X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1970

УДК – 518.9

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ВИД РАВНОВЕСНЫХ СТРАТЕГИЙ НЕКОТОРЫХ НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР ДВУХ ЛИЦ С ВЫБОРОМ МОМЕНТА ВРЕМЕНИ

Д. П. СУДЖЮТЕ

Рассматривается неантагонистическая игра двух лиц на единичном квадрате. При предположении, что ядра игры обладают некоторыми свойствами монотонности, гладкости и ограниченности, исследуется вид равновесных стратегий, доказывается их существование и указывается путь к их нахождению в частных случаях.

Игра, как обычно, определяется множеством стратегий игроков и функциями выигрышей. Стратегиями игроков являются функции распределения $x(\xi)$ и $y(\eta)$ на интервале [0, 1]. При выборе первым игроком стратегии $x(\xi)$, а вторым $y(\eta)$, первый выигрывает

$$\int_0^1 \int_0^1 K(\xi, \eta)\, dx(\xi)\, dy(\eta),$$

а второй

$$\int_0^1 \int_0^1 L(\xi, \eta)\, dx(\xi)\, dy(\eta),$$

где

$$K(\xi, \eta)=\begin{cases} M(\xi, \eta), & \xi<\eta, \\ \Phi_1(\xi), & \xi=\eta, \\ N(\xi, \eta), & \xi>\eta, \end{cases}$$

$$L(\xi, \eta)=\begin{cases} P(\xi, \eta), & \xi<\eta, \\ \Phi_2(\xi), & \xi=\eta, \\ R(\xi, \eta), & \xi>\eta. \end{cases}$$

Здесь ограниченные функции $K(\xi, \eta)$, $L(\xi, \eta)$, называемые ядрами, определены на замкнутом квадрате $0\leqslant\xi, \eta\leqslant 1$, причем мы будем предполагать выполненными следующие условия:

(a) Функции $M(\xi, \eta)$, $P(\xi, \eta)$ определены на замкнутом треугольнике $0\leqslant\xi\leqslant\eta\leqslant 1$, а функции $N(\xi, \eta)$, $R(\xi, \eta)$ на замкнутом треугольнике $0\leqslant\eta\leqslant\xi\leqslant 1$. Все они имеют непрерывные вторые частные производные, определенные в соответствующих замкнутых треугольниках.

(б) Частные производные M_ξ, N_ξ, P_η, R_η положительны в соответствующих замкнутых треугольниках с возможными исключениями $M_\xi(1, 1)=0$, $P_\eta(1, 1)=0$.

(в) Для $\xi\in(0, 1)$ значения функции $\Phi_1(\xi)$ находятся между $M(\xi, \xi)$ и $N(\xi, \xi)$, причем равны какой-нибудь из них только в тех точках, в которых $M(\xi, \xi)= = N(\xi, \xi)$, а значения $\Phi_2(\xi)$ — между $P(\xi, \xi)$ и $R(\xi, \xi)$, и равны какой нибудь из них только тогда, когда $P(\xi, \xi)=R(\xi, \xi)$.

Спектром функции распределения назовем наименьшее замкнутое множество, вне которого мера функции равна 0. Парой равновесных стратегий назовем пару стратегий $x_0(\xi)$, $y_0(\eta)$, удовлетворяющих условиям

$$\int_0^1\int_0^1 K(\xi, \eta)\,dx(\xi)\,dy_0(\eta)\leqslant\int_0^1\int_0^1 K(\xi, \eta)\,dx_0(\xi)\,dy_0(\eta)=v_1,$$

$$\int_0^1\int_0^1 L(\xi, \eta)\,dx_0(\xi)\,dy(\eta)\leqslant\int_0^1\int_0^1 L(\xi, \eta)\,dx_0(\xi)\,dy_0(\eta)=v_2.$$

Обозначим

$$V_1(\xi)=\int_0^1 K(\xi, \eta)\,dy_0(\eta),\quad V_2(\eta)=\int_0^1 L(\xi, \eta)\,dx_0(\xi)$$

и, по определению пары равновесных стратегий, получаем

$$V_1(\xi)\leqslant v_1,\ V_2(\eta)\leqslant v_2,\ 0\leqslant\xi,\ \eta\leqslant 1. \tag{1}$$

При условиях (а), (б), (в) выполнены все требования монотонности и непрерывности теоремы 1, следствия 1 и леммы 5 автора [4], и поэтому можно утверждать следующее:

(г) Если в данной игре пара стратегий $x_0(\xi)$, $y_0(\eta)$ является равновесной, то в интервале $(0, 1)$ их спектры совпадают (будем их обозначать через S) и имеют вид $S=[a, 1)$, если $a\neq 0$, и $S=(0, 1)$, если $a=0$.

(д) Если в точке $\xi_0\in S$ функция $x_0(\xi)$ имеет скачок, то $P(\xi_0, \xi_0)=R(\xi_0,\xi_0)$ и если в точке $\eta_0\in S$ скачок имеет $y_0(\eta)$, то $M(\eta_0, \eta_0)=N(\eta_0, \eta_0)$.

(е) $V_1(\xi)$ и $V_2(\eta)$ непрерывны в интервале $(0, 1)$ и $V_1(\xi)=v_1$, $V_2(\eta)=v_2$ для $\xi, \eta\in S$.

Перейдем к доказательству дальнейших утверждений.

