X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1970

УДК – 51:330.115

ГРУППОВОЙ ВЫБОР И РАВНОВЕСИЕ

А. И. МОРКЕЛЮНАС

Групповой выбор „наилучшей" альтернативы методом простого большинства рассматривается в игровой постановке. Введено определение абсолютного равновесия, которое включает в себя понятие равновесности по Нэшу и понятие эффективной точки. Показано, что существование абсолютного равновесия тесно связано с существованием такой альтернативы, которая не доминируется по большинству никакой другой альтернативой.

1. Будем пользоваться следующими обозначениями и определениями.
N – множество игроков,
S, M, W, – подмножества N.

Число элементов любого множества K обозначим через $|K|$. Положим $|N|=n$.

Пусть $S\subset N$ и $|S|=k$. Пусть X_j $(j\in N)$ множество стратегий j-го игрока. Тогда:

$$\bar{x}=(x_1, \ldots, x_n), \quad x_j\in X_j,$$

$$y_S=(y_{j_1}, \ldots, y_{j_k}), \; y_{j_k}\in X_{j_k}, \; j_k\in S.$$

Через $x\| y_S$ обозначим вектор, получаемый заменой координат x соответствующими координатами y_S.

Пусть $f_j(\bar{x})$ функция выигрыша j-го игрока. Обозначим

$$F_S(x)=\left(f_{j_1}(\bar{x}), \ldots, f_{j_k}(\bar{x})\right), \; j_l\in S, \; l=1, \ldots, k=|S|.$$

Знак „$\geqslant$" означает покомпонентное неравенство, причем хотя бы для одной координаты выполняется строгое неравенство.

Определение 1. $\bar{x}$ является k-равновесием тогда и только тогда, если для любого $S\subset N$, где $|S|=k$, не существует y_s чтобы

$$F_S(\bar{x}\| y_S)\geqslant F_S(\bar{x}). \tag{1}$$

Из определения следует, что если $|S|=1$, то 1-равновесие совпадает с понятием ситуации равновесия Нэша. Если $|S|=n$, то n-равновесие – эффективная точка.

Определение 2. Будем говорить, что переход от ситуации $\bar{x}$ к $x\| y_s$ возможен (или множество игроков S может перейти к y), если существует $S\subset N$ такое, что:

$$F_S(x\| y_S)\geqslant F_S(x).$$

Пусть $\Gamma=(N, \{X_j\}, \{f_j\})$ следующая игра:

$X_1= \quad =X_n=\{x^1, \quad x^m\}=X$, т. е. множество стратегий одно и то же для каждого игрока. Стратегии $x^1, \ldots, x^m$ можно интерпретировать как альтернативы в принятии группового решения или как кандидатов выборной кампании. Пусть полезность групповой альтернативы x^i для j-го игрока есть $u_j(x^i)$, $j=1, \quad n$; $i=1, \quad m$. Прежде чем определить f_j введем следующее.

Определение 3. $\sum\limits_{i\in L} x^i$ обозначает альтернативу, полезность которой:

$$u_j\left(\sum_{i\in L} x^i\right)=\frac{1}{|L|}\sum_{i\in L} u_j(x^i), \quad j=1,$$

$$\{x^i: i\in L\}\subset X, \ |L|=l.$$

Альтернативу $\sum\limits_{i\in L} x^i$ можно интерпретировать как лотерею

$$\left(\frac{1}{l}x^{i_1}, \quad \frac{1}{l}x^{i_l}\right), \quad \{i_1, \ldots, i_l\}=L.$$

Определим f_j следующими двумя условиями.

1. Предположим, что $f_j(\bar{x})=f_j(x_1^{j_1}, \quad x_n^{j_n})$, $x_j^{i_j}\in\{x^1, \ldots, x^m\}$, симметрическая функция. Тогда ее значения зависят только от того, какие альтернативы выбираются и сколькими игроками каждая из них выбирается. Обозначим через x^{ik_i} тот факт, что i-я альтернатива (стратегия) x^i выбрана k_i игроками. Тогда можно писать:

$$f_j(\bar{x})=f_j(x_1^{j_1}, \quad x_n^{j_n})=f_j(x^{1k_1}, \quad ., x^{mk_m}),$$

$$\sum_{i=1}^{m} k_i=n, \quad 0\leqslant k_i\leqslant n.$$

Если $k_i=0$, то нет игрока, использующего стратегию x^i. Если $k_i=n$, то все игроки выбирают стратегию x^i.

2.

$$f_j(\bar{x})=f_j(x^{1k_1}, \ldots, x^{ik_i}, \quad ., x^{mk_m})=u_j\left(\sum_{i\in L} x^i\right), \tag{2}$$

где

$$L=\left\{i: k_i=\max\{k_1, \ldots, k_m\}\right\}.$$

Такое определение f_j позволяет нам рассмотреть принятие группового решения с точки зрения устойчивости в бескоалиционных играх.

Определение 4. Назовем выигрыш в ситуации x l-смешанным, если во (2) $l\geqslant 2$. Если $l=1$, выигрыш назовем чистым.

Для удобства соответствующие ситуации будем называть соответственно l-смешанными или чистыми. Очевидно, что во (2)

$$|L|=l\leqslant\min(n, |X|)=\min(n, m).$$

Замечание. Требование задания $u_j(x^i)$ не необходимо. Все дальнейшее остается верным и в том случае, если задано только индивидуальное отношение предпочтения „$\succsim$" на множестве $\left\{\sum_{i\in L} x^i,\ L\subset\{1, \quad m\}\right\}$. Кроме того, предполагается, что если индивид расширяет свое отношение предпочтения с $\left\{\sum_{i\in L} x^i\right\}$, $L\subset\{1, \quad m\}$ на $\left\{\sum \lambda_i x^i\right.$, где $\left.\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1,\ \lambda_i\geqslant 0\right\}$, то отношение предпочтения на $\left\{\sum \lambda_i x^i\right\}$ удовлетворяет аксиомам Неймана—Моргенштерна. В таком случае существуют $u_j\,(j\in N)$, что:

$$\sum_{i\in L_1} x^i R_j \sum_{i\in L_1} y^i \rightleftarrows u_j\Big(\sum_{i\in L_1} x^i\Big)\, Ru_j\Big(\sum_{i\in L_1} y^i\Big),\quad x^i,\ y^i\in x,\ j\in N, \tag{3}$$

R_j означает $\sim$, $\succ$, $\prec$ и R соответственно $=$, $>$, $<$.

