1970

УДК – 517.53

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В НЕКОТОРЫХ ПОДКЛАССАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОГО ВИДА

В. М. Терпигорева

§ 1. Классы A_m

Как хорошо известно, аналитические функции ограниченного вида (класс A), введенные Неванлинной, определяются с помощью неравенства:

$$\int_0^{2\pi} \ln^+|f(re^{i\Theta})|\,d\Theta \leqslant c(f) < +\infty, \qquad 0<r<1$$

(см. [1], [2]).

И. И. Привалов [2] рассмотрел граничное поведение аналитических функций, введенных им классов A_q, $q>1$, определяемых с помощью неравенства

$$\int_0^{2\pi} [\ln^+|f(re^{i\Theta})|]^q\,d\Theta \leqslant c(f) < +\infty, \qquad 0<r<1.$$

Мы в настоящей работе исследуем экстремальные задачи для аналитических в единичном круге функций классов A_m, обобщающих классы A_q И. И. Привалова.

Чтобы определить классы A_m, напомним, что функция $m(u)$, заданная на $[0, \infty)$, называется N-функцией (см. [7]), если она непрерывна, неотрицательна, возрастает, выпукла и удовлетворяет требованиям

$$\lim_{u\to 0} \frac{m(u)}{u} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{u\to+\infty} \frac{m(u)}{u} = \infty. \tag{1}$$

Дадим теперь определение класса A_m.

Аналитическая в круге $|z|<1$ функция $f(z)$ входит в класс A_m, если имеет место неравенство

$$\int_0^{2\pi} m[\ln^+|f(re^{i\Theta})|]\,d\Theta \leqslant c(f) < \infty, \qquad 0<r<1, \tag{2}$$

где $m(u)$ – заданная N функция.

Если $c(f)\leqslant 1$, то получаем подкласс, который будет обозначать A_m^1. Из условия (1) следует, что класс A_m всегда содержится в неванлинновском классе A. Если $m(u)=u^q$, $q>1$, то получаем классы A_q.

Классы A_m были введены Е. Д. Соломенцевым [3]. Им же было указано параметрическое представление для A_m^1: функция $f(z)$ тогда и только тогда принадлежит A_m^1, когда она имеет следующее устройство:

$$f(z) = e^{i\lambda} B(z) \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\Theta}+z}{e^{i\Theta}-z} [u(\Theta)\,d\Theta + d\mu] \right\}, \tag{3}$$

где λ — вещественное число, $B(z)$ — произведение Бляшке, $u(\Theta)$ — суммируемая на $[0, 2\pi]$ функция ($u(\Theta) \in L$), причем

$$\int_0^{2\pi} m[u^+(\Theta)]\, d\Theta \leqslant 1 \tag{4}$$

($u^+(\Theta)$ определяется, как обычно: $u^+(\Theta) = u(\Theta)$, когда $u(\Theta) \geqslant 0$, и $u^+(\Theta) = 0$, если $u(\Theta) < 0$), $d\mu$ — сингулярная неположительная мера на $[0, 2\pi]$.

Введем еще следующие обозначения. Через Σ обозначим класс борелевских мер $d\nu$, заданных на $[0, 2\pi]$, имеющих следующее устройство:

$$d\nu = u(\Theta)\, d\Theta + d\mu, \tag{5}$$

где $u(\Theta) \in L$ на $[0, 2\pi]$ и удовлетворяет условию (4), а $d\mu$ — неположительная сингулярная мера.

§ 2. Основные леммы

Лемма 1. *Пусть $\alpha(\Theta)$ непрерывная функция на $[0, 2\pi]$. Для того, чтобы верхняя грань*

$$\sup_{\nu \in \Sigma} \int_0^{2\pi} \alpha(\Theta)\, d\nu \tag{6}$$

была конечна, необходимо и достаточно, чтобы $\alpha(\Theta) \geqslant 0$ всюду на $[0, 2\pi]$.