Лемма 1. *Для того, чтобы пара стратегий $x_0(\xi)$, $y_0(\eta)$ была равновесной, необходимо и достаточно, чтобы*

1) *значения функции $V_1(\xi)=v_1$ для $\xi\in S$, $V_1(\xi)\leqslant v_1$ для $\xi\in(0, 1)\setminus S$; в точках 0 и 1 значение $V_1(\xi)$ равно v_1, если в соответствующей точке $x_0(\xi)$ имеет скачок и не больше v_1, если скачка нет;*

2) *значения функции $V_2(\eta)=v_2$ для $\eta\in S$, $V_2(\eta)\leqslant v_2$ для $\eta\in(0, 1)\setminus S$; в точках 0 и 1 значение $V_2(\eta)$ равно v_2, если в соответствующей точке $y_0(\eta)$ имеет скачок и не больше v_2, если скачка нет.*

Необходимость. Если пара $x_0(\xi)$, $y_0(\eta)$ является равновесной, то $V_1(\xi)=v_1$ для $\xi\in S$ ввиду (е) и $V_1(\xi)\leqslant v_1$ для $\xi\in[0,1]\backslash S$ ввиду неравенств (1). При паре равновесных стратегий $x_0(\xi)$, $y_0(\eta)$ выигрыш первого игрока равен

$$v_1=\int_0^1\int_0^1 K(\xi,\eta)\,dx_0(\xi)\,dy_0(\eta)=\alpha\int_0^1 K(0,\eta)\,dy_0(\eta)+$$

$$+\int_{+0}^{1-0}\left[\int_0^1 K(\xi,\eta)\,dy_0(\eta)\right]dx_0(\xi)+\beta\int_0^1 K(1,\eta)\,dy_0(\eta)=$$

$$=\alpha V_1(0)+\int_{+0}^{1-0} V_1(\xi)\,dx_0(\xi)+\beta V_1(1)$$

и поэтому в случае $\alpha>0$ или $\beta>0$ соответствующий сомножитель не может быть меньше чем v_1, так как в противном случае сумма в правой части была бы меньше v_1.

Для $V_2(\eta)$ рассуждение аналогичное.

Достаточность. Пусть пара $x_0(\xi)$, $y_0(\eta)$ удовлетворяет условиям 1) и 2) доказываемой леммы. Тогда для любой стратегии $x(\xi)$ имеем

$$\int_0^1\int_0^1 K(\xi,\eta)\,dx(\xi)\,dy_0(\eta)=\int_0^1\left[\int_0^1 K(\xi,\eta)\,dy_0(\eta)\right]dx(\xi)=$$

$$=\int_0^1 V_1(\xi)\,dx(\xi)\leqslant v_1,$$

и для любой стратегии $y(\eta)$ имеем

$$\int_0^1\int_0^1 L(\xi,\eta)\,dx_0(\xi)\,dy(\eta)=\int_0^1\left[\int_0^1 L(\xi,\eta)\,dx_0(\xi)\right]dy(\eta)=$$

$$=\int_0^1 V_2(\eta)\,dy(\eta)\leqslant v_2,$$

что и означает, что пара $x_0(\xi)$, $y_0(\eta)$ является парой равновесных стратегий.

Лемма 2. *Точка* $b\in(0,1)$, *в которой* $M(b,b)=N(b,b)$ *или* $P(b,b)=R(b,b)$, *не входит в* S.

Доказательство. Пусть $M(b,b)=N(b,b)$. Докажем сначала, что любая последовательность функций

$$\varphi_n(\eta)=\frac{K(\xi_n,\eta)-K(b,\eta)}{\xi_n-b},$$

где $b<\xi_n<1$, $\xi_n\to b$, равномерно ограничена.

Каждая функция этой последовательности ограничена ввиду ограниченности входящих в нее функций. Пусть последовательность $\varphi_n(\eta)$ не является равномерно ограниченной. Тогда существует такая подпоследовательность $\varphi_i(\eta)$ последовательности $\varphi_n(\eta)$ и такая монотонно сходящаяся последовательность η_i точек из $[0,1]$, $\eta_i\to\eta_0$, что $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_i(\eta_i)=+\infty$ или $-\infty$. Рассмотрим здесь только первый случай, второй рассматривается аналогично. Пусть для определенности η_i убывает. Если $\eta_0 \neq b$, то $\varphi_i(\eta_i)$ стремится к $M_\xi(b, \eta_0)$ $N_\xi(b, \eta_0)$. Если $\eta_i \to b$, то существует бесконечно возрастающая подпоследовательность одного из четырех видов:

$$\frac{M(\xi_j, \eta_j) - M(b, \eta_j)}{\xi_j - b} \qquad \frac{N(\xi_j, \eta_j) - N(b, \eta_j)}{\xi_j - b}$$

$$\frac{N(\xi_j, \eta_j) - M(b, \eta_j)}{\xi_j - b} \qquad \frac{\Phi_1(\xi_j) - M(b, \xi_j)}{\xi_j - b}$$

Первые две последовательности стремятся соответственно к $M_\xi(b, b)$, $N_\xi(b, b)$. Члены третьей последовательности, ввиду $\xi_j \geqslant \eta_j$ и $N(b, b) = M(b, b)$, удовлетворяют неравенству

$$\left|\frac{N(\xi_j, \eta_j) - M(b, \eta_j)}{\xi_j - b}\right| \leqslant \left|\frac{N(\xi_j, \eta_j) - N(\xi_j, b)}{\eta_j - b}\right| + \left|\frac{N(\xi_j, b) - N(b, b)}{\xi_j - b}\right| + \left|\frac{M(b, b) - M(b, \eta_j)}{\eta_j - b}\right|$$

правая часть которого стремится к

$$|N_\eta(b, b)| + |N_\xi(b, b)| + |M_\eta(b, b)|.$$

Члены четвертой последовательности, ввиду свойства (в), находятся между

$$\frac{N(\xi_j, \xi_j) - M(b, \xi_j)}{\xi_j - b} \qquad \frac{M(\xi_j, \xi_j) - M(b, \xi_j)}{\xi_j - b}$$

Таким образом, в силу свойства (а), во всех случаях сходимости η_i к η_0, последовательность $\varphi_i(\eta_i)$ имеет конечный предел. Это противоречие и доказывает, что исходная последовательность функций $\varphi_n(\eta)$ является равномерно ограниченной.

