X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1970

УДК – 517.946

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ. II

Е. К. НЕНИШКИТЕ

В [1] была сформулирована следующая теорема.

Теорема. *Пусть в уравнении с частными производными*

$$\sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=l} F^l_{i_1 i_2 \ldots i_m}(z_1, z_2, \ldots, z_m) \frac{\partial^{i_1+i_2+\ldots+i_m} u}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2} \ldots \partial z_m^{i_m}} = 0,$$

$$z_j = x_j + iy_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

коэффициенты $F^l_{i_1 i_2 \ldots i_m}(z_1, z_2, \quad z_m)$ *суть абсолютно сходящиеся в некоторой области* $G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *ряды Дирихле*:

$$F^l_{i_1 i_2 \ldots i_m}(z_1, z_2, \ldots, z_m) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(i_1 i_2 \ldots i_m)} e^{-\sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{(k)} z_j}$$

причем $\lambda_1^{(0)} = \lambda_2^{(0)} = \ldots = \lambda_m^{(0)} = 0$, $\lambda_j^{(k)} \geqslant 0$ $(j = 1, 2, \quad m;\ k = 1, 2, \ldots)$,
$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{(k} = \mu_k \underset{k\to\infty}{\nearrow} \infty$.

Пусть, далее, однородная форма

$$\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=n} A_0^{(i_1 i_2 \ldots i_m)} \eta_1^{i_1} \eta_2^{i_2} \ldots \eta_m^{i_m} \tag{A}$$

не обращается в нуль ни при каких неотрицательных $\eta_1, \eta_2, \quad \eta_m$ *с* $\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_m = 1$.

Пусть, наконец

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\mu_n} = \rho < \infty.$$

В этих условиях существует бесконечное множество линейно независимых решений вида:

$$u = e^{\sum_{j=1}^{m} \beta_j z_j} f(z_1, z_2, \ldots, z_m),$$

где $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ – решение характеристического уравнения:

$$Q(\eta_1, \eta_2, \quad \eta_m) = \sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=l} A_0^{(i_1 i_2 \ldots i_m)} \eta_1^{i_1} \eta_2^{i_2} \ldots \eta_m^{i_m} = 0, \tag{B}$$

а функция $f(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ — абсолютно сходящийся в некоторой области $G_1(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ряд Дирихле:

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_m) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l_1, l_2, \ldots, l_k=1}^{\infty} a_{l_1 l_2 \ldots l_k} e^{-\sum_{j=1}^{m} \left(\lambda_j^{(l_1)}+\lambda_j^{(l_2)}+\ldots+\lambda_j^{(l_k)}\right) z_j} \tag{C}$$

В частности, если для всех $i_1, i_2, \ldots, i_m$ с $i_1+i_2+\ldots+i_m=n$ $F^n_{i_1 i_2 \ldots i_m} \equiv \mathrm{const}$, то ряд (C) сходится абсолютно в области $G_0(x_1, x_2, \ldots, x_m) \subset G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ с границей, отстоящей от границы $G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ на ρ.

Эту теорему мы доказали для тех решений $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ характеристического уравнения (B): $Q(\beta_1, \beta_2, \quad \beta_m)=0$, для которых $Q(\beta_1-\lambda_1^{(k)}, \beta_2-\lambda_2^{(k)}, \ldots, \beta_m-\lambda_m^{(k)}) \neq 0$ при всех k $(k=1, 2, \ldots)$. В [1] показано, что таких решений при условии необращения в нуль (A) — бесконечное множество. Кроме того, мы исследовали только простые корни характеристического уравнения (B).

В настоящей работе мы освобождаемся от этих ограничений. При этом придется соответственно видоизменить и формулировку теоремы.

1. Предварительно отметим некоторые факты, которые помогут объяснить вышеупомянутые изменения теоремы и будут полезны при ее доказательстве.

Как и в [1] будем вести исследования для двух независимых комплексных переменных $(m=2)$.

а) Дифференциальное уравнение вида

$$\sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2=l} B^l_{i_1 i_2} \frac{\partial^{i_1+i_2} u}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2}} = K z_1^{\alpha} z_2^{\beta} e^{\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2} \tag{1}$$

заменой

$$u = e^{\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2} v$$

приводится к уравнению

$$\sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2=l} \frac{1}{i_1!\, i_2!} D_{i_1 i_2} \frac{\partial^{i_1+i_2} v}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2}} = K z_1^{\alpha} z_2^{\beta}, \tag{2}$$

где

$$D_{i_1 i_2} = \left. \frac{\partial^{i_1+i_2} Q(\eta_1, \eta_2)}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2}} \right|_{\substack{\eta_1=\beta_1 \\ \eta_2=\beta_2}}, \tag{3}$$

а

$$Q(\eta_1, \eta_2) = \sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2=l} B^l_{i_1 i_2} \eta_1^{i_1} \eta_2^{i_2} = 0, \tag{4}$$

— характеристическое уравнение уравнения (1).

Действительно:

$$\frac{\partial^{i_1+i_2} u}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2}} \left[\beta_1^{i_1} \left(\beta_2^{i_2} v + i_2 \beta_2^{i_2-1} \frac{\partial v}{\partial z_2} + \frac{i_2(i_2-1)}{2} \beta_2^{i_2-2} \frac{\partial^2 v}{\partial z_2^2} + \quad + \frac{\partial^{i_2} v}{\partial z_2^{i_2}}\right) + \right.$$

$$+ i_1 \beta_1^{i_1-1} \left(\beta_2^{i_2} \frac{\partial v}{\partial z_1} + i_2 \beta_2^{i_2-1} \frac{\partial^2 v}{\partial z_1 \partial z_2} + \frac{i_2(i_2-1)}{2} \beta_2^{i_2-2} \frac{\partial^3 v}{\partial z_1 \partial z_2^2} + \right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{\partial^{i_2+1} v}{\partial z_1 \partial z_2^{i_2}}\right) + \qquad + i_1 \beta_1 \left(\beta_2^{i_2} \frac{\partial^{i_1-1} v}{\partial z_1^{i_1-1}} + i_2 \beta_2^{i_2-1} \frac{\partial^{i_1} v}{\partial z_1^{i_1-1} \partial z_2} + \right.$$

$$\left. + \frac{i_2(i_2-1)}{2} \beta_2^{i_2-2} \frac{\partial^{i_1+1} v}{\partial z_1^{i_1-1} \partial z_2^2} + \ldots + \frac{\partial^{i_1+i_2-1} v}{\partial z_1^{i_1-1} \partial z_2^{i_2}}\right) +$$

$$+ \beta_2^{i_2} \frac{\partial^{i_1} v}{\partial z_1^{i_1}} + i_2 \beta_2^{i_2-1} \frac{\partial^{i_1+1} v}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2} +$$

$$\left. + i_2 \frac{i_2-1}{2} \beta_2^{i_2-2} \frac{\partial^{i_1+2} v}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^2} + \quad + \frac{\partial^{i_1+i_2} v}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2}}\right] e^{\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2}. \tag{5}$$

Умножив все производные (5) на соответствующие коэффициенты $B^l_{i_1 i_2}$, сложив и собрав все члены с одинаковыми производными, получим:

$$v \sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2=l} B^l_{i_1 i_2} \beta_1^{i_1} \beta_2^{i_2} + \frac{\partial v}{\partial z_1} \sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2=l} i_1 B^l_{i_1 i_2} \beta_1^{i_1-1} \beta_2^{i_2} +$$

$$+ \frac{\partial^2 v}{\partial z_1^2} \sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2=l} B^l_{i_1 i_2} \beta_1^{i_1-2} \beta_2^{i_2} \frac{i_1(i_1-1)}{2} +$$

$$+ \ldots + \frac{\partial^{i_1+i_2-1} v}{\partial z_1^{i_1-1} \partial z_2^{i_2}} \sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2=l} B^l_{i_1 i_2} i_1 \beta_1 +$$

$$+ \frac{\partial^{i_1+i_2} v}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2}} \sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2=l} B^l_{i_1 i_2} = K z_1^{\alpha} z_2^{\beta}. \tag{6}$$

Нетрудно видеть, что у производной $\frac{\partial^{t+p} v}{\partial z_1^t \partial z_2^p}$ стоящий коэффициент есть не что иное, как $t+p$-ая производная функции $Q(\eta_1, \eta_2)$ в точке (β_1, β_2), умноженная на $\frac{1}{t!\,p!}$. С помощью обозначений (3) из (6) находим (2), что мы и утверждаем.