Доказательство. **Необходимость.** Пусть верхняя грань (5) конечна. Предположим противное, т. е. пусть существует такое число $\varepsilon > 0$ и такой интервал $I \subset [0, 2\pi]$, что для любого $\Theta \in I$ будет выполняться неравенство $\alpha(\Theta) < -\varepsilon$. Рассмотрим функцию

$$u_N(\Theta) = \begin{cases} -N & \Theta \in I, \\ 0 & \Theta \subset [0, 2\pi] \setminus I, \end{cases}$$

где N — достаточно большое число. При любом N мера $d\nu_N = u_N(\Theta)\, d\Theta \in \Sigma$. Действительно, $u_N(\Theta)$ — суммируема на $[0, 2\pi]$, $d\mu = 0$ и

$$\int_0^{2\pi} m[u_N^+(\Theta)]\, d\Theta = 0 < 1.$$

С другой стороны,

$$\int_0^{2\pi} \alpha(\Theta)\, d\nu_N = \int_0^{2\pi} \alpha(\Theta) \cdot u_N(\Theta)\, d\Theta \geqslant (-N)(-\varepsilon) \operatorname{mes} I.$$

Откуда видно, что интеграл стремится к $+\infty$ при $N \to +\infty$. Получили противоречие. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\alpha(\Theta) \geqslant 0$ всюду на $[0, 2\pi]$. Так как

$$\lim_{u \to \infty} \frac{m(u)}{u} = \infty,$$

то можно считать, что $m(u)>Bu$, начиная с некоторого $u_0\geqslant 0$. Для простоты записей будем считать, что $u_0=0$. Учитывая, что $d\mu\leqslant 0$, имеем:

$$\int_0^{2\pi}\alpha(\Theta)\,d\nu=\int_0^{2\pi}\alpha(\Theta)\,[u(\Theta)\,d\Theta+d\mu]\leqslant\int_0^{2\pi}\alpha(\Theta)\,u(\Theta)\,d\Theta\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^{2\pi}\alpha(\Theta)\,u^+(\Theta)\,d\Theta\leqslant\frac{1}{B}\int_0^{2\pi}m[u^+(\Theta)]\,\alpha(\Theta)\,d\Theta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{B}\max_{\Theta\in[0,\,2\pi]}\alpha(\Theta)\int_0^{2\pi}m[u^+(\Theta)]\,d\Theta\leqslant\frac{1}{B}\max_{\Theta\in[0,\,2\pi]}\alpha(\Theta),$$

т. е. верхняя грань конечна. Лемма доказана полностью.

Будем предполагать, что функция $m(u)$ обладает непрерывной производной $m'(u)=p(u)$. Из определения N-функции следует, что $p(u)$ неубывающая функция, удовлетворяющая условию $p(0)=0$ $\lim\limits_{u\to+\infty}p(u)=\infty$. Через $q(u)$ обозначим функцию, обратную $p(u)$. Она также будет неубывающей и удовлетворяет условию $q(0)=0$ $\lim\limits_{u\to+\infty}q(u)=\infty$.

Лемма 2. *Если* $\alpha(\Theta)\geqslant 0$ *непрерывна на* $[0, 2\pi]$ *и* $\alpha(\Theta)\not\equiv 0$, *то существует такое постоянное число* $k^*>0$, *что*

$$\int_0^{2\pi}m\left[q\left(k^*\alpha(\Theta)\right)\right]d\Theta=1. \tag{7}$$

Доказательство. Доказательство очевидно, ибо функция $m[q(t)]$ непрерывна и удовлетворяет условию $m[q(0)]=0$ и $\lim\limits_{t\to+\infty}m[q(t)]=\infty$. Отсюда следует, что функция

$$Q(k)=\int_0^{2\pi}m\left[q\left(k\alpha(\Theta)\right)\right]d\Theta$$

является непрерывной возрастающей от k для $k\geqslant 0$ при любой фиксированной непрерывной $\alpha(\Theta)\geqslant 0$ и $\alpha(\Theta)\not\equiv 0$. Причем $Q(0)=0$ и $\lim\limits_{k\to\infty}Q(k)=\infty$.

Следовательно существует такое k^*, что имеет место равенство (7).