Лемма 1. *Для любых $x\in X$, $L\subset\{1, \quad m\}$ и $j\in N$ верно*

$$\sum_{i\in L} x^i \underset{j}{\succ} x \rightleftarrows \Big(\sum_{i\in L} x^i+x\Big)\succ x,\quad \sum_{i\in L} x^i \underset{j}{\sim} x \rightleftarrows$$

$$\rightleftarrows\Big(\sum_{i\in L} x^i+x\Big)\underset{j}{\sim} x \quad \text{и} \quad \sum_{i\in L} x^i \underset{j}{\prec} x \rightleftarrows \sum_{i\in L}(x^i+x)\underset{j}{\prec} x.$$

Доказательство. Докажем лемму для $\sim$. Для $\succ$ и $\prec$ доказательство аналогичное.

Пусть $L=\{1, \quad l\}$. Тогда $\sum_{i\in L} x^i=\sum_{i=1}^{l} x^i$. Пусть $\sum_{i=1}^{l} x^i \underset{j}{\sim} x$. Допустим, например,

$$\Big(\sum_{i=1}^{l} x^i+x\Big)\succ x.$$

Из (3) и отсюда следует:

$$u_j\Big(\sum_{i=1}^{l} x^i+x\Big)>u_j(x) \to \frac{1}{l+1}\sum_{i=1}^{l} u_j(x^i)+$$

$$+\frac{1}{l+1}u_j(x)>u_j(x) \to \frac{1}{l+1}\sum_{i=1}^{l} u_j(x^i)>\frac{l}{l+1}u_j(x)\to$$

$$\to\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l} u_j(x^i)>u_j(x)\to\sum_{i=1}^{l} x^i\underset{j}{\succ} x,$$

что противоречит

$$\sum_{i=1}^{l} x^i \underset{j}{\sim} x.$$

Пусть $\sum_{i=1}^{l} x^i + x \underset{j}{\sim} x$, но $x \underset{j}{\succ} \sum_{i=1}^{l} x^i$. Отсюда:

$$u_j(x) > u_j\left(\sum_{i=1}^{l} x^i\right) \to u_j(x) > \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l} u_j(x^i) \to$$

$$\to \frac{1}{l+1} u_j(x) > \frac{1}{l+1}\sum_{i=1}^{l} u_j(x^i) \to u_j(x) > \frac{1}{l+1}\sum_{i=1} u_j(x^i) +$$

$$+ \frac{1}{l+1} u_j(x) \to x \underset{j}{\succ} \left(\sum_{1}^{l} x^i + x\right),$$

что противоречит $\sum_{1}^{l} x^i + x$. Лемма доказана.

Как обычно, $x \underset{\widetilde{S}}{\succ} y$ будет означать $x \underset{\widetilde{j}}{\succ} y$, $j \in S$ и существует $j_0 \in S$, что $x \underset{j_0}{\succ} y$. Кроме того, будем употреблять следующее обозначение.

Определение 5. Пусть $S \subset N$ и $|S| = k$. 1) $x \underset{\sim}{\prec}^k y$ означает: существует такое $S \subset N$ и $|S| = k$, что $x \underset{\widetilde{S}}{\prec} y$, т. е. $x \underset{\widetilde{j}}{\prec} y$, $j \in S$ и существует $j_0 \in S$, что $x \underset{\widetilde{j_0}}{\prec} y$; 2) $x \overline{\underset{\sim}{\prec}}^k y$ означает отрицание утверждения $x \underset{\sim}{\prec}^k y$.

Определение 6. Одновременное 1, 2, n-равновесие будем называть абсолютным равновесием.

Теорема 1. *Для того, чтобы чистая ситуация $x = (x^{in})$ была абсолютным равновесием, необходимо, чтобы $x^i \overline{\underset{\sim}{\prec}}^k y$, где $k = \left[\frac{n+1}{2}\right]$ — целая часть числа $\frac{n+1}{2}$, для всех $y \in \{x^1, \quad x^m\}$.*

Доказательство. Пусть (x^{in}) — ситуация абсолютного равновесия. Тогда по (2):

$$f_j(x^{in}) = u_j(x^i), \quad j = 1 \ldots, n.$$

Если существует такой y, что $y \underset{\sim}{\succ}^k x^i$, то в силу (3)

$$u_j(y) \geqslant u_j(x^i),\ j \in M,\ |M| = \left[\frac{n+1}{2}\right] = k, \tag{4}$$

причем хотя бы для одного $j \in M$: $u_j(y) > u_j(x)$. Но тогда игроки M при нечетном n могут перейти в ситуацию $x \| y_M$, ибо

$$f_j(x \| y_M) = u_j(y), \quad j = 1, \ldots, n;$$

и в силу (4)

$$F_M(x \| y_M) \geqslant F_M(x).$$

Следовательно, $x = (x^{in})$ не является ситуацией абсолютного равновесия.

Перейдя к четному n, отметим, что по лемме 1

$$y \underset{\widetilde{M}}{\succ} x^i \to y + x^i \underset{\widetilde{M}}{\succ} x^i. \tag{5}$$

Тогда при $y \underset{\widetilde{M}}{\succ} x^i$ игроки M могут перейти в ситуацию $x \| y_M$, так как из (2) получаем

$$f_j (x\|y_M) = u_j (x^i + y),\ j \in N,$$

а отсюда и из (5)

$$F_M (x\|y_M) \geqslant F_M (x).$$

Опять пришли к тому, что $x = (x^{in})$ не абсолютное равновесие. Это доказывает необходимость.

Другое очевидное следствие из данных определений.