б) Дадим сейчас определение кратности решения характеристического уравнения (4). Составим таблицу коэффициентов уравнения (2):

$$\begin{array}{ccccccccc}
D_{40} & & D_{31} & & D_{22} & & D_{13} & & D_{04} \\
& D_{30} & & D_{21} & & D_{12} & & D_{03} & \\
& & D_{20} & & D_{11} & & D_{02} & & \\
& & & D_{10} & & D_{01} & & & \\
& & & & D_{00} & & & &
\end{array}$$

Определение. Скажем, что решение характеристического уравнения (4) является (p, q)-кратным, если все коэффициенты $D_{mn}=0$ при $m+n\leqslant p+q-1$, $m\leqslant p$, $n\leqslant q$, а

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{q} |D_{pj}|>0, \\ \sum\limits_{j=0}^{p} |D_{jq}|>0. \end{cases}$$

Наше определение не определяет кратности однозначно: одно и то же решение может иметь несколько кратностей: (p_1, q_1), ..., (p_t, q_t). Дальнейшие рассуждения верны для каждой из этих кратностей.

Пусть (β_1, β_2) есть (p, q)-кратный корень характеристического уравнения (4). Найдем частное решение уравнения (2) вида:

$$v=z_1^p z_2^q \sum_{s_1=0}^{\alpha} \sum_{s_2=0}^{\beta} A_{s_1 s_2} z_1^{s_1} z_2^{s_2}. \tag{7}$$

Подставляя (7) в уравнение (2), находим:

$$\sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2=l} \sum_{s_1=0}^{\alpha} \sum_{s_2=0}^{\beta} \frac{1}{i_1!\, i_2!} D_{i_1 i_2} A_{s_1 s_2} (s_1+p)(s_1+p-1)\cdot \ldots \cdot(s_1+p-$$
$$-i_1+1)(s_2+q)(s_2+q-1)\ldots(s_2+q-i_2+1)\, z_1^{s_1+p-i_1} z_2^{s_2+q-i_2}=Kz_1^{\alpha} z_2^{\beta}. \tag{8}$$

Сравнивая коэффициенты у одинаковых степеней $z_1^m z_2^n$ в только что полученном соотношении с учетом того, что рассматривается (p, q)-кратное решение характеристического уравнения, получаем следующую неоднородную систему уравнений:

$$\begin{cases} A_{\alpha\beta} D_{pq} \binom{p+\alpha}{p} \binom{q+\beta}{q}=K, \\ A_{\alpha\beta} D_{pq+1} \binom{p+\alpha}{p} \binom{q+\beta}{q+1}+A_{\alpha\beta-1} D_{pq} \binom{p+\alpha}{p} \binom{q+\beta-1}{q}=0, \\ A_{\alpha\beta} D_{p+1q} \binom{p+\alpha}{p+1} \binom{q+\beta}{q}+A_{\alpha-1\beta} D_{pq} \binom{p+\alpha-1}{p} \binom{q+\beta}{q}=0, \\ A_{\alpha\beta} D_{p+1q+1} \binom{p+\alpha}{p+1} \binom{q+\beta}{q+1}+A_{\alpha\beta-1} D_{p+1q} \binom{p+\alpha}{p+1} \binom{q+\beta-1}{q}+ \\ +A_{\alpha-1\beta} D_{pq+1} \binom{p+\alpha-1}{p} \binom{q+\beta}{q}+ \\ +A_{\alpha-1\beta-1} D_{pq} \binom{p+\alpha-1}{p} \binom{q+\beta-1}{q}=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{\alpha\beta} D_{p+\alpha q+\beta}+A_{\alpha\beta-1} D_{p+\alpha q+\beta-1}+\ldots+A_{11} D_{p+1q+1}+A_{01} D_{pq+1}+ \\ +A_{10} D_{p+1q}+A_{00} D_{pq}=0. \end{cases} \tag{9}$$

Полученная система имеет $(\alpha+1)(\beta+1)$ уравнений и столько же неизвестных $A_{s_1 s_2}$. Последовательно решая уравнения системы, мы определяем коэффициенты частного решения (7) уравнения (2). Нетрудно видеть, что решение системы существует: по предположению $D_{pq}\neq 0$, кроме того, $\binom{p+\alpha-k_1}{p}\binom{q+\beta-k_2}{q}\neq 0$ для всех $k_1=0,\ 1,\ \ldots,\ \alpha,\ k_2=0,\ 1,\qquad \beta.$

Если же $\alpha=0$, $\beta=0$, то частное решение (7) принимает вид $v=A_{00}z_1^p z_2^q$ и коэффициент $A_{00}=\frac{K}{D_{pq}}\neq 0$.

В том случае, когда $K=0$, т. е. когда уравнение (2) является однородным, $(p,\ q)$-кратному корню $(\beta_1,\ \beta_2)$ характеристического уравнения (4) соответствует конечное число решений вида (7), точнее говоря, решениями будут все произведения $z_1^m z_2^n$ с $m+n\leqslant p+q-1$, $m\leqslant p$, $n\leqslant q$.

в) Из сказанного вытекает следующая лемма.

Лемма. *Рассмотрим дифференциальное уравнение*

$$\sum_{l=0}^{n}\sum_{i_1+i_2=l} A_{i_1 i_2}^{l}\frac{\partial^{i_1+i_2}u}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}}=e^{\beta_1 z_1+\beta_2 z_2}\sum_{k=1}^{\infty}a_k e^{-\left(\lambda_1^{(k)}z_1+\lambda_2^{(k)}z_2\right)}, \tag{10}$$

где $\mu_k=\lambda_1^{(k)}+\lambda_2^{(k)}\underset{k\to\infty}{\nearrow}\infty$; $\mu_k\geqslant 0$; $A_{i_1 i_2}^{l}$, a_k, $\beta_j\ (j=1,\ 2)$ — *комплексные числа, а ряд* $\sum_{k=1}^{\infty}a_k e^{-\left(\lambda_1^{(k)}z_1+\lambda_2^{(k)}z_2\right)}$ *абсолютно сходится в некоторой области* $E(x_1,\ x_2)$.