Лемма 3. 1. *Если* $\alpha(\Theta)\geqslant 0$ *и* $\alpha(\Theta)\not\equiv 0$ *непрерывна на* $[0, 2\pi]$, *то для верхней грани* (6) *имеем:*

$$\sup_{\nu\in\Sigma}\int_0^{2\pi}\alpha(\Theta)\,d\nu=\int_0^{2\pi}\alpha(\Theta)\,q\,[k^*\alpha(\Theta)]\,d\Theta, \tag{8}$$

где k^* *определяется равенством* (7).

2. *Верхняя грань* (6) *достигается для мер* $d\nu^*$, *имеющих следующее устройство*

$$d\nu^*=q\,[k^*\alpha(\Theta)]\,d\Theta+d\mu, \tag{9}$$

где абсолютно-непрерывная часть меры $d\nu^*$ *определяется однозначно, а сингулярная компонента сосредоточена только на множестве корней уравнения* $\alpha(\Theta)=0$, *и только для таких мер.*

Доказательство. Вначале докажем равенство (8). Функция $q[k^*\alpha(\Theta)]$ непрерывна на $[0, 2\pi]$, а поэтому суммируема, и, следовательно, учитывая (7), мера $d\nu = q[k^*\alpha(\Theta)]\, d\Theta \in \Sigma$. Поэтому

$$\int_0^{2\pi} q[k^*\alpha(\Theta)]\,\alpha(\Theta)\,d\Theta \leqslant \sup_{\nu\in\Sigma}\int_0^{2\pi}\alpha(\Theta)\,d\nu. \tag{10}$$

С другой стороны, используем неравенство Юнга, для любой меры $d\nu\in\Sigma$. Обозначим через $n(v)$ функцию, дополнительную для $m(u)$ (см. [7]). Имеем:

$$\int_0^{2\pi}\alpha(\Theta)\,d\nu = \int_0^{2\pi}\alpha(\Theta)[u(\Theta)\,d\Theta + d\mu] \leqslant \frac{1}{k^*}\int_0^{2\pi}k^*\alpha(\Theta)\,u(\Theta)\,d\Theta \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{k^*}\int_0^{2\pi}k^*\alpha(\Theta)\,u^+(\Theta)\,d\Theta \leqslant \frac{1}{k^*}\left\{\int_0^{2\pi}m[u^+(\Theta)]\,d\Theta +\right.$$
$$\left. + \int_0^{2\pi}n[k^*\alpha(\Theta)]\,d\Theta\right\} \leqslant \frac{1}{k^*}\left\{1 + \int_0^{2\pi}n[k^*\alpha(\Theta)]\,d\Theta\right\} =$$
$$= \frac{1}{k^*}\left\{\int_0^{2\pi}m\left[q\left(k^*\alpha(\Theta)\right)\right]d\Theta + \int_0^{2\pi}n[k^*\alpha(\Theta)]\,d\Theta\right\} =$$
$$= \frac{1}{k^*}\int_0^{2\pi}k^*\alpha(\Theta)\,q[k^*\alpha(\Theta)]\,d\Theta = \int_0^{2\pi}\alpha(\Theta)\,q[k^*\alpha(\Theta)]\,d\Theta. \tag{11}$$

Так как это неравенство справедливо для любой меры $d\nu\in\Sigma$, то

$$\sup_{\nu\in\Sigma}\int_0^{2\pi}\alpha(\Theta)\,d\nu \leqslant \int_0^{2\pi}\alpha(\Theta)\,q[k^*\alpha(\Theta)]\,d\Theta. \tag{12}$$

Сравнивая (10) и (12), получаем требуемое равенство (8). Докажем второе утверждение.

Пусть $d\nu^*$ – экстремальная мера, имеющая вид (5). Для любой меры $d\nu\in\Sigma$, в том числе и для $d\nu^*$ имеет место неравенство

$$\int_0^{2\pi}\alpha(\Theta)\,d\nu \leqslant \int_0^{2\pi}\alpha(\Theta)\,u(\Theta)\,d\Theta.$$

Для экстремальной меры $d\nu^*$ должно быть равенство, т. е.

$$\int_0^{2\pi}\alpha(\Theta)\,d\nu^* = \int_0^{2\pi}\alpha(\Theta)\,u^*(\Theta)\,d\Theta.$$

Но оно возможно в том и только в том случае, когда сингулярная компонента меры $d\nu^*$ сосредоточена на множестве нулей функции $\alpha(\Theta)$.