Пусть, далее, утверждение леммы не выполняется и точка $b \in (0, 1)$, в которой $M(b, b) = N(b, b)$, принадлежит S. Тогда $[b, 1) \in S$, ввиду (г), и $V_1(\xi) = v_1$ для $\xi \in [b, 1)$, ввиду (е). Пусть $\xi_n \to b$, $\xi_n > b$, $n = 1, 2, \ldots$ тогда

$$0 = \lim_{\xi_n \to b} \frac{V_1(\xi_n) - V_1(b)}{\xi_n - b} = \lim_{\xi_n \to b} \frac{\int_0^1 [K(\xi_n, \eta) - K(b, \eta)]\, dy_0(\eta)}{\xi_n - b} =$$

$$= \int_0^1 \lim_{\xi_n \to b} \frac{K(\xi_n, \eta) - K(b, \eta)}{\xi_n - b}\, dy_0(\eta) =$$

$$= \int_0^b N_\xi(b, \eta)\, dy_0(\eta) + \int_{b+0}^1 M_\xi(b, \eta)\, dy_0(\eta) > 0,$$

где переход к пределу под знаком интеграла возможен по теореме Лебега ввиду равномерной ограниченности ранее исследованной последовательности. Последнее неравенство получается из условия (б). Оно и показывает неправильность сделанного допущения. Таким образом $b \notin S$.

Аналогично доказывается, что если $P(b, b) = R(b, b)$, то $b \notin S$.

Лемма 3. *В каждой точке интервала* $(a,1)$ *функции* $x_0(\xi)$ *и* $y_0(\eta)$ *имеют непрерывные производные.*

Доказательство. Будем исследовать функцию распределения $y_0(\eta)$ и сначала докажем, что она имеет производную в интервале $(a, 1)$.

По свойству (е) для функции $V_1(\xi)$ для любого $\eta_0\in(a, 1)$ и для любого $\Delta\xi$ такого, что $\eta_0+\Delta\xi\in(a, 1)$, можно написать

$$0 = V_1(\eta_0+\Delta\xi) - V_1(\eta_0) = \int^1 K(\eta_0+\Delta\xi,\ \eta)\,dy_0(\eta) -$$

$$-\int K(\eta_0,\ \eta)\,dy_0(\eta) = \int_0^{\eta_0} [N(\eta_0+\Delta\xi,\ \eta) - N(\eta_0,\ \eta)]\,dy_0(\eta) +$$

$$+\int_{\eta_0}^{\Delta\xi} N(\eta_0+\Delta\xi,\ \eta)\,dy_0(\eta) - \int M(\eta_0,\eta)\,dy_0(\eta) +$$

$$+\int_{\eta_0+\Delta\xi}^{1} [M(\eta_0+\Delta\xi,\ \eta) - M(\eta_0,\ \eta)]\,dy_0(\eta). \qquad (2)$$

Для выражения

$$\frac{1}{\Delta\xi}\int_{\eta_0}^{\eta_0+\Delta\xi} N(\eta_0+\Delta\xi,\ \eta)\ dy_0(\eta) = \int_{\eta_0}^{\eta_0+\Delta\xi} N(\eta_0+\Delta\xi,\ \eta)\ d\,\frac{y_0(\eta)}{\Delta\xi}$$

$$m\ \frac{y_0(\eta_0+\Delta\xi)-y_0(\eta_0)}{\Delta\xi} \leqslant \int^{\Delta\xi} N(\eta_0+\Delta\xi,\eta)\,d\,\frac{y_0(\eta)}{\Delta\xi} \leqslant M\ \frac{y_0(\eta_0+\Delta\xi)-y_0(\eta_0)}{\Delta\xi}$$

где

$$m = \min_{\eta_0\leqslant\eta\leqslant\xi\leqslant\eta_0+\Delta\xi} N(\xi,\ \eta),\quad M = \max_{\eta_0\geqslant\eta\leqslant\xi\leqslant\eta_0\ \Delta\xi} N(\xi,\ \eta).$$

Переходя к пределу, когда $\Delta\xi\to 0$, получим, что оба крайние выражения стремятся к $N(\eta_0, \eta_0)\cdot\lambda$, где λ — некоторое производное число для $y_0(\eta)$ в точке η_0.

Аналогично

$$\lim_{\Delta\xi\to 0}\frac{1}{\Delta\xi}\int_{\eta_0}^{\eta_0+\Delta\xi} M(\eta_0,\ \eta)\ dy_0(\eta) = M(\eta_0,\ \eta_0)\cdot\lambda.$$

Из равенства (2), применяя теорему Лебега и ранее выведенные равенства, получим

$$0 = \lim_{\Delta\xi\to 0}\frac{1}{\Delta\xi}\ [V_1(\eta_0+\Delta\xi) - V_1(\eta_0)] = \int_0^{\eta_0} N_\xi(\eta_0,\ \eta)\ dy_0(\eta) +$$

$$+\lambda N(\eta_0,\ \eta_0) - \lambda M(\eta_0,\ \eta_0) + \int_{\eta_0}^{1} M_\xi(\eta_0,\ \eta)\ dy_0(\eta).$$

Отсюда, так как $M(\eta_0, \eta_0)\neq N(\eta_0, \eta_0)$ по лемме 2, следует, что

$$\lambda = \frac{\int_0^{\eta_0} N_\xi(\eta_0,\ \eta)\ dy_0(\eta) + \int_{\eta_0}^{1} M_\xi(\eta_0,\ \eta)\ dy_0(\eta)}{M(\eta_0,\ \eta_0) - N(\eta_0,\ \eta_0)},$$

т. е. λ не зависит от образа сходимости $\Delta\xi$ к нулю. Иными словами, все производные числа функции $y_0(\eta)$ в точке η_0 равны между собой, а это достаточное условие для существования $y_0'(\eta)$ в этой точке.