Предположим, 1) что однородная форма

$$Q_0(\eta_1,\ \eta_2)=\sum_{i_1+i_2=n}A_{i_1 i_2}^{n}\eta_1^{i_1}\eta_2^{i_2}$$

не обращается в нуль ни для каких $\eta_j\geqslant 0$ $(j=1,\ 2)$ с $\eta_1+\eta_2=1$; и 2) что пары

$$(\beta_1-\lambda_1^{(k)},\ \beta_2-\lambda_2^{(k)});\qquad k=0,\ k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_r\,^{*)}$$

являются корнями характеристического уравнения

$$Q(\eta_1,\ \eta_2)=\sum_{l=0}^{n}\sum_{i_1+i_2=l}A_{i_1 i_2}^{l}\eta_1^{i_1}\eta_2^{i_2}=0,$$

причем решение $(\beta_1-\lambda_1^{(k_j)},\ \beta_2-\lambda_2^{(k_j)})$ есть $(p_{ji},\ q_{ji})$; $i=1,\ 2,\ \ldots,\ s_j$-кратное.

Тогда уравнение (10) имеет частное решение, представимое абсолютно сходящимся в области E рядом Тейлора—Дирихле:

$$u=e^{\beta_1 z_1+\beta_2 z_2}\Bigg[\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{s_j}\frac{a_{k_j}}{D_{p_{ji}q_{ji}}}z_1^{p_{ji}}z_2^{q_{ji}}e^{-\left(\lambda_1^{(k_j)}z_1+\lambda_2^{(k_j)}z_2\right)}+$$

$$+\sum_{\substack{k=1\\ k\neq k_j;\ j=1,2,\ldots,r}}^{\infty}\frac{a_k}{Q(\beta_j-\lambda_j^{(k)})}e^{-\left(\lambda_1^{(k)}z_1+\lambda_2^{(k)}z_2\right)}\Bigg]. \tag{11}$$

---

*) В [1] доказано, что таких решений характеристическое уравнение может иметь только конечное число.

Сходимость ряда (11) вытекает из леммы, доказанной в [1].

г) Сейчас введем еще одно понятие.

Рассмотрим конечное множество B пар комплексных чисел $(\beta_1^{(1)}, \beta_2^{(1)})$, $(\beta_1^{(2)}, \beta_2^{(2)})$, ..., $(\beta_1^{(n)}, \beta_2^{(n)})$. Некоторые из них могут и совпадать. Пусть, далее, $\{\lambda_j^{(k)}\}$ $(j=1, 2)$ — две последовательности (конечные или бесконечные) положительных чисел. Мы скажем, что пара $(\beta_1^{(i)}, \beta_2^{(i)})$ сравнима с парой $(\beta_1^{(j)}, \beta_2^{(j)})$: $\operatorname{Re}\beta_k^{(i)} \geqslant \operatorname{Re}\beta_k^{(j)}$; $k=1, 2$, по последовательностям $\{\lambda_j^{(k)}\}$ $(j=1, 2)$, если существуют такие конечные совокупности чисел $\lambda_1^{(i_1)}, \lambda_1^{(i_2)}, \ldots, \lambda_1^{(i_n)}$; $\lambda_2^{(i_1)}, \lambda_2^{(i_2)}, \ldots, \lambda_2^{(i_n)}$ последовательностей $\{\lambda_1^{(k)}\}$ и $\{\lambda_2^{(k)}\}$, соответственно, и неотрицательные целые числа $p_1, p_2, \ldots, p_n$, что

$$\beta_k^{(i)} - \beta_k^{(j)} = p_1\lambda_k^{(i_1)} + p_2\lambda_k^{(i_2)} + \ldots + p_n\lambda_k^{(i_n)}; \qquad k=1, 2. \tag{12}$$

В частности, две равные пары сравнимы по любым последовательностям: в (12) достаточно полагать $p_1=p_2=\ldots=p_n=0$. Заметим, что, вообще говоря, представление (12) не единственное.

Пусть $(\beta_1^*, \beta_2^*) \in B$. Через B' обозначим совокупность всех чисел $(\beta_1, \beta_2) \in B$, для которых $\operatorname{Re}\beta_k^* \geqslant \operatorname{Re}\beta_k$; $k=1, 2$. Всякое подмножество $B^* \subseteq B'$, содержащее элемент (β_1^*, β_2^*) и обладающее тем свойством, что любых два его элемента сравнимы по последовательностям $\{\lambda_j^{(k)}\}$ $(j=1, 2)$, мы называем классом сравнимости множества B для элемента (β_1^*, β_2^*) по последовательностям $\{\lambda_j^{(k)}\}$ $(j=1, 2)$. Число элементов класса B^* называем его рангом R^*.

Образуем совокупность всех возможных классов сравнимости B^* множества B для элемента (β_1^*, β_2^*) по последовательностям $\{\lambda_j^{(k)}\}$ $(j=1, 2)$. Пусть $\bar{R}$ — множество рангов всех этих классов.

Число

$$q = \max_{R^* \in \bar{R}} R^*$$

мы будем именовать рангом сравнимости элемента (β_1^*, β_2^*) во множестве B по последовательностям $\{\lambda_j^{(k)}\}$ $(j=1, 2)$.

2. Сформулируем сейчас основной результат настоящей работы.

Теорема. *Пусть в уравнении с частными производными*

$$\sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=l} F_{i_1 i_2 \ldots i_m}^{l}(z_1, z_2, \ldots, z_m) \frac{\partial^{i_1+i_2+\ldots+i_m} u}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2} \ldots \partial z_m^{i_m}} = 0,$$

$$z_j = x_j + iy_j \qquad (j=1, 2, \ldots, m) \tag{13}$$

коэффициенты $F_{i_1 i_2 \ldots i_m}^{l}(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ *суть абсолютно сходящиеся в некоторой области* $G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *ряды Дирихле*:

$$F_{i_1 i_2 \ldots i_m}^{l}(z_1, z_2, \ldots, z_m) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(i_1 i_2 \ldots i_m)} e^{-\sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{(k)} z_j} \tag{14}$$

причем $\lambda_1^{(0)} = \lambda_2^{(0)} = \ldots = \lambda_m^{(0)} = 0$, $\lambda_j^{(k)} \geqslant 0$ $(j=1, 2, \ldots, m;\ k=1, 2, \ldots)$, $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{(k)} = \mu_k \underset{k\to\infty}{\nearrow} \infty$.

Пусть, далее, однородная форма

$$\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=n} A_0^{(i_1 i_2 \ldots i_m)} \eta_1^{i_1} \eta_2^{i_2} \ldots \eta_m^{i_m}$$

не обращается в нуль ни при каких неотрицательных $\eta_1, \eta_2, \quad \eta_m$ *с* $\eta_1+ +\eta_2+\ldots+\eta_m=1$.

Пусть, наконец,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\mu_n} = \rho < \infty.$$

В этих условиях существует бесконечное множество линейно независимых решений вида:

$$u = e^{\sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j z_j} f(z_1, z_2, \quad z_m),$$

где $(\beta_1, \beta_2, \quad \beta_m)$ — *решение характеристического уравнения*

$$Q(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m) = \sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=l} A_0^{(i_1 i_2 \ldots i_m)} \eta_1^{i_1} \eta_2^{i_2} \ldots \eta_m^{i_m} = 0, \tag{15}$$

а функция $f(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ — *абсолютно сходящийся в некоторой области* $G_1(x_1, x_2, \quad x_m)$ *ряд Тейлора—Дирихле:*

$$f(z_1, z_2, \quad \ldots, z_m) = z_1^{p_1} z_2^{p_2} \ldots z_m^{p_m} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l_1, l_2, \ldots, l_k=1}^{\infty} (A_{l_1 l_2 \ldots l_k}^{00\ldots 0} + A_{l_1 l_2 \ldots l_k}^{10\ldots 0} z_1 + \ldots + A_{l_1 l_2 \ldots}^{q_1 q_2} \quad . z_m^{q_m}) \times$$

$$\times e^{-[(\lambda_1^{(l_1)}+\ldots+\lambda_1^{(l_k)}) z_1 + \ldots + (\lambda_m^{(l_1)}+\ldots+\lambda_m^{(l_k)}) z_m]} \tag{16}$$

с $q_i \leqslant p_i + r$ $(i=1, 2, \ldots, m)$; r — *ранг корня* $(\beta_1, \beta_2, \quad \beta_m)$ *характеристического уравнения* (15), *а* $e^{\beta_1 z_1+\ldots+\beta_m z_m} z_1^{p_1} \ldots z_m^{p_m}$ — *частное решение однородного уравнения с постоянными коэффициентами.*

В частности, если для всех $i_1, i_2, \ldots, i_m$ *с* $i_1+i_2+\ldots+i_m=n$, $F_{i_1 i_2 \ldots i_m}^{n} \equiv \mathrm{const}$, *то ряд* (16) *сходится абсолютно в области* $G_0(x_1, x_2, \quad x_m) \subset \subset G(x_1, x_2, \quad x_m)$ *с границей, отстоящей от границы* $G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *на* ρ.