Покажем теперь, что абсолютно-непрерывная часть экстремальной меры определяется единственным образом и равна $q\,[k^*\alpha\,(\Theta)]$. Предположим, что существует функция $u^*(\Theta) \neq q[{}_k{}^*\alpha(\Theta)]$, которая является абсолютно-непрерывной частью экстремальной меры. Неравенства (11) будут иметь место и для этой функции $u^*(\Theta)$, а т. к.

$$\int_0^{2\pi}\alpha(\Theta)\,u^*(\Theta)\,d\Theta = \int_0^{2\pi}q[k^*\alpha(\Theta)]\,\alpha(\Theta)\,d\Theta,$$

то в неравенстве (11) всюду будет иметь место равенство. Тогда из равенства

$$\int_0^{2\pi} u^*(\Theta)\, k^*\alpha(\Theta)\, d\Theta = \int_0^{2\pi} m\,[u^*(\Theta)]\, d\Theta + \int_0^{2\pi} n\,[k^*\alpha(\Theta)]\, d\Theta,$$

заключаем, что $u^*(\Theta) = q\,[k^*\alpha(\Theta)]$ (случай равенства в неравенстве Юнга). Следовательно, абсолютно-непрерывная часть экстремальной меры определяется единственным образом.

Второе утверждение доказано.

Из наших рассуждений видно также, что любая мера $d\nu^* = q\,[k^*\alpha(\Theta)]d\Theta + d\mu(\Theta)$, где $d\mu(\Theta)$ — сосредоточена на множестве корней $\alpha(\Theta)$ — экстремальная для (6).

§ 3. Классы P_m и A_m^0. Экстремальные задачи в этих классах

Введем ниже P_m класс функций $\rho(z)$, имеющих вид

$$\rho(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\Theta}+z}{e^{i\Theta}-z}\, d\nu, \tag{13}$$

где $\nu \in \Sigma$.

Параметрическое представление (3) для функций класса A_m^1 можно переписать теперь так:

$$f(z) = e^{i\lambda} \cdot B(z)\, e^{\rho(z)}, \tag{14}$$

где λ — вещественная константа, $B(z)$ — произведение Бляшке, а $\rho(z) \in P_m$.

Через A_m^0 будем обозначать подкласс A_m^1, состоящий из функций вида $f(z) = e^{\rho(z)}$, где $\rho(z) \in P_m$. Таким образом A_m^0 состоит из тех функций класса A_m^1, которые не обращаются в нуль в единичном круге и имеют нормировку $f(0) > 0$.

Лемма 4. *Класс P_m выпуклый.*

Доказательство. Пусть мера $d\nu_1 = u_1(\Theta)\, d\Theta + d\mu_1 \in \Sigma$ и мера $d\nu_2 = u_2(\Theta)\, d\Theta + d\mu_2 \in \Sigma$. Покажем, что мера $d\,[t\nu_1 + (1-t)\,\nu_2] \in \Sigma$, для любого t, $0 < t < 1$. Для этого достаточно показать, что функция $u_1(\Theta) + (1-t)\, u_2(\Theta)$ удовлетворяет условию (4). Функция $m(u)$ выпуклая, поэтому $m\,[tu_1(\Theta) + (1-t)\, u_2(\Theta)] \leqslant tm\,[u_1(\Theta)] + (1-t)m\,[u_2(\Theta)]$. Откуда, учитывая (4), получаем

$$\int_0^{2\pi} m\,[tu_1(\Theta) + (1-t)\, u_2(\Theta)]\, d\Theta \leqslant 1.$$

Отсюда сейчас же следует, что если $\rho_1(z) \in P_m$ и $\rho_2(z) \in P_m$, то функция $\rho(z) = t\rho_1(z) + (1-t)\,\rho_2(z) \in P_m$. Лемма доказана.