Теорема 2. *Для того, чтобы существовала ситуация абсолютного равновесия, достаточно, чтобы для какого-то* $y \in X$ *было* $y \succsim^k \sum\limits_{i \in L} x^i$ *для всех* $|L| = l \leqslant \min (n, m)$, $k = \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

Доказательство. Рассмотрим ситуацию $y = (y^n)$. Для того, чтобы переход в ситуацию, выигрыш в которой есть $u_j (z)$ или $u_j (y+z)$, $j \in N$, был возможен, необходимо

$$F_M (y \| z_M) \geqslant F_M (y), \quad |M| = \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

В силу условия $y \precsim^k \sum\limits_{i \in L} x^i$ это невозможно. Для перехода в другие смешанные ситуации, ввиду определения f_j, необходимо существование такого $W \subset N$, $|W| \geqslant |M|$, что $y \underset{W}{\precsim} \sum\limits_{i \in L} x^i$. В силу $y \precsim^k \sum\limits_{i \in L} x^i$ это очевидно невозможно.

Дальнейшее описание модели состоит в уточнении утверждений теорем 1 и 2. В конце приводятся условия единственности.

2. Через $y, z, \ldots, x^i$ будем обозначать элементы множества $X = \{x^1, \ldots, x^m\}$, причем x будет обозначать такую альтернативу, что $x \precsim^k y$ для всех $y \in X$, $k = \left[\frac{n+1}{2}\right]$. Ситуацию, выигрыш в которой $u_j\left(\sum\limits_{i \in L} x^i\right)$, $|L| = l \leqslant \min (n, m)$, будем обозначать через $\left[\sum\limits_{i \in L} x^i\right]$. Соответствующих одному выигрышу ситуаций может быть не одна, но это не приведет к путанице.

Лемма 2. *Если* $x \precsim^k y$, $y \in X$, $k = \left[\frac{n+1}{2}\right]$, *то ситуация* (x^n) *является по меньшей мере* 1, k'*-равновесием, где* $k' = \left[\frac{2}{3} n\right]$, *если* $n = 3d + q$, *и* $k' = \frac{2}{3} n - 1$, *если* $n = 3d$ (d *— целое число, а* $q = 1, 2$).

Доказательство. Из того, что для каждого y: $x \precsim^k y$, следует невозможность перехода из (x^n) в $[y]$ или $[x+y]$. Рассмотрим возможность существования такого $W \subset N$, $|W| \geqslant \left[\frac{n+1}{2}\right]$, что

$$F_W ([y+z]) \geqslant F_W (x^n),\ y,\ z \neq x. \tag{6}$$

Если $n=3d$, то (6) ввиду определения f_j невозможно, когда $|N\setminus W|>\frac{n}{3}$ $\left(|W|<\frac{2}{3}n\right)$, так как в этом случае равенство $f_j\ (x^{k_1}, y^{k_2}, z^{k_3})=u_j\ (y+z)$ возможно только тогда, когда $k_2=k_3$ и $k_1<k_2$. Это невозможно, когда

$$k_1=|N\setminus W|>\frac{n}{3}$$

В случае $n=3d+q:\left[\frac{2}{3}n\right]<\frac{2}{3}n$, и поэтому, если k' игроков $\leqslant\left[\frac{3}{2}n\right]$ и меняют стратегии, они не могут перейти в $[y+z]$ или $[x+y+z]$ в силу определения f_j.

Очевидно, что, если множество игроков $W\subset N$ не могут перейти к ситуациям, которые здесь не обязательно доминируют (x^n) для игроков $\in W[y+z]$ или $[x+y+z]$, то тем более они не могут перейти к ситуациям $\left[\sum\limits_{i\in L}x^i\right]$, $|L|\geqslant 3$. Лемма доказана.

Из леммы 2 следует, например, что если $n=3$ и $x\overset{\sim}{\underset{\sim}{<}}{}^2 y$, то $(x, x, x)=(x^3)$ всегда будет ситуацией 1-равновесия. Если, например, $n=15$ и $x\overset{\sim}{\underset{\sim}{<}}{}^6 y$, то (x^{15}) – ситуация 1, ..., 9-равновесия, так как $9<\frac{2}{3}\cdot 15$.

Обозначения. 1) $k_l=\max\limits_k\left\{k:\frac{k}{l}<n-k\right\}$, k, l- целые числа;

2) $M_l\in\{M:M\subset N,\ |M|=k_l+1\}$.

Укажем несколько свойств чисел k_l.

Лемма 3. 1) $k_1\leqslant k_2\leqslant\quad\leqslant k_n=k_{n+1}=\quad=n-1$;

2) $k_l=\min\limits_k\left\{k:\frac{k}{l}\geqslant n-k\right\}-1$

или $M_l=\min\limits_k\left\{k:\frac{k}{l}\geqslant n-k\right\}$.

Доказательство. 1) Можно написать

$$k_l=\max_k\left\{k:\frac{k}{l}<n-k\right\}=\max_k\left\{k:k<\frac{l}{l+1}n\right\},$$

$$k_{l+1}=\max_k\left\{k:k<\frac{l+1}{l+2}n\right\}.$$

Отсюда, так как $\frac{l+1}{l+2}n\geqslant\frac{l}{l+1}n$:

$$k_{l+1}\geqslant k_l.$$

Дальше:

$$k_{n+d}=\max_k\left\{k:k<\frac{n+d}{n+d+1}n\right\}=\max_k\left\{k:k<n-\frac{n}{n+d+1}\right\}.$$

Так как при $d\geqslant 0$ всегда $1>\frac{n}{n+d+1}\geqslant 0$, то $k_{n+d}=n-1$.

2) Пусть $n=(l+1)\,a+b$, где $a\geqslant 0$, $0\leqslant b<l+1$, a, b — целые числа. Имеем:

$$k_l=\max_k\left\{k:k<\frac{l}{l+1}\,n\right\}=\max_k\left\{k:k<\frac{l}{l+1}\,[(l+1)\,a+b]\right\}=$$

$$=\max_k\left\{k:k<la+b-\frac{b}{l+1}\right\}=la+b-1, \tag{7}$$

$$\min_k\left\{k:k\geqslant\frac{l}{l+1}\,n\right\}=\min_k\left\{k:k\geqslant la+b-\frac{b}{l+1}\right\}=la+b. \tag{8}$$

Из (7) и (8) получаем

$$\min\left\{k:\frac{k}{l}\geqslant n-k\right\}=\max_k\left\{k:\frac{k}{l}<n-k\right\}+1=k_l+1=|M_l|.$$

Теорема 3. *Если существует такая альтернатива* $x\in X$, *что* $x\,\overline{\precsim}^{k_l+1}\sum_{i\in L'}x^i$ *для всех* L', $|L'|=l'\leqslant l\leqslant\min(n,m)$, *то* (x^n) *является по меньшей мере* $1,\ \ldots,\ k_{l+1}$*-равновесием.*

Доказательство. Для $l=1=l'$ теорема, как следует из леммы 2, верна. Пусть она верна и для $l-1$ (где $l\geqslant 3$). Покажем справедливость утверждения и для l.