Теорему будем доказывать в случае двух независимых комплексных переменных.

Доказательство. Будем решать уравнение

$$\sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2=l} A_0^{(i_1 i_2)} \frac{\partial^{i_1+i_2} u}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2}} = \nu \sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2=l} [F_{i_1 i_2}^{l}(z_1, z_2) - A_0^{(i_1 i_2)}] \frac{\partial^{i_1+i_2} u}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2}}$$

с помощью ряда

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z_1, z_2) \nu^k.$$

Для определения неизвестных функций $\varphi_k(z_1, z_2)$ приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2=l} A_0^{(i_1 i_2)} \dfrac{\partial^{i_1+i_2}\varphi_0}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}} = 0, \\ \sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2=l} A_0^{(i_1 i_2)} \dfrac{\partial^{i_1+i_2}\varphi_k}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}} = \\ = \sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2=l} [F^l_{i_1 i_2}(z_1, z_2) - A_0^{(i_1 i_2)}] \dfrac{\partial^{i_1+i_2}\varphi_{k-1}}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}}, \qquad k=1, 2, \end{cases} \tag{17}$$

Пусть (β_1, β_2) — решение характеристического уравнения

$$Q(\eta_1, \eta_2) = \sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2=l} A_0^{(i_1 i_2)} \eta_1^{i_1} \eta_2^{i_2} = 0. \tag{18}$$

Как нами было сказано, первое уравнение системы (17) имеет конечное число частных решений вида $z_1^m \; z_2^n \; e^{\beta_1 z_1+\beta_2 z_2}$. В качестве $\varphi_0(z_1, z_2)$ выберем одно из них, скажем

$$\varphi_0(z_1, z_2) = z_1^p z_2^q e^{\beta_1 z_1+\beta_2 z_2}. \tag{19}$$

В соответствии с (14) перепишем второе из уравнений системы (17) следующим образом:

$$\sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2=l} A_0^{(i_1 i_2)} \frac{\partial^{i_1+i_2}\varphi_1}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}} = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2=l} A_t^{(i_1 i_2)} e^{-(\lambda_1^{(t)} z_1+\lambda_2^{(t)} z)} \frac{\partial^{i_1+i_2}\varphi_0}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}}. \tag{20}$$

Продифференцируем $\varphi_0(z_1, z_2)$ и подставим в уравнение (20). Собрав члены с одинаковыми степенями $z_1^m z_2^n$, имеем:

$$\sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2=l} A_0^{(i_1 i_2)} \frac{\partial^{i_1+i_2}\varphi_0}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}} = e^{\beta_1 z_1+\beta_2 z_2} \sum_{t=1}^{\infty} (B_t^{00} + B_t^{10} z_1 + B_t^{11} z_1 z_2 + $$
$$+ \ldots + B_t^{pq} z_1^p z_2^q) \, e^{-(\lambda_1^{(t)} z_1+\lambda_2^{(t)} z_2)}, \tag{21}$$

где B_t^{kl} — постоянные, а ряды $\sum_{t=1}^{\infty} B_t^{kl} z_1^k z_2^l e^{-(\lambda_1^{(t)} z_1+\lambda_2^{(t)} z_2)}$ абсолютно сходятся в области $G(x_1, x_2)$.

Здесь возможны два случая:

а) ни одно из чисел $(\beta_1-\lambda_1^{(t)}, \beta_2-\lambda_2^{(t)})$ не является решением уравнения (18);

б) некоторые числа $(\beta_1-\lambda_1^{(t_j)}, \beta_2-\lambda_2^{(t_j)})$ $(j=1, 2, \ldots, \gamma)$ являются корнями уравнения (18) с кратностями (r_{j_i}, s_{j_i}) $\begin{pmatrix} i=1, 2, \ldots, \gamma_j; \\ j=1, 2, \ldots, \gamma \end{pmatrix}$.

В первом случае существует решение уравнения (21) вида:

$$\varphi_1(z_1, z_2) = e^{\beta_1 z_1+\beta_2 z_2} \sum_{t=1}^{\infty} (A_t^{00} + A_t^{10} z_1 + A_t^{11} z_1 z_2 + $$
$$+ \ldots + A_t^{pq} z_1^p z_2^q) \, e^{-(\lambda_1^{(t)} z_1+\lambda_2^{(t)} z_2)}.$$

Если же имеет место второй случай, то, согласно лемме, решением уравнения (21) будет ряд типа:

$$\varphi_1(z_1, z_2)=e^{\beta_1 z_1+\beta_2 z_2}\Bigg[\sum_{j=1}^{\gamma}\sum_{i=1}^{\gamma_j}(A^{00}_{t_{j_i}}+A^{10}_{t_{j_i}}z_1+A^{11}_{t_{j_i}}z_1 z_2+\ldots+$$

$$+A^{pq}_{t_{j_i}}z_1^p z_2^q)\,z_1^{r_{j_i}}z_2^{s_{j_i}}e^{-\left(\lambda_1^{(t_j)}z_1+\lambda_2^{(t_j)}z_2\right)}+\sum_{\substack{t=1\\ t\neq t_{j_i};\ i=1,2,\ldots,\gamma_j;\ j=1,2,\ldots,\gamma}}^{\infty}$$

$$\times(A^{00}_t+A^{10}_t z_1+A^{11}_t z_1 z_2+\ldots+A^{pq}_t z_1^p z_2^q)\,e^{-\left(\lambda_1^{(t)}z_1+\lambda_2^{(t)}z_2\right)}\Bigg].$$

Подставляя $\varphi_1(z_1, z_2)$ в третье уравнение системы (17) в правой его стороне получим:

$$\sum_{l_1, l_2=1}^{\infty}\tilde{B}_{l_1 l_2}(z_1, z_2)\,e^{\left(\beta_1-\lambda_1^{(l_1)}-\lambda_1^{(l_2)}\right)z_1+\left(\beta_2-\lambda_2^{(l_1)}-\lambda_2^{(l_2)}\right)z_2},$$

где $\tilde{B}_{l_1 l_2}(z_1, z_2)$ – многочлены от $z_1 z_2$. Существует решение $\varphi_2(z_1, z_2)$ такого типа, как упомянутая правая часть уравнения. Продолжая этот процесс, нетрудно убедиться в том, что для каждого m существует решение вида

$$\varphi_m(z_1, z_2)=e^{\beta_1 z_1+\beta_2 z_2}\sum_{l_1, l_2, \ldots, l_m=1}^{\infty}(A^{00}_{l_1 l_2\ldots l_m}+A^{10}_{l_1 l_2\ldots l_m}z_1+A^{11}_{l_1 l_2\ldots l_m}z_1 z_2+$$

$$+\ldots+A^{p_1 q_1}_{l_1 l_2\ldots l_m}z_1^{p_1}z_2^{q_1})\,e^{\left(-\lambda_1^{(l_1)}-\ldots-\lambda_1^{(l_m)}\right)z_1+\left(-\lambda_2^{(l_1)}-\ldots-\lambda_2^{(l_m)}\right)z_2}, \tag{22}$$

с $p_1\leqslant p$, $q_1\leqslant q$ в случае а и $p_1\leqslant p+r$, $q_1\leqslant q+r$ в случае б; r – ранг корня (β_1, β_2) характеристического уравнения (18).