Теперь докажем, что $y_0'(\eta)$ в интервале $(a, 1)$ непрерывна. Для выражения

$$\begin{aligned}
v_1 = V_1(\xi) = \gamma N(\xi, 0) + \int_a^\xi N(\xi, \eta)\, dy_0(\eta) + \\
+ \int_\xi^{1-0} M(\xi, \eta)\, dy_0(\eta) + \delta M(\xi, 1) = \gamma N(\xi, 0) + N(\xi, \xi)\, y_0(\xi) - \\
- N(\xi, a)\, y_0(a) - \int_a^\xi N_\eta(\xi, \eta)\, y_0(\eta)\, d\eta + M(\xi, 1)\, y_0(1-0) - \\
- M(\xi, \xi)\, y_0(\xi) - \int_\xi^{1-0} M_\eta(\xi, \eta)\, y_0(\eta)\, d\eta + \delta M(\xi, 1)
\end{aligned}$$

найдем производную, которая, ввиду свойства (е), тождественно равна 0 для $\xi \in (a, 1)$:

$$\begin{aligned}
0 = \gamma N_\xi(\xi, 0) + N_\xi(\xi, \xi)\, y_0(\xi) + N(\xi, \xi)\, y_0'(\xi) - N_\xi(\xi, a)\, y_0(a) - \\
- \int_a^\xi N_{\eta\xi}(\xi, \eta)\, y_0(\eta)\, d\eta - N_\eta(\xi, \xi)\, y_0(\xi) + M_\xi(\xi, 1)\, y_0(1-0) - \\
- M_\xi(\xi, \xi)\, y_0(\xi) - M(\xi, \xi)\, y_0'(\xi) - \int_\xi^{1-0} M_{\eta\xi}(\xi, \eta)\, y_0(\eta)\, d\eta + \\
+ M_\eta(\xi, \xi)\, y_0(\xi) + \delta M_\xi(\xi, 1),
\end{aligned}$$

и отсюда

$$\begin{aligned}
[M(\xi, \xi) - N(\xi, \xi)]\, y_0'(\xi) = \gamma N_\xi(\xi, 0) + N_\xi(\xi, \xi)\, y_0(\xi) - \\
- N_\xi(\xi, a)\, y_0(a) - \int_a^\xi N_{\eta\xi}(\xi, \eta)\, y_0(\eta)\, d\eta - N_\eta(\xi, \xi)\, y_0(\xi) + \\
+ M_\xi(\xi, 1)\, y_0(1-0) - M_\xi(\xi, \xi)\, y_0(\xi) - \int_\xi^{1-0} M_{\eta\xi}(\xi, \eta)\, y_0(\eta)\, d\eta + \\
+ M_\eta(\xi, \xi)\, y_0(\xi) + \delta M_\xi(\xi, 1),
\end{aligned}$$

а так как все входящие в левую часть функции непрерывны и по лемме 2 точка, в которой $M(\xi, \xi) = N(\xi, \xi)$, не входит в $(a, 1)$, то деление на непрерывную функцию $M(\xi, \xi) - N(\xi, \xi)$ возможно, и имеем, что $y_0'(\xi)$ в интервале $(a, 1)$ — непрерывна.

Таким же путем доказывается и непрерывность $x_0'(\xi)$ в интервале $(a, 1)$.

Теорема 1. *Если* $M(1, 1) = N(1, 1)$ *или* $P(1, 1) = R(1, 1)$ *и пара* $x_0(\xi)$, $y_0(\eta)$ *в этой игре является равновесной, то она состоит из функций распределения, постоянных на интервале* $(0, 1)$.

Доказательство. Пусть для определенности $M(1, 1) = N(1, 1)$ и допустим противное, т. е. что имеется непустой интервал $(a, 1)$, принадлежащий спектру. Тогда

$$V_1(\xi) = \gamma N(\xi, 0) + \int_a^\xi N(\xi, \eta) g_a(\eta) d\eta + \int_\xi^1 M(\xi, \eta) g_a(\eta) d\eta + \\ + \delta M(\xi, 1), \tag{3}$$

где $g_a(\eta)$ — непрерывна в интервале $(a, 1)$ ввиду лемм 2 и 3. Так как $V_1(\xi)$ для $\xi \in [a, 1)$ постоянна (свойство (е)), а функции в правой части (3) непрерывны, то

$$V_1(1-0) = \gamma N(1, 0) + \int_a^{1-0} N(1, \eta) g_a(\eta) d\eta + \delta M(1, 1) = v_1.$$

Доказательство того, что последовательность функций

$$\frac{F(\eta) - K(\xi_n, \eta)}{1-\xi_n}, \quad \text{где} \quad \xi_n \to 1$$

$$F(\eta) = \begin{cases} K(1, \eta), & 0 \leqslant \eta < 1, \\ M(1, 1), & \eta = 1, \end{cases}$$

равномерно ограничена, проводится так же, как в лемме 2, и наконец, применяя теорему Лебега, получаем

$$0 = \lim_{\xi_n \to 1} \frac{V_1(1-0) - V_1(\xi_n)}{1-\xi_n} = \lim_{\xi_n \to 1} \int_0^1 \frac{F(\eta) - K(\xi_n - \eta)}{1-\xi_n} dy_0(\eta) =$$

$$= \int_0^1 \lim_{\xi_n \to 1} \frac{F(\eta) - K(\xi_n, \eta)}{1-\xi_n} dy_0(\eta) =$$

$$= \gamma N_\xi(1, 0) + \int_a^{1-0} N_\xi(1, \eta) dy_0(\eta) + \delta M_\xi(1, 1) > 0.$$

Полученное неравенство показывает неправильность допущения, т. е. получаем, что пересечение спектра с интервалом $(0, 1)$ пусто.

При $P(1, 1) = R(1, 1)$ доказательство аналогично.

Перейдем к вопросу о существовании и виде равновесных стратегий при следующих условиях:

$$M(1, 1) > N(1, 1), \tag{4}$$

$$P(1, 1) < R(1, 1), \tag{5}$$

$$\Phi_1(1) \leqslant M(1, 1) \text{ и } \Phi_2(1) \leqslant R(1, 1). \tag{6}$$

Определенную на интервале $[0, 1)$ функцию распределения, имеющую скачки в точках 0 и 1 соответственно c и d и плотность $\varphi(\xi)$ на интервале $[a, 1]$, будем обозначать $[c, \varphi_a, d]$.