Заметим, что по предположению индукции:

$$x\,\overline{\precsim}^{k_{l'}+1}\sum_{i\in L'}x^i\quad\text{для}\quad|L'|\leqslant l-1.$$

Имеем:

$$x\,\overline{\precsim}^{k_{l-1}+1}\sum_{i\in T}x^i\quad\text{для всех } T\subset\{1,\qquad m\},\ \ T|\leqslant l-1.$$

Действительно, если бы существовало $T_1\subset\{1,\qquad m\}$, $|T_1|=t_1\leqslant l-1$, что

$$x\precsim^{k_{l-1}+1}\sum_{i\in T_1}x^i,$$

то из леммы 3 и определения 5 тем более:

$$x\precsim_{k_{t_1}+1}\sum_{i\in T_1}x^i,$$

что противоречит предположению индукции. Отсюда и по условию теоремы:

$$x\,\overline{\precsim}^{k_l+1}\sum_{i\in L'}x^i\ \text{для всех}\ |L'|\leqslant l. \tag{9}$$

Значит, если не существовало бы множества $M_l\subset N_1\,|\,M_l\,|=k_l+1$, такого что

$$x\precsim^{k_l+1}\sum_{i\in L_1}x^i,\ \text{где}\ L_1\subset\{1,\ \ldots,\ m\},\ |L_1|>l,$$

то из (9) и по предположению индукции можно было бы утверждать, что (x^n) $1,\ \ldots,\ k_l+1$-равновесие. Но так как может оказаться, что $k_{l+1}=k_l$ и $k_l+1>$ $>k_{l+1}$, то отсюда следует возможность существования множества игроков

$W \subset N$, $|W| = k_l + 1$, для которых возможен переход к $\left[\sum_{i \in L_1} x^i\right]$ и $\sum_{i \in L_1} x^i \underset{W}{\succ} x$. Следовательно, про (x^n) можно утверждать только, что она $1, \ldots, k_{l+1}$-равновесие, поскольку, если только не больше чем $\max_k \left\{k : \frac{k}{i+1} < n-k\right\} = k_{l+1}$ игроков меняют стратегию x, то они не могут перейти к $\left[\sum_{i \in L_1} x^i\right]$, $|L_1| > l$.

Теорема 4. *Если* $k_1 < k_2 < \quad < k_l < k_{l+1}$, *то для* $1, \ldots, k_{l+1}$*-равновесности* (x^n) *услсвия теоремы* 3 *необходимы.*

Доказательство. Допустим противное: для какой-то $\left[\sum_{i \in L'} x^i\right]$ $1 \leqslant l' \leqslant l$ имеем $x \underset{\sim}{\prec}^{k_{l'}+1} \sum_{i \in L'} x^i$. По лемме 3 (x^n) не будет $k_{l'}+1$-равновесием. Но из неравенства $k_{l'} < k_{l'+1}$ в силу целочисленности k_l следует $k_{l'}+1 \leqslant k_{l'+1} \leqslant k_{l+1}$. Значит, (x^n) не будет $1, \quad k_{l+1}$-равновесием. Отсюда следует необходимость.

Непосредственно из теоремы 3 получаем.

Следствие. Для того, чтобы (x^n) была ситуацией абсолютного равновесия, достаточно выполнения условий теоремы 3 для $l = \min(n, m)$.

Это следует из того, что более чем $\min(n, m)$-смешанная ситуация невозможна. А так как не существует L, что $\sum_{i \in L} x^i \underset{\sim}{\succ}^{k_l+1} X$ для $|L| = l = 1$, $\min(n, m)$, то невозможен переход из (x^n) в любую l-смешанную ситуацию.

3. Мы показали, что при некоторых условиях (x^n) является ситуацией абсолютного равновесия. Для этого необходимо $x \underset{\sim}{\overline{\prec}}^k z$ для всех $z \in X$, $k = \left[\frac{n+1}{2}\right]$. Ниже покажем, при каких условиях ситуация абсолютного равновесия единственна. Единственность ситуации абсолютного равновесия будем понимать в том смысле, что только для одной альтернативы $z \in \left\{\sum_{i \in L} x^i\right\}$ $L \subset \{1, \ldots, m\}$, какая-то соответствующая ситуация из $[z]$ абсолютно равновесна. Нам понадобится следующее обозначение:

$$X_M = \left\{x : x \underset{\sim}{\overline{\prec}}^k y \text{ для всех } y \in X,\ k = \left[\frac{n+1}{2}\right]\right\}.$$

Лемма 4. *Если* $|x_M| > 1$, *то* $x \underset{N}{\approx} y$ *для любых* $x, y \in X_M$.

Доказательство. Имеем $x \underset{\sim}{\overline{\prec}}^k y$ и $y \underset{\sim}{\overline{\prec}}^k x$ для $x, y \in X_M$. Пусть $x \underset{N_1}{\prec} y$, $x \underset{N_2}{\approx} y$ и $x \underset{N_3}{\succ} y$. Очевидно множества N_1, N_2, N_3 составляют разбиение множества N. Обозначим $n_i = |N_i|$, $i = 1, 2, 3$. Допустим, что неверно $x \underset{N}{\approx} y$. Тогда, например, $n_1 \geqslant 1$. Так как $x \underset{\sim}{\prec}^k y$, то

$$n_1 + n_2 \leqslant \left[\frac{n-1}{2}\right].$$

Поскольку $n_3 = n - (n_1 + n_2)$, то отсюда имеем:

$$n_3 \geqslant n - \left[\frac{n-1}{2}\right] \geqslant n - \frac{n+1}{2} \geqslant \left[\frac{n+1}{2}\right] = k. \tag{10}$$

Так как $x \underset{N_3}{\succ} y$, то из (10) следует $x \succ^k y$, что невозможно в силу условия $y \in X_M$. Итак, $x \underset{N}{\sim} y$.