(Ряды (22) пока что формальные: вопрос об их сходимости мы рассмотрим ниже.)

Покажем теперь, что найдется такое положительное число n_0, что в разложениях (22) для всех функций φ_{n_0+j} $(j=1, 2, \ldots)$ степени полиномиальных коэффициентов будут равны между собой. Обозначим эту степень $p_1+q_1=\sigma$. В самом деле, при $m\to\infty$ $\lambda_1^{(l_1)}+\ldots+\lambda_1^{(l_m)}+\lambda_2^{(l_1)}+\ldots+\lambda_2^{(l_m)}\to\infty$. Поэтому, как мы показали в [1], при достаточно больших m $(m>n_0)$ ни одна из пар чисел $\left(\beta_1-(\lambda_1^{(l_1)}+\ldots+\lambda_1^{(l_m)}),\ \beta_2-(\lambda_2^{(l_1)}+\ldots+\lambda_2^{(l_m)}\right)$ не будет решением характеристического уравнения (18). Но тогда, как было выше показано, степени полиномиальных коэффициентов в соответствующих рядах, образованных для решений $\varphi_m(z_1, z_2)$ уравнений системы (17) с $m>n_0$

$$\sum_{l=0}^{n}\sum_{i_1+i_2=l}A_0^{(i_1 i_2)}\frac{\partial^{i_1+i_2}\varphi_m}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}}=\sum_{l_1, l_2, \ldots, l_m=1}^{\infty}B_{l_1 l_2\ldots l_m}(z_1, z_2)\times$$

$$\times e^{\sum_{j=1}^{2}\left[\beta_j-\left(\lambda_j^{(l_1)}+\ldots+\lambda_j^{(l_m)}\right)\right]z_j}$$

$(B_{l_1 l_2\ldots l_m}(z_1, z_2)$ – многочлены от $z_1 z_2)$, такие же, как и в их правой части. Значит, наше предположение верно.

Убедимся теперь, что $p+q\leqslant\sigma\leqslant p+q+2r$.

Пусть B^* — класс сравнимости множества корней B характеристического уравнения для элемента (β_1, β_2). $\Bigl($В [1] было показано, что решений вида $\left(\beta_1-\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_1^{(j)}, \beta_2-\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_2^{(j)}\right)$ характеристическое уравнение (18) имеет конечное число.$\Bigr)$ Пусть $(\beta_1^*, \beta_2^*)\in B^*$. По определению класса сравнимости, найдутся такие числа $\lambda_j^{(i_1)}, \lambda_j^{(i_2)}, \ldots, \lambda_j^{(i_{n^*})}$ $(j=1, 2)$, что

$$\beta_j=\beta_j^*+\lambda_j^{(i_1)}+\ldots+\lambda_j^{(i_{n^*})} \qquad (j=1, 2).$$

В правой части уравнения системы (17) для определения функции $\varphi_{n^*}(z_1, z_2)$ имеем сумму

$$\sum_{l_1, l_2, \ldots, l_{n^*}=1}^{\infty}\left(B_{l_1 l_2\ldots l_{n^*}}^{00}+\ldots+B_{l_1 l_2\ldots l_{n^*}}^{p^*q^*}z_1^{p^*}z_2^{q^*}\right)e^{\sum\limits_{j=1}^{2}\left[\beta_j-\left(\lambda_j^{(l_1)}+\ldots+\lambda_j^{(l_{n^*})}\right)\right]z_j}$$

в которой имеется также член

$$\left(B_{i_1 i_2\ldots i_{n^*}}^{00}+\ldots+B_{i_1 i_2\ldots i_{n^*}}^{p^*q^*}z_1^{p^*}z_2^{q^*}\right)e^{\left(\beta_1-\lambda_1^{(i_1)}-\ldots-\lambda_1^{(i_{n^*})}\right)z_1+\left(\beta_2-\lambda_2^{(i_1)}-\ldots-\lambda_2^{(i_{n^*})}\right)z_2}.$$

Так как пара чисел $\left(\beta_1-\sum\limits_{k=1}^{n^*}\lambda_1^{(i_k)}, \beta_2-\sum\limits_{k=1}^{n^*}\lambda_2^{(i_k)}\right)$ является корнем уравнения (18) с кратностями (p_s^*, q_s^*) $(s=1, 2, \quad t)$, то в ряду (22) для функции $\varphi_{n^*}(z_1, z_2)$ будем иметь слагаемое

$$\left(A_{i_1 i_2\ldots i_{n^*}}^{00}+\ldots+A_{i_1 i_2\ldots i_{n^*}}^{p^*q^*}z_1^{p^*+p_{s'}^*}z_2^{q^*+q_{s'}^*}\right)\times$$
$$\times e^{\left(\beta_1-\lambda_1^{(i_1)}-\ldots-\lambda_1^{(i_{n^*})}\right)z_1+\left(\beta_2-\lambda_2^{(i_1)}-\ldots-\lambda_2^{(i_{n^*})}\right)z_2},$$

то есть, степень полинома-коэффициента возросла на

$$p_{s'}^*+q_{s'}^* \; \left(p_{s'}^*+q_{s'}^*=\max_s\{p_s^*+q_s^*\}\right).$$

Так как ранг корня (β_1, β_2) равен r, то степень полиномиальных коэффициентов решений возрастает не более чем на $2r$ единиц в сравнении со степенью коэффициента у функции $\varphi_0(z_1, z_2)$. Это мы и утверждали.

Докажем сейчас равномерную и абсолютную сходимость ряда (22) в области $G(x_1, x_2)$. Для этого рассмотрим сначала решение уравнения

$$\sum_{l=0}^{n}\sum_{i_1+i_2=l}A_0^{(i_1 i_2)}\frac{\partial^{i_1+i_2}\varphi_1}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}}=$$
$$=e^{\beta_1 z_1+\beta_2 z_2}\sum_{t=1}^{\infty}\left(B_t^{00}+B_t^{10}z_1+\cdots+B_t^{pq}z_1^p z_2^q\right)e^{-\left(\lambda_1^{(t)}z_1+\lambda_2^{(t)}z_2\right)}, \tag{23}$$

где ряды $\sum\limits_{t=1}^{\infty}B_t^{kl}z_1^k z_2^l e^{-\left(\lambda_1^{(t)}z_1+\lambda_2^{(t)}z_2\right)}$ сходятся абсолютно в области $G(x_1, x_2)$.