Из лемм 2 и 3 вытекает, что, если в условиях (а), (б), (в) пара равновесных стратегий существует, то она имеет вид $x_0(\xi) = [\alpha, f_a, \beta]$, $y_0(\eta) = [\gamma, g_a, \delta]$, где $a > \sup \{\xi | 0 < \xi < 1, M(\xi, \xi) = N(\xi, \xi) \text{ или } P(\xi, \xi) = R(\xi, \xi)\}$.

Отсюда, ввиду постоянности $V_1(\xi)$ и $V(\eta)$ S, следует и $f_a(\xi)$ должны удовлетворять соответственно следующим уравнениям

$$\gamma N(\xi,0)+\int_a^{\xi} N(\xi,\eta)\,g_a(\eta)\,d\eta+\int_{\xi}^{1} M(\xi,\eta)\,g_a(\eta)\,d\eta+\delta M(\xi,1)=c_1,$$

$$\alpha P(0,\eta)\quad\int_a^{\eta} P(\xi,\quad f_a(\xi)\,d\xi+\int_{\eta}^{1} R(\xi,\eta)\,f_a(\xi)\,d\xi+\beta R(1\quad\eta)$$

где $a\leqslant\xi,\eta\quad 1$. При дифференцировании первого уравнения второго получаем

$$N_{\xi}(\xi,0)+\int_a^{\xi} N_{\xi}(\xi,\eta)\,g_a(\eta)\,d\eta+N(\xi,\xi)\,g_a(\xi)$$

$$\int_{\xi}^{1} M_{\xi}(\xi,\eta)\,g_a(\eta)\,d\eta-M(\xi,\xi)\,g_a(\xi)+\delta M_{\xi}(\xi,1)=0,$$

$$\alpha P_{\eta}(0,\eta)+\int_a^{\eta} P_{\eta}(\xi,\eta)\,f_a(\xi)\,d\xi+P(\eta,\eta)\,f_a(\eta)+$$

$$+\int_{\eta}^{1} R_{\eta}(\xi,\eta)\,f_a(\xi)\,d\xi-R(\eta,\eta)\,f_a(\eta)+\beta R_{\eta}(1,\eta)\quad 0,$$

а так как $M(\xi,\xi)\neq N(\xi,\xi)$ и $P(\eta,\eta)\neq R(\eta,\eta)$ для $a\leqslant\xi,\eta\quad 1$, при делении получаем линейные интегра. уравнения

$$g(u)-\int U(u,\eta)\,g(\eta)\,d\eta=\gamma q_0(u)+\delta q_1(u),$$

$$f(t)-\int_a^1 T(\xi,t)\,f(\xi)\,d\xi=\alpha p_0(t)+\beta p_1(t), \tag{8}$$

где

$$U(u,\eta)=\begin{cases}\dfrac{N_{\xi}(u,\eta)}{M(u,u)-N(u,u)} & a\leqslant\eta<u\leqslant 1,\\[2mm] \dfrac{M_{\xi}(u,\eta)}{M(u,u)-N(u,u)} & a\leqslant u\leqslant\eta\leqslant 1,\end{cases}$$

$$q_0(u)=\frac{N_{\xi}(u,0)}{M(u,u)-N(u,u)}\qquad q_1(u)=\frac{M_{\xi}(u,1)}{M(u,u)-N(u,u)} \tag{9}$$

$$T(\xi,t)=\begin{cases}\dfrac{P_{\eta}(\xi,t)}{R(t,t)-P(t,t)} & a\leqslant\xi<t\leqslant 1,\\[2mm] \dfrac{R_{\eta}(\xi,t)}{R(t,t)-P(t,t)} & a\leqslant t\leqslant\xi\leqslant 1,\end{cases}$$

$$p_0(t)=\frac{P_{\eta}(0,t)}{R(t,t)-P(t,t)}\qquad p_1(t)=\frac{R_{\eta}(1,t)}{R(t,t)-P(t,t)} \tag{10}$$

Через T_a будем обозначать оператор с ядром $T(\xi, t)$ и нижним пределом a, а U_a – оператор с ядром $U(u, \eta)$ и нижним пределом a. Тогда уравнения (7) и (8) можно записать так:

$$(I-U_a)\,g=\gamma q_0+\delta q_1,$$

$$(I-T_a)\,f=\alpha p_0+\beta p_1.$$

Операторы U_a и T_a являются строго положительными и вполне непрерывными, в силу выполнения неравенств (4) и (5) и непрерывности функций M, N (P, R) существует интервал $(a, 1)$, $a<1$, в котором $M(\xi, \xi)>N(\xi, \xi)$ $(P(\eta, \eta)<R(\eta, \eta))$. Из этих свойств, незначительно изменяя некоторые доказательства в [1], получаем дополнительные свойства.

(ж) Если $\lambda(a)$ означает спектральный радиус T_a, т. е. $\lambda(a)$ есть радиус наименьшего круга в комплексной плоскости с центром в начале координат, который содержит все собственные числа T_a, то $\lambda(a)$ является собственным числом T_a и имеет положительную собственную функцию $f^{(a)}$. Кроме того, строгая положительность T_a гарантирует, что собственная функция, соответствующая $\lambda(a)$, единственна с точностью до постоянного множителя.

(з) Спектральный радиус $\lambda(a)$ является непрерывной строго монотонной функцией a. Если $a\to 1$, то $\lambda(a)\to 0$.

(и) Если $\lambda>\lambda(a)$, то оператор $\left(I-\frac{T_a}{\lambda}\right)^{-1}$ существует и может быть выражен посредством ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{T_a}{\lambda}\right)^n$$

Свойства (ж) – (и) дословно повторяются для оператора U_a и его спектрального радиуса $\mu(a)$.