Лемма 5. *Если* $x \,\overline{\precsim}^k\, y$, $k = \left[\frac{n+1}{2}\right]$ *и* $x \underset{N}{\not\sim} y$, *то* $x \succsim^k y$.

Доказательство. Пусть опять $x \underset{N_1}{\prec} y$, $x \underset{N_2}{\sim} y$, $x \underset{N_3}{\succ} y$.Так как $x \underset{N}{\not\sim} y$, то n_1 или n_3 не равно 0. В случае $n_1 > 0$ аналогично предыдущей лемме получаем: $x \succ^k y$. Если $n_1 = 0$, а $n_3 > 0$ то $x \underset{N}{\succsim} y$, а тем более и $x \succsim^k y$.

Сделаем два замечания, основанных на определениях f_j и $\sum\limits_{i \in L} x^i$.

1) Пусть N_i – множество игроков $j \in N$, выбирающих x^i, $i \in L$ в ситуации $\left[\sum\limits_{i \in L} x^i\right]$. Тогда

$$|N_i| = p \leqslant \left[\frac{n}{l}\right] \text{ для всех } i \in L.$$

Действительно по определению

$$L = \left\{ i : k_i = \max\{k_1, \ldots, k_m\} \right\},$$

$$f_j(x^{1k_1}, \ldots, x^{mk_m}) = u_j\left(\sum_{i \in L} x^i\right),$$

откуда немедленно следует это утверждение.

2) Если в ситуации $\left[\sum\limits_{i \in L} x^i\right]$ к множеству N_i добавляется еще один игрок, то получается ситуация $[x^i]$, т. е. выигрыш игрока j становится $u_j(x^i)$, $j \in N$.

Лемма 6. *Если* $\left[\sum\limits_{i \in L} x^i\right]$ *– смешанная ситуация абсолютного равновесия, то для любых* $i, j \in L$, $i \neq j$, *и любого* $q \in N_i$ *выполняется* $x^i \underset{q}{\succsim} x_j$.

Доказательство. Очевидно нам достаточно показать, что $x^i \underset{q}{\succsim} x_j$ для наиболее хорошего x^j с точки зрения q. Поэтому в доказательстве от противного допустим, что существуют такие $s, j \in L$, $s \neq j$ и $q \in N_s$, что

$$x^s \underset{q}{\prec} x^j, \; x^j \underset{q}{\succsim} x^i; \; q \in N_s, \; i \in L. \tag{11}$$

Тогда q-ый игрок вместо стратегии x^s должен применять x^j, а по замечаниям 1) и 2) ситуация $\left[\sum\limits_{i \in L} x^i\right]$ должна быть заменена на $[x^j]$. Но в силу (11)

$$u_q\left(\sum_{i \in L} x^i\right) < u_q(x^j)$$

и $\left[\sum\limits_{i \in L} x^i\right]$ не будет 1-равновесием. Противоречие.

Обозначим:

$$X_L = \{x^i : i \in L\}.$$

Лемма 7. *Если* $\left[\sum_{i\in L} x^i\right]$ *смешанная ситуация абсолютного равновесия и хотя для одного* $i\in L$ *существует* $q\in N_j$, *что* $x^i \underset{q}{\sim} x^j$ *для некоторого* $j\in L$, $i\neq j$, *то*:

1) $x^i \underset{N}{\sim} x^j$, $i, j\in L$;

2) $X_L \subset X_M$.

Доказательство. 1) Пусть существуют такие i, $j\in L$, $i\neq j$ и $q\in N_j$, что $x^i \underset{q}{\sim} x^j$. По лемме 6 $x^i \underset{\tilde N_i}{\sim} x^j$ или $x^i \underset{\tilde N_i}{\succ} x^j$. Если $x^i \underset{\tilde N_i}{\succ} x^j$, то множество игроков $N_i \cup \{q\}$ может перейти к ситуации $[x^i]$. Этот переход действительно возможен:

$$F_{N_i\cup\{q\}}\left(\left[\sum_{j\in L} x^j\right]\right) \leqslant F_{N_i\cup\{q\}}([x^i]),$$

поскольку

$$F_{N_i\cup\{q\}}\left(\left[\sum_{j\in L} x^j\right]\right) = \left(f_{s_1}\left(\left[\sum_{j\in L} x^j\right]\right), \ \ldots, f_{s_{p+1}}\left(\left[\sum_{j\in L} x^j\right]\right)\right) =$$

$$= \left(u_{s_1}\left(\sum_{j\in L} x^j\right), \quad u_{s_{p+1}}\left(\sum_{j\in L} x^j\right)\right) \leqslant \left(u_{s_1}(x^i), \ \ldots, u_{s_{p+1}}(x^i)\right) =$$

$$= F_{N_i\cup\{q\}}([x^i]), \quad s_k\in N_i \cup \{q\}, \quad k=1, \ \ldots, p+1.$$

Следовательно, всегда:

$$x^i \underset{\tilde N_i}{\sim} x^j.$$

Поэтому очевидно также

$$x^j \underset{\tilde N_j}{\sim} x^i \quad \text{и} \quad x^i \underset{N_i\tilde\cup N_j}{\sim} x^j. \tag{12}$$

Из леммы 6 и (12) следует, что

$$x^i \underset{q}{\succ} x^s, \quad x^j \underset{q}{\succ} x^s \quad \text{для всех} \quad s\in L, \ q\in N_i \cup N_j. \tag{13}$$

Если хотя бы для одного игрока $q\in N_i \cup N_j$ имело место строгое предпочтение „$\succ$", то игроки $N_i \cup N_j$ могли бы перейти к стратегии x^i (или x^j) и ввиду (13)

$$F_{N_i\cup N_j}\left(\left[\sum_{j\in L} x^j\right]\right) \leqslant F_{N_i\cup N_j}([x^i]). \tag{14}$$