Решение этого уравнения дается формально рядом:

$$\varphi_1(z_1,\ z_2)=e^{\beta_1 z_1+\beta_2 z_2}\left\{\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{s_j}(A_{t_{j_i}}^{00}+A_{t_{j_i}}^{10}z_1+\ldots+A_{t_{j_i}}^{pq}z_1^p z_2^q)\,z_1^{r_{j_i}}z_2^{s_{j_i}}\times\right.$$

$$\times e^{-(\lambda_1^{(t_j)}z_1+\lambda_2^{(t_j)}z_2)}+$$

$$\left.+\sum_{\substack{t=1\\ t\neq t_{j_i};\ i=1,\,2,\,\ldots,\,s_j;\ j=1,\,2,}}^{\infty}(A_t^{00}+A_t^{10}z_1+\ldots+A_t^{pq}z_1^p z_2^q)\,e^{-(\lambda_1^{(t)}z_1+\lambda_2^{(t)}z_2)}\right\}. \quad (24)$$

Покажем абсолютную сходимость этого ряда.

Коэффициенты последнего ряда (24) фактически находим решая отдельно дифференциальные уравнения:

$$\sum_{l=0}^{n}\sum_{i_1+i_2=l}A_0^{(i_1 i_2)}\frac{\partial^{i_1+i_2}w}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}}=$$

$$=(B_t^{00}+B_t^{10}z_1+\ldots+B_t^{pq}z_1^p z_2^q)\,e^{(\beta_1-\lambda_1^{(t)})z_1+(\beta_2-\lambda_2^{(t)})z_2}\quad (t=1,\ 2,\ \ldots). \quad (25)$$

Рассмотрим два случая:

1) $Q(\beta_1-\lambda_1^{(t)},\ \beta_2-\lambda_2^{(t)})\neq 0$.

В этом случае коэффициенты частного решения

$$w=e^{(\beta_1-\lambda_1^{(t)})z_1+(\beta_2-\lambda_2^{(t)})z_2}(A_t^{00}+A_t^{10}z_1+\quad +A_t^{pq}z_1^p z_2^q) \quad (26)$$

определяются последовательно из системы уравнений:

$$\left\{\begin{aligned}
&A_t^{pq}Q(\beta_j-\lambda_j^{(t)})=B_t^{pq},\\
&A_t^{p-1q}Q(\beta_j-\lambda_j^{(t)})+A_t^{pq}\binom{p}{1}Q'_{\eta_1}(\beta_j-\lambda_j^{(t)})=B_t^{p-1q},\\
&A_t^{p-1\,q-1}Q(\beta_j-\lambda_j^{(t)})+A_t^{p-1q}\binom{q}{1}Q'_{\eta_2}\,\beta_j-\lambda_j^{(t)})+\\
&+A_t^{pq-1}\binom{p}{1}Q'_{\eta_1}(\beta_j-\lambda_j^{(t)})+A_t^{pq}\binom{}{1}\binom{q}{1}Q''_{\eta_1\eta_2}(\beta_j-\lambda_j^{(t)})=B_t^{p-1\,q-1},\\
&\\
&A_t^{p-k\,q-l}Q(\beta_j-\lambda_j^{(t)})+A_t^{p-k+1\,q-l}\binom{p-k+1}{1}Q'_{\eta_1}(\beta_j-\lambda_j^{(t)})+\\
&+A_t^{p-k\,q-l+1}\binom{q-l+1}{1}Q'_{\eta_2}(\beta_j-\lambda_j^{(t)})+\\
&+A_t^{p-k+1\,q-l+1}\binom{p-k+1}{1}\binom{q-l+k}{1}Q''_{\eta_1\eta_2}(\beta_j-\lambda_j^{(t)})+\\
&+\cdots+A_t^{pq}\binom{p}{k}\binom{q}{l}Q^{(k+l)}_{\eta_1^k\eta_2^l}(\beta_j-\lambda_j^{(t)})=B_t^{p-k\,q-l},\\
&\\
&A_t^{00}Q(\beta_j-\lambda_j^{(t)})+A_t^{10}Q'_{\eta_1}(\beta_j-\lambda_j^{(t)})+A_t^{01}Q'_{\eta_2}(\beta_j-\lambda_j^{(t)})+\ldots+\\
&+A_t^{pq}Q^{(p+q)}_{\eta_1^p\eta_2^q}(\beta_j-\lambda_j^{(t)})=B_t^{00}.
\end{aligned}\right. \quad (27)$$

В случае одного комплексного переменного такая система дана в [2], стр. 217. Здесь исследуется случай двух независмых комплексных переменных, и поэтому несколько изменяется вид системы по сравнению со случаем одного переменного. Система уравнений (27) легко получается непосредственной подстановкой решения (26) в уравнение (25).

Из только что полученной системы (27) найдем оценки коэффициентов A_t^{kl}. Пусть

$$B_m = \max(|B_t^{00}|,\ |B_t^{10}|,\ \ldots,\ |B_t^{pq}|). \tag{28}$$

В [1] было получено следующее неравенство:

$$|Q(\beta_j - \lambda_j^{(t)})| > C(\lambda_1^{(t)} + \lambda_2^{(t)})^n = C\mu_t^n, \tag{29}$$

где $C>0$ — постоянное число, независящее от t.

Кроме того,

$$\begin{aligned} |Q^{(p_1+q_1)}(\beta_j - \lambda_j^{(t)})| = \Big| \sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2=l} A_0^{(i_1 i_2)} i_1(i_1-1)\ldots \\ \times (i_1-p_1+1)\, i_2(i_2-1)\ldots(i_2-q_1+1)(\beta_1-\lambda_1^{(t)})^{i_1-p_1}(\beta_2-\lambda_2^{(t)})^{i_2-q_1}\Big| < \\ < C_0(\lambda_1^{(t)}+\lambda_2^{(t)})^{n-p_1-q_1}, \qquad (1 \leqslant p_1 \leqslant p;\ 1 \leqslant q_1 \leqslant q). \end{aligned} \tag{30}$$

Из (27) в согласии с (28), (29) и (30) последовательно выводим:

$$|A_t^{pq}| < \frac{B_m}{C\mu_t^n},$$

$$|A_t^{p-1q}| < \left(B_m + \frac{B_m}{C\mu_t^n}\, pC_0\mu_t^{n-1}\right)\frac{1}{C\mu_t^n} = \frac{B_m}{C\mu_t^n}\left(1 + \frac{pC_0}{C\mu_t}\right) = \frac{C_{10}B_m}{C\mu_t^n},$$

$$|A_t^{pq-1}| < \frac{C_{01}B_m}{C\mu_t^n},$$

$$\begin{aligned} |A_t^{p-1\,q-1}| < \frac{1}{C\mu_t^n}\left(B_m + \frac{B_m}{C\mu_t^n}\, pqC_0\mu_t^{n-2} + \frac{C_{10}B_m}{C\mu_t^n}\, C_0 q\mu_t^{n-1} + \right. \\ \left. + \frac{C_{01}B_m}{C\mu_t^n}\, pC_0\mu_t^{n-1}\right) = \frac{B_m}{C\mu_t^n}\left(1 + \frac{pqC_0}{C\mu_t^2} + \frac{C_{10}qC_0}{C\mu_t} + \frac{C_{01}pC_0}{C\mu_t}\right) = \frac{C_{11}B_m}{C\mu_t^n}. \end{aligned}$$

$$|A_t^{00}| < \frac{C_{pq}B_m}{C\mu_t^n}.$$

Выбрав достаточно большую постоянную $D>0$, которая, в силу $\mu_t \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$, независит от t, p, q, будем иметь:

$$|A_t^{kl}| < \frac{DB_m}{\mu_t^n} \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ p;\ l=0,\ 1,\ \ldots,\ q;\ t=1,\ 2,\ \ldots). \tag{31}$$

2) $(\beta_1 - \lambda_1^{(t_j)},\ \beta_2 - \lambda_2^{(t_j)})$ — корень характеристического уравнения (18) с кратностями $(r_{j_i},\ s_{j_i})$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ l_j)$.