(к) Если $P(1, 1)<R(1, 1)$ и существует такое значение $\eta_0\in[0, 1)$, что $P(\eta_0, \eta_0)=R(\eta_0, \eta_0)$, то существует такое значение $a>\eta_0$, что $\lambda(a)=1$. Аналогично, если $M(1, 1)>N(1, 1)$ и существует такое значение $\xi_0\in[0, 1)$, что $M(\xi_0, \xi_0)=N(\xi_0, \xi_0)$, то существует такое значение $a^*>\xi_0$, что $\mu(a^*)=1$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (4), (5), (6) и $\lambda(0)<1$, $\mu(0)<1$, Тогда:

1) Если $\Phi_1(0)\leqslant N(0, 0)$, то существует пара равновесных стратегий вида

$$x_0=[0, f_0, \beta],\quad y_0=[\gamma, g_0, 0].$$

2) Если $\Phi_2(0)\leqslant P(0, 0)$, то существует пара равновесных стратегий вида

$$x_0=[\alpha, f_0, 0],\quad y_0=[0, g_0, \delta].$$

3) Если

$$N(0, 0)<\Phi_1(0)<N(1, 0),\quad P(0, 0)<\Phi_2(0) \tag{11}$$

$$P(0, 0)<\Phi_2(0)<R(0, 1),\quad N(0, 0)<\Phi_1(0), \tag{12}$$

уществует пара равновесных стратегий одного из следующих видов

$$x_0=[\alpha, f_a, \beta],\quad y_0=[\gamma, g_a, 0];$$

$$x_0=[\alpha, f_a, 0],\quad y_0=[\gamma, g_a, \delta].$$

4) Если $N(1, 0) \leqslant \Phi_1(0)$ и $P(0, 1) \leqslant \Phi_2(0)$, то пара стратегий $x_0 = [1, 0, 0]$, $y_0 = [1, 0, 0]$ является равновесной.

Доказательство. Рассуждения, аналогичные проведенным в [1] приводят к построению класса стратегий игрока первого, имеющих вид $x = [\alpha, f_a, \beta]$, $0 \leqslant a \leqslant 1$, где хоть одна из величин α, β неравна нулю и класса стратегий игрока второго, имеющих вид $y = [\gamma, g_a, \delta]$, $0 \leqslant a \leqslant 1$, где хоть одна из величин γ, δ неравна нулю. Здесь функции f_a, g_a являются решениями уравнений $(I - T_a) f_a = \alpha p_0 + \beta p_1$, $(I - U_a) g_a = \gamma q_0 + \delta q_1$, где p_0, p_1, q_0, q_1-функции, определенные соотношениями (9), (10). Далее, подобным образом как в [1] соотвественно для каждого $\eta \in [a, 1]$, $\zeta \in [a, 1]$ вводим функции

$$t(a, \alpha, \beta) = \alpha P(0, \eta) + \int_a^{\eta} P(\xi, \eta) f_a(\xi)\, d\xi + \int_{\eta}^{1} R(\xi, \eta) f_a(\xi)\, d\xi + \beta R(1, \eta), \tag{13}$$

$$u(a, \gamma, \delta) = \gamma N(\xi, 0) + \int_a^{\xi} N(\xi, \eta) g_a(\eta)\, d\eta + \int_{\xi}^{1} M(\xi, \eta) g_a(\eta)\, d\eta + \delta M(\xi, 1), \tag{14}$$

независящие от этих переменных, и ввиду монотонности и непрерывности функций M, N, P, R удовлетворяющие соотношениям

$$t(a, \alpha, \beta) > \alpha P(0, \eta) + \int_a^1 R(\xi, \eta) f_a(\xi)\, d\xi + \beta R(1, \eta), \quad \eta \in [0, a), \tag{15}$$

$$u(a, \gamma, \delta) > \gamma N(\xi, 0) + \int_a^1 M(\xi, \eta) g_a(\eta)\, d\eta + \delta M(\xi, 1), \quad \xi \in [0, a). \tag{16}$$

Аналогично получается, что соответственно при $\beta = 0$, $\delta = 0$ величины α и γ являются непрерывными функциями a. Функции $t(a, \alpha, 0)$, $u(a, \gamma, 0)$ непрерывны по a. Кроме того

$$\lim_{a \to 1} t(a, \alpha, 0) = P(0, 1),$$

$$\lim_{a \to 1} u(a, \gamma, 0) = N(1, 0),$$

так как

$$\lim_{a \to 1} \int_a^1 f_a(\xi)\, d\xi = 0,$$

$$\lim_{a \to 1} \int_a^1 g_a(\eta)\, d\eta = 0.$$

При фиксированном a, очевидно функции $t(a, \alpha, r\alpha)$, $u(a, \gamma, r\gamma)$ являются непрерывными по r $(0 \leqslant r \leqslant \infty)$.

Введем также функции

$$\bar{t}(a,\ \alpha,\ \beta)=\alpha\Phi_2(0)+\int_a^1 R(\xi,\ 0)f_a(\xi)\,d\xi+\beta R(1,\ 0),$$

$$\tilde{u}(a,\ \gamma,\ \delta)=\gamma\Phi_1(0)+\int_a^1 M(0,\ \eta)g_a(\eta)\,d\eta+\delta M(0,\ 1),$$

которые, очевидно, имеют следующие свойства аналогичные свойствам функции t и u.

Функций $\bar{t}(a,\ \alpha,\ 0)$, $\tilde{u}(a,\ \gamma,\ 0)$ являются непрерывными функциями a; при фиксированном a функции $\bar{t}(a,\ \alpha,\ r\alpha)$, $\tilde{u}(a,\ \gamma,\ r\gamma)$ непрерывны по $r\ (0\leqslant r\leqslant\infty)$ и

$$\lim_{a\to 1}\bar{t}(a,\ \alpha,\ 0)=\Phi_2(0),$$

$$\lim_{a\to 1}\tilde{u}(a,\ \gamma,\ 0)=\Phi_1(0).$$

Перейдем к доказательству утверждений теоремы.