Так как (14) противоречит тому, что $\left(\sum_{i\in L} x^i\right)$ — абсолютное равновесие, то для x^s, $s\in L$:

$$x^i \underset{N_i\tilde\cup N_j}{\sim} x^j \underset{N_i\tilde\cup N_j}{\sim} x^s \tag{15}$$

или, если положить $L=\{1, \ldots, l\}$, то из (15)

$$x^1 \sim x^2 \sim \ldots \sim x^l \text{ для } N_i \cup N_j. \qquad (16)$$

Для доказательства справедливости соотношения (16) для $\bigcup_{i\in L} N_i$ допустим противное, т. е. что существуют $q\in N\backslash(N_i \cup N_j)$ и $s, t\in L$ такие, что

$$x^s \underset{q}{\succ} x^t, \quad x^s \underset{q}{\succsim} x^r \quad \text{для всех} \quad r\in L.$$

Другими словами

$$u_q\Big(\sum_{i\in L} x^i\Big) < u_q(x^s). \qquad (17)$$

Из (16) следует

$$u_k\Big(\sum_{i\in L} x^i\Big) = u_k(x^s), \quad k\in N_i \cup N_j.$$

Поэтому отсюда и из (17)

$$F_{N_i\cup N_j\cup\{q\}}\Big(\Big[\sum_{i\in L} x^i\Big]\Big) \leqslant F_{N_i\cup N_j\cup\{q\}}([x^s]).$$

Последнее неравенство противоречит тому, что $\Big[\sum_{i\in L} x^i\Big]$ абсолютное равновесие, так как игроки $N_i \cup N_j \cup \{q\}$ могут перейти к стратегии x^s. Значит:

$$x^1 \sim x^2 \sim \qquad \sim x^l \text{ для всех } q\in N\backslash(N_i \cup N_j). \qquad (18)$$

Объединяя (16) и (18), получаем:

$$x^1 \sim \qquad \sim x^l \quad \text{для всех } j\in N. \qquad (19)$$

Для доказательства 2) утверждения леммы допустим, что существует $y\in X_L$ и $y\notin X_M$. Из (19) следует:

$$y \underset{N}{\sim} \sum_{i\in L} x^i. \qquad (20)$$

Так как $y\notin X_M$, то для любого $x\in X_M$ неверно $x \underset{N}{\sim} y$. Из того, что $x\in X_M$ следует $x \precsim^k y$, $k=\left[\frac{n+1}{2}\right]$. Поэтому из леммы 5 следует $x \succsim^k y$, а в силу (20): $x \succsim^k \sum_{i\in L} x^i$. Это означает, что существует такое $M \subset N$, $|M| = \left[\frac{n+1}{2}\right]$, для которого

$$F_M\Big(\Big[\sum_{i\in L} x^i\Big]\Big) \leqslant F_M([x]).$$

Последнее неравенство противоречит тому, что $\Big[\sum_{i\in L} x^i\Big]$ — абсолютное равновесие. Поэтому $X_L \cup X_M = X_L$.

Лемма 8. *Если* $\left[\sum\limits_{i\in L} x^i\right]$ *— смешанная ситуация абсолютного равновесия и* X_L *не является подмножеством* X_M, *то* 1) $x^i \underset{N_i}{\succ} x^j$ *для всех* $i, j\in L$, $i\neq j$ *и* 2) $n=lp$; l, p *— целые числа.*

Доказательство. Так как X_L не является подмножеством X_M, то по лемме 7 не существует $q\in N_i$ и $i, j\in L$, $i\neq j$, что $x^i \underset{q}{\sim} x^j$. Отсюда по лемме 6 $x^i \underset{N_i}{\succ} x^j$ для всех $i, j\in L$, $i\neq j$.

Для доказательства утверждения 2) допустим, что существует $q\in N\setminus \bigcup\limits_{i\in L} N_i$. Очевидно найдется такое $s\in L$, что:

$$x^s \underset{q}{\succsim} x^r \text{ для всех } r\in L.$$

Так как по доказанному $x^s \underset{N_s}{\succ} x^j$, $s\neq j$, то из замечаний 1) и 2) следует, что игроки $N_s\cup\{q\}$ могут перейти к стратегии x^s, так как

$$F_{N_s\cup\{q\}}\left(\left[\sum_{i\in L} x^i\right]\right)\leqslant F_{N_s\cup\{q\}}([x^s]).$$

Но это противоречит абсолютной равновесности ситуации $\left[\sum\limits_{i\in L} x^i\right]$. Значит:

$$N\setminus\bigcup_{i\in L} N_i=\emptyset.$$

Лемма 9. *Если* $\left[\sum\limits_{i\in L} x^i\right]$ *— ситуация абсолютного равновесия и* $X_L\cap X_M$ *непусто и не равно* X_L, *то для* $x\in X_M$ $x \prec^{k_{l-1}+1} \sum\limits_{i\in L} x^i$.

Доказательство. Так как по лемме 4 $x \underset{N}{\sim} y$ для всех $x, y\in X_M$, то, не теряя общности, положим:

$$x=x^l\in X_L\cap X_M.$$

По лемме 8, так как $X_L\not\subset X_M$, то $n=lp$, $x^l \underset{N_l}{\succ} \sum\limits_{i\in L} x^i$. Из леммы 3 следует, что

$$|M_{l-1}|=\min_k\left\{k:\frac{k}{l-1}\geqslant pl-k\right\}=p(l-1)=(N\setminus N_l).$$

Пусть для хотя бы одного игрока $j\in N\setminus N_l$

$$x \underset{j}{\succsim} \sum_{i\in L} x^i. \tag{21}$$

Так как $x \underset{N_l}{\succ} \sum\limits_{i\in L} x^i$, то отсюда и из (21)

$$F_{N_l\cup\{j\}}\left(\left[\sum_{i\in L} x^i\right]\right)\leqslant F_{N_l\cup\{j\}}([x]).$$

Продолжение рассуждения приводит к противоречию. Значит,

$$x \underset{N\setminus N_l}{\prec} \sum_{i\in L} x^i \text{ и, тем самым, } x \prec^{k_{l-1}+1} \sum_{i\in L} x^i.$$

Лемма 10. *Если* $x\in X_M$, $X_L \cap X_M = \emptyset$, (x^n) — *ситуация абсолютного равновесия, и* $\sum_{i\in L} x^i \overline{\succ}^{k_{l-1}+1} x$, *тогда* $\left[\sum_{i\in L} x^i\right]$ *не является абсолютным равновесием.*

Доказательство. Пусть $\left[\sum_{i\in L} x^i\right]$ — ситуация абсолютного равновесия. Рассмотрим два случая:

а) не существует $j\in N$, чтобы $\sum_{i\in L} x^i \prec x$;

б) существует $j \in N$, что $\sum_{i\in L} x^i \prec x$.