Для коэффициентов частного решения уравнения (25)

$$w = e^{(\beta_1-\lambda_1^{(t_j)})z_1 + (\beta_2-\lambda_2^{(t_j)})z_2}\,(A_{t_{j_i}}^{00} + A_{t_{j_i}}^{10} z_1 + \ldots + A_{t_{j_i}}^{pq} z_1^p z_2^q)\, z_1^{r_{j_i}} z_2^{s_{j_i}}$$

в этом случае находим

$$A_{t_{j_i}}^{p-k_1\, q-k_2}\binom{p+r_{j_i}-k_1}{r_{j_i}}\binom{q+s_{j_i}-k_2}{s_{j_i}}D_{r_{j_i}s_{j_i}}+$$
$$+A_{t_{j_i}}^{p-k_1+1\, q-k_2}\binom{p+r_{j_i}-k_1+1}{r_{j_i}+1}\binom{q+s_{j_i}-k_2}{s_{j_i}}D_{r_{j_i}+1\, s_{j_i}}+$$
$$+A_{t_{j_i}}^{p-k_1\, q-k_2+1}\binom{p+r_{j_i}-k_1}{r_{j_i}}\binom{q+s_{j_i}-k_2+1}{s_{j_i}+1}D_{r_{j_i}s_{j_i}+1}+\ldots+$$
$$+A_{t_{j_i}}^{pq}\binom{p+r_{j_i}}{r_{j_i}+k_1}\binom{q+s_{j_i}}{s_{j_i}+k_2}D_{r_{j_i}+k_1\, s_{j_i}+k_2}=B_t^{p-k_1\, q-k_2},$$
$$(k_1=0,\ 1,\ \ldots,\ p;\ k_2=0,\ 1,\ \ldots,\ q).$$

Эти соотнсшения получаются из системы (9) при соответственном изменении обозначений.

Аналогично предыдущему находим:

$$|A_{t_{j_i}}^{kl}|<\frac{DB_m}{\mu_t^{n-r_{j_i}-s_{j_i}}}. \tag{32}$$

(Заметим, что $r_{j_i}+s_{j_i}\leqslant n-1$, где n — порядок уравнения (13).)

Докажем теперь абсолютную сходимость ряда (24).

В правой стороне (23) стоящий ряд сходится абсолютно в области $G(x_1,x_2)$. начит, сходится и ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty}B_m e^{(\beta_1-\lambda_1^{(t)})x_1+(\beta_2-\lambda_2^{(t)})x_2}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{t=1}^{\infty}(|B_t^{00}|+|B_t^{10}|+\ldots+|B_t^{pq}|)\,e^{(\beta_1-\lambda_1^{(t)})z_1+(\beta_2-\lambda_2^{(t)})z_2}. \tag{33}$$

Согласно (31) сумма

$$\sum_{\substack{t=1\\ t\neq t_{j_i},\ i=1,2,\ldots,l_j}}^{\infty}(A_t^{00}+A_t^{10}z_1+\ldots+A_t^{pq}z_1^p z_2^q)\,e^{(\beta_1-\lambda_1^{(t)})z_1+(\beta_2-\lambda_2^{(t)})z_2}$$

при $\operatorname{Re} z_j=x_j\geqslant x_j^0$, $|z_j|=r_j>1$ $(j=1,\ 2)$ мажорируется числовым рядом

$$D\sum_{m=1}^{\infty}\frac{B_m}{\mu_m^n}e^{(\beta_1-\lambda_1^m)x_1^0+(\beta_2-\lambda_2^m)x_2^0}(1+r_1+r_2+r_1r_2+\ldots+r_1^p r_2^q)\leqslant$$
$$\leqslant D\,\frac{r_1^{p+1}-1}{r_1-1}\,\frac{r_2^{q+1}-1}{r_2-1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{B_m}{\mu_m^n}e^{(\beta_1-\lambda_1^m)x_1^0+(\beta_2-\lambda_2^m)x_2^0}, \tag{34}$$

который по (33) и в силу $\mu_m\underset{m\to\infty}{\to}\infty$ сходится.

Вторая сумма в (28) конечная. Таким образом мы установили, что ряд (28) сходится абсолютно в области $G(x_1,\ x_2)$.

Допустим сейчас, что абсолютная сходимость ряда (26) в области $G(x_1, x_2)$ уже доказана. Подставим функцию $\varphi_m(z_1, z_2)$ в правую часть уравнения:

$$\sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2=l} A_0^{(i_1 i_2)} \frac{\partial^{i_1+i_2}\varphi_{m+1}}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}} =$$

$$= \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2=l} A_t^{(i_1 i_2)} e^{-(\lambda_1^{(t)} z_1+\lambda_2^{(t)} z_2)} \frac{\partial^{i_1+i_2}\varphi_m}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}}. \tag{35}$$

Находим:

$$\frac{\partial^{i_1+i_2}\varphi_m}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}} = \sum_{l_1, l_2, \ldots, l_m=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{p_1} \sum_{s=0}^{q_1} A_{l_1 l_2 \ldots l_m}^{*(rs)} z_1^r z_2^s \times$$

$$\times e^{[\beta_1-(\lambda_1^{(l_1)}+\ldots+\lambda_1^{(l_m)})] z_1+[\beta_2-(\lambda_2^{(l_1)}+\ldots+\lambda_2^{(l_m)})] z_2}, \tag{36}$$

где

$$A_{l_1 l_2 \ldots l_m}^{*(rs)} = \sum_{\alpha=0}^{i_1} \sum_{\beta=0}^{i_2} C_{i_1}^{\alpha} C_{i_2}^{\beta} C_{\alpha\beta}^{rs} (\beta_1 - \lambda_1^{(l_1)} - \quad - \lambda_1^{(l_m)})^{\alpha} \times$$

$$\times (\beta_2 - \lambda_2^{(l_1)} - \ldots - \lambda_2^{(l_m)})^{\beta} A_{l_1 l_2 \ldots l_m}^{(r-\alpha\, s-\beta)}, \tag{37}$$

а $C_{\alpha\beta}^{rs}$ — некоторые постоянные.

Подставляя (36) в (35), получаем:

$$\sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2=l} A_0^{(i_1 i_2)} \frac{\partial^{i_1+i_2}\varphi_{m+1}}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}} =$$

$$= \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2=l} A_t^{(i_1 i_2)} \sum_{l_1, l_2, \ldots, l_m=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{p_1} \sum_{s=0}^{q_1} A_{l_1 l_2 \ldots l_m}^{*(rs)} z_1^r z_2^s \times$$

$$\times e^{[\beta_1-(\lambda_1^{(l_1)}+\ldots+\lambda_1^{(l_m)}+\lambda_1^{(t)})] z_1+[\beta_2-(\lambda_2^{(l_1)}+\ldots+\lambda_2^{(l_m)}+\lambda_2^{(t)})] z_2}$$

Будем считать $m > n_0$, т. е. что ни одна пара показателей

$$\left(\beta_1 - (\lambda_1^{(l_1)} + \quad + \lambda_1^{(l_{m+1})}),\ \beta_2 - (\lambda_2^{(l_1)} + \ldots + \lambda_2^{(l_{m+1})})\right)$$