Пусть z_0 — точка внутри единичного круга, а $n \geqslant 1$ заданное целое число. Введем в рассмотрение множество $w(P_m)$.

Определение. Через $w(P_m)$ обозначим множество точек вида:

$$\left(\rho(z_0),\ \rho'(z_0),\ \ldots,\ \rho^{(n-1)}(z_0)\right), \tag{15}$$

где $\rho(z)$ пробегает класс P_m.

Если $z_0 \neq 0$, то множество $w(P_m)$ рассматривается в n-мерном комплексном пространстве C^n, которое нам часто удобнее трактовать, как вещественное $2n$-мерное пространство R^{2n}. Если $z_0=0$, то множество $w(P_m)$ будет рассматриваться в вещественном $(2n-1)$-мерном пространстве R^{2n-1}, ибо теперь $\rho(0)$ — всегда вещественно.

В следующей теореме рассматривается устройство множества $w(P_m)$.

Теорема 1. 1. *Множество $w(P_m)$ является выпуклым и содержит внутренние точки.*

2. *Множество $w(P_m)$ — замкнутое.*

3. *Множество $w(P_m)$ — неограниченное, причем, если точка $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_n) \in w(P_m)$ удаляется в бесконечность, то $\operatorname{Re} \zeta_1 \to -\infty$.*

Доказательство. 1. Выпуклость множества $w(P_m)$ следует из леммы 4.

Предположим, что множество $w(P_m)$ не содержит внутренних точек. Это означает, что найдется гиперплоскость

$$\operatorname{Re} \sum_{1}^{n} \gamma_k \zeta_k = d, \tag{16}$$

которая содержит выпуклое множество $w(P_m)$. (Мы ведем рассуждения для случая $z_0 \neq 0$.)

Пусть $\alpha_1(\Theta), \ldots, \alpha_n(\Theta)$ — соответственно ядро Шварца и его последовательные до $(n-1)$ порядка производные по z в точке z_0. Тогда функция

$$\rho(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \alpha_1(\Theta)\, d\nu$$

с $\nu \in \Sigma$ принадлежит P_m, а точка, координаты которой $\zeta_k = \rho^{(k-1)}(z_0)$, $k=1, \ldots, n$, принадлежит $w(P_m)$, а, следовательно, по предположению и гиперплоскости (16). Поэтому

$$\int_{0}^{2\pi} \operatorname{Re} \left[\sum_{1}^{n} \gamma_k \alpha_k(\Theta) \right] d\nu = d \tag{17}$$

для всех $d\nu \in \Sigma$.

По лемме 1 функция

$$\alpha(\Theta) = \operatorname{Re} \sum_{1}^{n} \gamma_k \alpha_k(\Theta)$$

неотрицательна на $[0, 2\pi]$. Покажем, что $\alpha(\Theta) \equiv 0$.

Предположим противное: в некоторой точке Θ_0 будет $\alpha(\Theta_0) > 0$. В силу непрерывности $\alpha(\Theta)$ найдется такая окрестность δ точки Θ_0, что $\alpha(\Theta) > 0$ в этой окрестности.

Пусть $d\nu = u(\Theta)\, d\Theta + d\mu \in \Sigma$. Тогда мера $d\nu_1 = u_1(\Theta)\, d\Theta + d\mu$, где

$$u_1(\Theta) = \begin{cases} u(\Theta) - \varepsilon, & \text{для } \delta \text{ окрестности точки } \Theta_0,\ \varepsilon > 0, \\ u(\Theta) & \text{в остальных точках,} \end{cases}$$

также принадлежит Σ.

Ясно, что

$$\int_0^{2\pi} \alpha(\Theta)\, d\nu_1 < \int_0^{2\pi} \alpha(\Theta)\, d\nu = d,$$

т. е. нашлась мера $d\nu_1 \in \Sigma$, для которой равенство (17) не имеет места. Получим противоречие и поэтому $\alpha(\Theta) \equiv 0$. Из линейной независимости ядра Шварца и его последовательных производных следует, что равенство

$$\mathrm{Re} \sum_1^n \gamma_k \alpha_k(\Theta) \equiv 0$$

возможно лишь в случае $\gamma_1 = \gamma_2 = \quad = \gamma_n = 0$. Но этого не может быть в уравнении гиперплоскости. Получилось противоречие. Первое утверждение теоремы доказано.