Пусть выполнено неравенство $\Phi_1(0)\leqslant N(0,\ 0)$. Если в стратегиях x и y положим $\alpha=0$, $\delta=0$, $a=0$, то ввиду (13), (14) и (6) получаем

$$V_1(0)=\gamma\Phi_1(0)+\int_0^1 M(0,\ \eta)g_0(\eta)\,d\eta\leqslant\gamma N(0,\ 0)+$$
$$+\int_0^1 M(0,\ \eta)g_0(\eta)\,d\eta=u(0,\ \gamma,\ 0),$$

$$V_1(1)=\gamma N(1,\ 0)+\int_0^1 N(1,\ \eta)g_0(\eta)\,d\eta=u(0,\ \gamma,\ 0),$$

$$V_2(0)=\int_0^1 R(\xi,\ 0)f_0(\xi)\,d\xi+\beta R(1,\ 0)=t(0,\ 0,\ \beta),$$

$$V_2(1)=\int_0^1 P(\xi,\ 1)f_0(\xi)\,d\xi+\beta\Phi_2(1)\leqslant\int_0^1 P(\xi,\ 1)f_0(\xi)\,d\xi+\beta R(1,\ 1),$$

и ввиду леммы 1 эта пара стратегий является равновесной.

Аналогично доказывается, что при $\Phi_2(0)\leqslant P(0,\ 0)$ пара стратегий $x=[\alpha,\ f_0,\ 0]$, $y=[0,\ g_0,\ \delta]$ является равновесной.

Докажем теперь утверждение 3). Пусть для определенности выполняются соотношения (11). Тогда

$$u(0,\ \gamma,\ 0)=\gamma N(0,\ 0)+\int_0^1 M(0,\ \eta)g_0(\eta)\,d\eta<\gamma\Phi_1(0)+$$
$$+\int_0^1 M(0,\ \eta)g_0(\eta)\,d\eta=\tilde{u}(0,\ \gamma,\ 0),$$

$$u(1,\ \gamma,\ 0)=N(1,\ 0)>\Phi_1(0)=\tilde{u}(1,\ \gamma,\ 0),$$

и ввиду непрерывности функций u и $\tilde{u}$ по a для некоторого $a_0 \in (0, 1)$ будет $\tilde{u}(a_0, \gamma, 0) = u(a_0, \gamma, 0)$. Кроме того $t(0, \alpha, 0) < \tilde{t}(0, \alpha, 0)$ и функции t и $\tilde{t}$ непрерывны по a. Из всего этого следует, что среди значений $a \in (0, 1)$ для которых

$$t(a, \alpha, 0) \leqslant \tilde{t}(a, \alpha, 0), \tag{17}$$

$$u(a, \gamma, 0) \leqslant \tilde{u}(a, \gamma, 0) \tag{18}$$

и хотя бы одно из этих соотношений превращается в равенство, существует наименьшее, неравное нулю. Обозначим его через a_1. Пусть, для определенности

$$t(a_1, \alpha, 0) = \tilde{t}(a_1, \alpha, 0), \ u(a_1, \gamma, 0) < \tilde{u}(a_1, \gamma, 0).$$

Из непрерывности и монотонности функций M и N следует, что $u(a_1, 0, \delta) > \tilde{u}(a_1, 0, \delta)$ и ввиду непрерывности функций $u(a_1, \gamma, r\gamma)$, $\tilde{u}(a_1, \gamma, r\gamma)$ по r получаем, что для некоторого r_1 выполняется равенство

$$u(a_1, \gamma, r_1\gamma) = \tilde{u}(a_1, \gamma, r_1\gamma).$$

То, что для пары стратегий $x_0 = [\alpha, f_{a_1}, 0]$, $y_0 = [\gamma, g_{a_1}, r_1\gamma]$ выполнены достаточные условия леммы 1 следует из (13), (14), (15), (16) и соотношений

$$V_2(1) = \alpha P(0, 1) + \int_{a_1}^{1} P(\xi, 1) f_{a_1}(\xi) d\xi = t(a_1, \alpha, 0),$$

$$V_2(0) = \tilde{t}(a_1, \alpha, 0) = t(a_1, \alpha, 0),$$

$$V_1(0) = \tilde{u}(a_1, \gamma, r_1\gamma) = u(a_1, \gamma, r_1\gamma),$$

$$V_1(1) = \gamma N(1, 0) + \int_{a_1}^{1} N(1, \eta) g_{a_1}(\eta) d\eta + r_1\gamma\Phi_1(1) \leqslant u(a_1, \gamma, r_1\gamma),$$

где последнее неравенство выполняется ввиду условия (6).

Аналогично рассматривается случай, когда в (17) выполняется строгое неравенство, а в (18) равенство. Если в обоих этих соотношениях одновременно выполнено равенство, то очевидно, пара стратегий $x_0 = [\alpha, f_{a_1}, 0]$, $y_0 = [\gamma, g_{a_1}, 0]$ является равновесной.

Существование пары равновесных стратегий при выполнении соотношений (12) доказывается аналогично.

Остается доказать утверждение 4). Для пары стратегий $x = [1, 0, 0]$, $y = [1, 0, 0]$ достаточные условия леммы 1 выполнены, так как

$$V_1(0) = \Phi_1(0) \geqslant N(1, 0) = V_1(1) > N(\xi, 0) = V_1(\xi), \ \xi \in (0, 1),$$

$$V_2(0) = \Phi_2(0) \geqslant P(0, 1) = V_2(1) > P(0, \eta) = V_2(\eta), \ \eta \in (0, 1),$$

ввиду монотонности функций N и P.

Теорема 3. *Пусть в условиях* (4), (5), (6) *существует такое значение* $a\in[0, 1)$, *что* $\lambda(a)=1$, *или* $a^*\in[0, 1)$, *что* $\mu(a^*)=1$. *Тогда существует пара равновесных стратегий одного из трех видов*

$$x_0=[0, f_a, 0], \quad y_0=[0, g_a, \delta];$$

$$x_0=[0, f_a, 0], \quad y_0=[0, g_a, 0];$$

$$x_0=[0, f_a, \beta], \quad y_0=[0, g_a, 0].$$

Доказательство. Ввиду свойства (з) можно утверждать, что выполняется одно из двух: существует хоть одно из a и a^*, а в случае существования обоих $a\neq a^*$; существуют оба, и $a=a^*$.