Пусть имеет место случай а). Тогда:

$$\sum_{i\in L} x^i \underset{j}{\succsim} x \quad \text{для любого } j\in N \text{ или } \sum x^i \underset{N}{\approx} x.$$

Отсюда, ввиду того, что (x^n) — абсолютное равновесие, всегда

$$\sum_{i\in L} x^i \underset{N}{\approx} x. \tag{22}$$

Из леммы 8 имеем $x^r \underset{N_r}{\succ} x^j$, $r, j\in L$, $r\neq j$, $n=lp$. Следовательно:

$$x^r \underset{N_r}{\succ} x, \quad r\in L=\{1, \ldots, l\}, \tag{23}$$

так как в противном случае, скажем при $x^r \underset{j}{\precsim} x$, для $j\in N_r$ имели бы

$$u_j\left(\sum_{i\in L} x^i\right) = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l} u_j(x^i) < \frac{1}{l}\cdot l\, u_j(x^r) \leqslant u_j(x)$$

и

$$\sum_{i\in L} x^i \underset{j}{\prec} x,$$

что противоречит (22).

Так как $\left[\sum_{i\in L} x^i\right]$ ситуация абсолютного равновесия:

$$\sum_{l=1}^{l-1} x^l \underset{N\setminus N_l}{\succ} x. \tag{24}$$

В противном случае, если бы существовал $j\in N\setminus N_l$, что:

$$\sum_{l=1}^{-1} x \precsim x, \tag{25}$$

то отсюда получили бы:

$$x^l \underset{j}{\succsim} \sum_{i\in L} x^i, \quad j\in N\setminus N_l. \tag{26}$$

Действительно, из (22) и (25) по (3) имеем

$$\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l} u_j(x^i)=u_j(x),$$

$$\frac{1}{l-1}\sum_{i=1}^{l-1} u_j(x^i)\leqslant u_j(x).$$

Вычитая первое соотношение из второго, получаем

$$\frac{1}{l-1}\sum_{i=1}^{l-1} u_j(x^i)\leqslant \frac{1}{l}\,u_j(x^l) \to \sum_{i=1}^{l-1} x^i \underset{j}{\precsim} x^l.$$

Из последнего соотношения по лемме 1 следует (26). По замечаниям 1), 2) из (23) и (26) получаем:

$$F_{N_l\cup\{j\}}\left(\left[\sum_{i\in L} x^i\right]\right)\leqslant F_{N_l\cup\{j\}}([x^l]). \tag{27}$$

Поскольку (27) противоречит абсолютной равновесности $\left[\sum_{i\in L} x^i\right]$, то верно (24). Поскольку (24) противоречит абсолютной равновесности (x^n), так как в силу леммы 1 и (24):

$$\left(\sum_{i=1}^{l-1} x^i + x\right) \underset{N\setminus N_l}{\succ} x,$$

то в случае а) лемма доказана.

б) Существует $j\in N$, что $\sum_{i=1} x^i \prec x$. Тогда существует $W\subset N$, что

$$\sum_{1}^{l} x^i \underset{W}{\succ} x, \ |W|\geqslant p\,(l-1)=|M_{l-1}|. \tag{28}$$

Действительно, если бы было $|W|<p\,(l-1)$, то для

$$V=N\setminus W, \ |V|=n-|W|>p$$

и

$$\sum_{i=1}^{l} x^i \underset{V}{\precsim} x,$$

причем $j\in V$. Отсюда следует, что игроки V имеют возможность перейти к ситуации $[x]$ и ввиду $\sum_{1}^{l} x^i \prec x,\ j\in V$:

$$F_V\left(\left[\sum_{i\in L} x^i\right]\right)\leqslant F_V([x]).$$

Значит, (28) необходимо для абсолютной равновесности $\left[\sum\limits_{i\in L} x^i\right]$. Но в силу $\sum\limits_{i\in L} x^i \succsim^{k_{l-1}+1} x$, следует утверждение леммы.

Объединяя леммы 8, 9, 10, получаем теорему.

Теорема 5. *Пусть* $\left[\sum\limits_{i\in L} x^i\right]$, *где* $X_L \subset X_M$, *ситуация абсолютного равновесия. Чтобы не было ситуаций абсолютного равновесия* $\left[\sum\limits_{i\in L'} x^i\right]$ *со свойством* $X_{L'} \not\subset X_M$, *достаточно, чтобы для* $|L'| = l' = \frac{n}{p}$, *где* l' p, n — *целые числа, выполнялось условие* $\sum\limits_{i\in L'} x^i \overline{\succ}^{k_{l'-1}+1} x$, $x \in X_M$.

Доказательство. Из леммы 8 следует, что ситуациями абсолютного равновесия могут быть только такие $L' \subset \{1, \quad m\}$, когда $n = l'p$, n, l', p — целые числа.

Из леммы 9 следует, что если $X_{L'} \not\subset X_M$ и $X_{L'} \cap X_M \neq \emptyset$, то для абсолютной равновесности $\left[\sum\limits_{i\in L'} x^i\right]$ необходимо $\sum\limits_{i\in L'} x^i \succ^{k_{l'-1}+1} x$. Но последнее невозможно в силу условия теоремы, и $\left[\sum\limits_{i\in L'} x^i\right]$ — не абсолютное равновесие.

Так как для $\left[\sum\limits_{i\in L} x^i\right]$: $X_L \subset X_M$, то по лемме 4 для всех $x, y \in X_L$, $x \underset{N}{\sim} y$. Очевидно отсюда, что (x^{in}), $i \in L$ также будут абсолютными равновесиями и $x^i \in X_M$. Ввиду этого, из леммы 10 заключаем, что $\left[\sum\limits_{i\in L'} x^i\right]$, где $X_{L'} \cap X_M = \emptyset$, не является абсолютным равновесием.

