differential equation is proved.