В первом случае берем наибольший существующий из a и a^*. Пусть это будет a, тогда $\mu(a)<1$ ввиду свойства (з). Так как $\lambda(a)=1$, то уравнение $T_af_a=f_a$ имеет строго положительное решение f_a. Нормируем эту функцию так, чтобы выполнялось соотношение

$$\int_a^1 f_a(\xi)\,d\xi=1.$$

Свойство (ж) утверждает, что такая функция будет единственна. Выражение

$$V_2(\eta)=\int_a^\eta P(\xi, \eta)\,f_a(\xi)\,d\xi+\int_\eta^1 R(\xi, \eta)\cdot f_a(\xi)\,d\xi$$

постоянно для $\eta\in[a, 1]$, так как дифференцирование приводит к произведению с сомножителем $f_a-T_af_a=0$. Кроме того, для $\eta\in[0, a]$ имеем

$$V_2(\eta)=\int_a^1 R(\xi, \eta)\,f_a(\xi)\,d\xi<\int_a^1 R(\xi, a)\,f_a(\xi)\,d\xi=V_2(a)$$

ввиду монотонного возрастания функции R по η.

Чтобы определить стратегию второго игрока, положим $g=(I-U_a)^{-1}q_1$, где q_1 определяется по формуле (9). Так как $\mu(a)<1$, то функция g существует и может быть вычислена с помощью ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(U_a)^nq_1$. Пусть

$$\delta=\frac{1}{1+\int_a^1 g(\eta)\,d\eta}; \quad g_a(\eta)=\begin{cases}\delta g(\eta), & a\leqslant\eta\leqslant 1,\\ 0, & 0\leqslant\eta<a.\end{cases}$$

Отсюда следует, что $y_0=[0, g_a, \delta]$ является стратегией второго игрока. Кроме того, по определению g_a, имеет место равенство $(I-U_a)\,g_a=\delta q_1$, и, после дифференцирования выражения

$$V_1(\xi)=\int_a^\xi N(\xi, \eta)\,g_a(\eta)\,d\eta+\int_\xi^1 M(\xi, \eta)\,g_a(\eta)\,d\eta+\delta M(\xi, 1),$$

убеждаемся, что оно постоянно для $\xi\in[a, 1)$. Из монотонного возрастания M следует, что

$$V_1(\xi)=\int_a^1 M(\xi, \eta)\, g_a(\eta)\, d\eta+\delta M(\xi, 1)\leqslant$$

$$\leqslant\int_a^1 M(a, \eta)\, g_a(\eta)\, d\eta+\delta M(a, 1)$$

для $\xi\in[0, a)$, и в силу условия (6)

$$V_1(1)=\int_a^1 N(1, \eta)\, g_a(\eta)\, d\eta+\delta\Phi_1(1)\leqslant$$

$$\leqslant\int_a^1 N(1, \eta)\, g_a(\eta)\, d\eta+\delta M(1, 1).$$

Таким образом, пара $x_0=[0, f_a, 0]$, $y_0=[0, g_a, \delta]$ равновесна, ибо достаточные условия леммы 1 выполнены.

Аналогично доказывается, что в случае $\mu(a)=1$, $\lambda(a)<1$ существует пара равновесных стратегий, имеющих вид $x_0=[0, f_a, \beta]$, $y_0=[0, g_a, 0]$.

Еще проще доказать, что при $\lambda(a)=\mu(a)=1$ существует пара равновесных стратегий вида $x_0=[0, f_a, 0]$, $y_0=[0, g_a, 0]$, где f_a и g_a нормированные решения функциональных уравнений $T_af_a=f_a$ и $U_ag_a=g_a$.

Теорема доказана.

Из свойства (к) и предыдущей теоремы непосредственно вытекает следствие.

Следствие. Если при условиях (4), (5), (6) существует такое $\eta_0\in[0, 1)$, что $P(\eta_0, \eta_0)=R(\eta_0, \eta_0)$ или такое значение $\xi_0\in[0, 1)$, что $M(\xi_0, \xi_0)=N(\xi_0, \xi_0)$, то существует пара равновесных стратегий одного из видов, указанных в теореме 3.

Автор выражает глубокую благодарность Э. И. Вилкасу за ценные советы в работе над вышерассмотренными вопросами.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
7.VII.1969

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Карлин, Математические методы в теории игр, программировании и экономике, „Мир", М., 1964.
2. Р. Д. Льюс, Х. Райфа, Игры и решения, ИЛ, М., 1961.
3. И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, Техгиз, М., 1957.
4. Д. Суджюте, Вид спектров равновесных стратегий некоторых неантагонистических игр двух лиц на единичном квадрате, Лит. матем. сб., IX, № 3 (1969), 687—694.

KAI KURIŲ NEANTAGONISTINIŲ DVIEJŲ ASMENŲ LOŠIMŲ SU LAIKO MOMENTO PARINKIMU PUSIAUSVYROS STRATEGIJŲ EGZISTAVIMAS IR PAVIDALAS

D. SŪDŽIŪTĖ

(*Reziumė*)

Esant sąlygoms (a), (б), (в), randamos būtinos sąlygos pusiausvyros strategijų pavidalams, ir, esant sąlygoms (a), (б), (в), (4), (5), (6), parodomas pusiausvyros strategijų egzistavimas.

THE EXISTENCE AND THE SHAPE OF THE EQUILIBRIUM STRATEGIES FOR SOME TWO-PERSON NON-ZERO SUM GAMES WITH THE CHOICE OF THE MOMENT

D. SŪDŽIŪTĖ

(*Summary*)

Under the conditions (а), (б), (в), the necessary conditions for the shapes of the equilibrium strategies are obtained, and under the conditions (а), (б), (в), (4), (5), (6), the existence of the equilibrium strategies is proved.