Теорема доказана.

Теорему 5 можно сформулировать и так.

Теорема 5'. *Пусть* $x \in X_M$, $|X_M| = 1$ *и* (x^n) — *абсолютное равновесие. Для того, чтобы не было ситуаций абсолютного равновесия, отличных от* $[x]$, *достаточно, чтобы для* $|L'| = l' = \frac{n}{p}$, l', n, p — *целые числа, выполнялось условие* $\sum\limits_{i\in L'} x^i \overline{\succ}^{k_{l'-1}+1} x$.

Теорема 6. *Пусть* $|X_M| = 1$ *и* n — *простое число. Тогда*:

а) *если* $n > m$, *то ситуациями абсолютного равновесия могут быть только* $[x]$;

б) *если* $m \geqslant n$, *то ситуациями абсолютного равновесия могут быть* $[x]$ *или* $\left[\sum\limits_{i\in L} x^i\right]$, *где* $|L| = n$.

Доказательство. а) $n > m$. Из леммы 8 следует, что если $\left[\sum\limits_{i\in L} x^i\right]$ — ситуация абсолютного равновесия, то $n = lp$ $(l = |L|)$. Но ввиду того, что число n простое и $n > m$, равенство $n = lp$ в целых числах возможно только при $l = |L| =$

$=1$. Отсюда в силу теоремы 1 ситуациями абсолютного равновесия могут быть только $[x]$.

б) $n \leqslant m$. Здесь равенство $n=lp$ возможно при $l=|L|=1$ и $l=|L|=n$. Отсюда следует б).

В случае $n \leqslant m$ теорему 6 можно уточнить.

Теорема 7. *Если $[x]$ – ситуация абсолютного равновесия, $m \geqslant n$, n – простое число, $|X_M|=1$, то кроме $[x]$ абсолютным равновесием может быть только $\left[\sum_{i \in L} x^i\right]$, где $X_L \cap \{x\}=0$.*

Доказательство. Пусть $\left[\sum_{i \in L} x^i\right]$ – абсолютное равновесие и $x \in X_L$. Из леммы 8 следует, что $|L|=n$, $x^i \succ_i x^j$, $i, j \in L=\{1, \ldots n\}$, $i \neq j$. Пусть, для определенности $x=x^1$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} x^i \underset{1}{\prec} x^1=x. \tag{29}$$

Из абсолютного равновесия (x^n) следует, что существует $k \in N \backslash \{1\}$, что:

$$\sum_{1}^{n} x^i \underset{k}{\precsim} x. \tag{30}$$

В противном случае, если $\sum_{1}^{n} x^i \underset{N \backslash \{1\}}{\succ} x$, что противоречило бы абсолютной равновесности (x^n), поскольку

$$F_{N \backslash \{1\}}\left(\left[\sum_{1}^{n} x^i\right]\right) > F_{N \backslash \{1\}}([x]).$$

Но из (29) и (30), ввиду $|N_j|=1$, $j=1, \ldots, n$ и замечаний 1), 2) следует, что игроки $\{1\} \cup \{k\}$ имеют возможность перейти к ситуации $[x]$, поскольку

$$F_{\{1\} \cup \{k\}}\left(\left[\sum_{1}^{n} x^i\right]\right) \leqslant F_{\{1\} \cup \{k\}}([x]).$$

Из теоремы 7 получаем.

Следствие. *Если $m=n$, $|X_M|=1$, n – простое число, то абсолютным равновесием может быть только одно из двух: $[x]$ или $\left[\sum_{i=1}^{n} x^i\right]$.*

Доказательство немедленно следует из того, что по теореме 6, если $\left[\sum_{i \in L} x^i\right]$ – абсолютное равновесие, то $x \in \{x^i : i \in L\}=X=\{x^1, \ldots, x^m\}$. Отсюда по теореме 7 $[x]$ и $\left[\sum_{1}^{n} x^i\right]$ абсолютными равновесиями одновременно быть не могут.

Замечание. Все сказанное о существовании и единственности абсолютного равновесия применимо и к случаю, когда групповой выбор „наилучшей" альтернативы проводится следующим образом:

1) Стратегии каждого игрока $j \in N \xi_j$ принадлежат m-мерному симплексу

$$\xi_j = (\xi_j^1, \ \ldots, \ \xi_j^m), \ \xi_j^i \geqslant 0, \ \sum_{i=1}^{m} \xi_j^i = 1, \ j = 1,$$

и могут быть интерпретированы как распределение голосов игрока между чистыми альтернативами $x^1, \ \ldots, \ x^m$.

2) Функции выигрыша определяются так:

$$f_j(\xi_1, \quad , \xi_n) = \frac{1}{|L|} \sum_{i \in L} u_j(x^i), \quad j = 1,$$

$$L = \left\{ i : \sum_{j=1}^{n} \xi_j^i = \max_k \sum_{j=1}^{n} \xi_j^k \right\}.$$

В конце хотел бы поблагодарить Э. И. Вилкаса за советы и исправления.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
15.VII.1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Д. Льюс, Х. Райфа, Игры и решения, ИЛ, М., 1961.

GRUPINIS PARINKIMAS IR PUSIAUSVYRA

A. MORKELIŪNAS

(*Reziumė*)

„Geriausios“ alternatyvos parinkimas paprastos daugumos būdu interpretuojamas kaip lošimas. Įvedama absoliučios pusiausvyros sąvoka, kuri apima pusiausvyros Nešo prasme ir efektyvaus taško sąvokas. Parodoma, jog absoliučios pusiausvyros egzistencija susijusi su nedominuojančių pagal daugumą alternatyvų egzistencija.

SOCIAL CHOICE AND EQUILIBRIUM

A. MORKELIŪNAS

(*Summary*)

The choice of "the best alternative" in a way of simple majority is treated as a game. Absolute equilibrium concept which includes equilibrium according to Nash and optimum according to Pareto is introduced. The existence of the absolute equilibrium is bound up with the existence of such alternatives which are not dominated by the majority.