не обращает полином $Q(\eta_1, \eta_2)$ в нуль. Последнее уравнение, как мы показали выше, имеет решение

$$\varphi_{m+1}(z_1, z_2) = \sum_{l_1, l_2, \ldots, l_{m+1}=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{p_1} \sum_{s=0}^{q_1} A_{l_1 l_2 \ldots l_{m+1}}^{(r, s)} z_1^r z_2^s \times$$

$$\times e^{\sum_{j=1}^{2} [\beta_j-(\lambda_j^{(l_1)}+\ldots+\lambda_j^{(l_{m+1})})] z_j} \tag{38}$$

коэффициенты которого выражаются через

$$A_{l_1 l_2 \ldots l_{m+1}}^{**(rs)} = \sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2=l} A_{l_{m+1}}^{(i_1 i_2)} A_{l_1 l_2 \ldots l_m}^{*(rs)} \tag{39}$$

по тем же формулам (31), в которые вместо A_t^{kl} следует поставить $A_{l_1 l_2 \ldots}^{(kl)}$ а вместо $B_t^{kl} - A_{l_1 l_2 \ldots l_{m+1}}^{** (kl)}$

Оценим сначала коэффициенты $A_{l_{m+1}}^{(i_1 i_2)}$ рядов Дирихле (14). Воспользуемся для этого оценкой коэффициентов абсолютно сходящегося ряда Дирихле

$$f(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-(\lambda_1^{(k)} z_1 + \lambda_2^{(k)} z_2)},$$

которой мы пользовались и в [1], а именно:

$$|a_k| \leqslant S(x_j, f) e^{-(\lambda_1^{(k)} x_1 + \lambda_2^{(k)} x_2)},$$

где

$$S(x_j, f) = \sup_{\substack{-\infty < y_j < +\infty \\ (j=1, 2)}} |f(z_1, z_2)|.$$

Так как ряд (14), согласно условиям теоремы, сходится абсолютно в области $G(x_1, x_2)$, то его коэффициенты можем оценить при помощи указанной оценки, т. е.

$$|A_{l_{m+1}}^{(i_1 i_2)}| < S(x_j) e^{\lambda_1^{(l_{m+1})} x_1 + \lambda_2^{(l_{m+1})} \lambda_2^{(l_{m+1})} x_2} \tag{40}$$

Пусть

$$\max_{r, s} |A_{i_1 i_2 \ldots i_{m+1}}^{** (rs)}| = B_{i_1 i_2 \ldots i_{m+1}}^{*}, \tag{41}$$

тогда из (31) следует, что

$$|A_{l_1 l_2 \ldots l_{m+1}}^{(rs)}| < \frac{D B_{l_1 l_2 \ldots l_{m+1}}^{*}}{\left[\sum\limits_{i=1}^{m+1} \mu_{l_i}\right]^n}. \tag{42}$$

Из (39) в согласии с (40) и (41) выводим:

$$B_{l_1 l_2 \ldots l_{m+1}}^{*} \leqslant n S(x_j) e^{\lambda_1^{(l_{m+1})} x_1 + \lambda_2^{(l_{m+1})} x_2} |A_{l_1 l_2 \ldots l_m}^{* (rs)}|. \tag{43}$$

Обозначим

$$\max_{r, s} |A_{l_1 l_2 \ldots}^{(rs)}| = B_{l_1 l_2} \tag{44}$$

Ясно, что всегда можно найти постоянную $C' > 0$ такую, чтобы $C_{\alpha\beta}^{rs} < C'$ для всех α, β, r, s. Тогда (37) дает нам:

$$|A_{l_1 l_2 \ldots l_{m+1}}^{* (rs)}| \leqslant C' C_0 \left[\sum_{i=1}^{m+1} \mu_{l_i}\right]^n B_{l_1 l_2 \ldots l_m} < D' \left[\sum_{i=1}^{m+1} \mu_{l_i}\right]^n B_{l_1 l_2 \ldots l_m}. \tag{45}$$

Из (42), применив (43) и (45), находим:

$$|A_{l_1 l_2 \ldots l_{m+1}}| \leqslant \frac{DnS(x_j)}{\left[\sum\limits_{i=1}^{m+1} \mu_{l_i}\right]^n} e^{\lambda_1^{(l_{m+1})} x_1 + \lambda_2^{(l_{m+1})} x_2} |A^{*(rs)}_{l_1 l_2 \ldots l_m}| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{DnS(x_j)}{\left[\sum\limits_{i=1}^{m+1} \mu_{l_i}\right]^n} e^{\lambda_1^{(l_{m+1})} x_1 + \lambda_2^{(l_{m+1})} x_2} D' \left[\sum_{i=1}^{m+1} \mu_{l_i}\right]^n B_{l_1 l_2 \ldots l_m},$$

то есть

$$B_{l_1 l_2 \ldots l_{m+1}} \leqslant KS(x_j) e^{\lambda_1^{(l_{m+1})} x_1 + \lambda_2^{(l_{m+1})} x_2} B_{l_1 l_2 \ldots l_m},$$

где $K \geqslant nDD'$.

Мы здесь получили неравенство, тождественное полученному в [1]. Дальше рассуждения ничем не отличаются от аналогичных, приведенных в [1] и мы их здесь приводить не будем.

В заключение пользуюсь случаем выразить глубокую признательность профессору Ш. И. Стрелицу за внимание к работе.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
13.VI.1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. К. Ненишките, Об одном классе решений дифференциальных уравнений в частных производных, Лит. матем. сб., **X**, № 1 (1970), 121–134.
2. В. В. Голубев, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, М.–Л., Гостехиздат, 1950.

APIE VIENĄ DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ DALINĖMIS IŠVESTINĖMIS SPRENDINIŲ KLASĘ. II

E. NENIŠKYTĖ

(*Reziumė*)

Darbe nagrinėjama diferencialinė lygtis su dalinėmis išvestinėmis

$$\sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=l} F^l_{i_1 i_2 \ldots i_m}(z_1, z_2, \quad z_m) \frac{\partial^{i_1+i_2+\ldots+i_m} u}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2} \ldots \partial z_m^{i_m}} = 0,$$

$$z_j = x_j + iy_j \qquad (j = 1, 2, \quad m),$$

kurios koeficientai $F^l_{i_1 i_2 \ldots i_m}(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ yra absoliučiai konverguojančios srityje $G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ Dirichle eilutės:

$$F^l_{i_1 i_2 \ldots i_m}(z_1, z_2, \ldots, z_m) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(i_1 i_2 \quad i_m)} e^{-(\lambda_1^{(k)} z_1 + \lambda_2^{(k)} z_2 + \ldots + \lambda_m^{(k)} z_m)}$$

Įrodyta teorema, kuri apibendrina rezultatus, gautus [1].

ÜBER EINE KLASSE PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN. II

E. NENIŠKYTĖ

(Zusammenfassung)

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir die partielle Differentialgleichung

$$\sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=l} F^{l}_{i_1 i_2 \ldots i_m}(z_1, z_2, \ldots, z_m) \frac{\partial^{i_1+i_2+\ldots+i_m} u}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2} \ldots \partial z_m^{i_m}} = 0,$$

$$z_j = x_j + i y_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

deren Koeffizienten $F^{l}_{i_1 i_2 \ldots i_m}(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ im dem Gebiete $G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ absolut konvergente Dirichlet'sche Reihen

$$F^{l}_{i_1 i_2 \ldots i_m}(z_1, \ldots, z_m) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(i_1 i_2 \ldots i_m)} e^{-(\lambda_1^{(k)} z_1 + \lambda_2^{(k)} z_2 + \ldots + \lambda_m^{(k)} z_m)}$$

sind.

Der bewiesene Satz verallgemeinert die Ergebnisse, die wir in [1] erhalten haben.