2. Докажем, что множество $w(P_m)$ замкнутое. Пусть последовательность точек $\{(\zeta_1^{(s)}, \quad \zeta_n^{(s)})\} \in w(P_m)$ сходится к точке $(\zeta_1, \quad \zeta_n)$. Через $\{\rho_s(z)\}$ обозначим последовательность функций из P_m, которая порождает указанную выше последовательность точек. Очевидно $f_s(z) = e^{\rho_s(z)} \in A_m^0$. Можно считать, что последовательность $\{f_s(z)\}$ равномерно сходится внутри круга $|z| < 1$ либо к функции $f(z) \in A_m^0$, либо к $f(z) \equiv 0$. Последнего случая быть не может, ибо тогда бы $\mathrm{Re}\, \rho_s(z) \to -\infty$, а у нас $\mathrm{Re}\, \rho_s(z_0) \to \zeta_1$. Значит, $f(z) = e^{\rho(z)}$, где $\rho(z) \in P_m$, причем последовательность $\{\rho_s(z)\}$ сходится к $\rho(z)$. Отсюда вытекает, что $\rho(z)$ порождает точку $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, и, следовательно, эта точка принадлежит $w(P_m)$. Второе утверждение теоремы доказано.

3. Неограниченность $w(P_m)$ очевидна. Действительно, функции $u(\Theta)$, входящие в устройство меры $d\nu \in \Sigma$, могут быть отрицательными и сколь угодно большими по абсолютной величине. Отсюда следует, что первая координата ζ_1 неограничена, а, следовательно, и тело $w(P_m)$ неограничено. Можно показать больше, а, именно, если точка $(\zeta_1, \zeta_2, \quad \zeta_n) \in w(P_m)$ удаляется в бесконечность, то $\mathrm{Re}\, \zeta_1 \to -\infty$. Если последовательность точек $\{\zeta_1^{(s)}, \zeta_2^{(s)}, \ldots, \zeta_n^{(s)}\} \in w(P_m)$ удаляется в бесконечность, то последовательность функций $\{f_s(z) = e^{\rho_s(z)}\}$ должна сходиться к $f(z) \equiv 0$. Иначе, приведенные выше рассуждения показали бы, что последовательность $\{(\zeta_1^{(s)}, \zeta_2^{(s)}, \ldots, \zeta_n^{(s)})\}$ сходится к конечной точке. Но если $f_s(z) \to 0$, то $\mathrm{Re}\, \zeta_1^{(s)} = \mathrm{Re}\, \rho_s(z_0) = \ln |f_n(z_0)| \to -\infty$.

Таким образом доказано, что множество $w(P_m)$ представляет собой выпуклое, неограниченное, замкнутое тело.

Перейдем к изучению границы тела $w(P_m)$. Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 5. *Если*

$$\alpha_1(\Theta), \ \alpha_2(\Theta), \quad \alpha_n(\Theta) \tag{18}$$

соответственно ядро Шварца и его последовательные производные по z до $(n-1)$ порядка, взятые при $z = z_0$, то система (18) *есть система Чебышева на* $[0, 2\pi]$.

Доказательство. Введем новое переменное $t = e^{i\Theta}$ и обозначим $\alpha_k(\Theta) = \alpha_k(t)$, $(k = 1, \quad n)$. Тогда

$$\alpha_1(t) = \frac{t + z_0}{t - z_0} \quad \alpha_2(t) = \frac{2t}{(t - z_0)^2}\ ; \qquad \alpha_n(t) = \frac{2t\,(n-1)!}{(t - z_0)^n}. \tag{19}$$

Мы должны доказать, что любой многочлен

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k \alpha_k(t) \tag{20}$$

имеет не более $(n-1)$ различных корней на окружности $|t|=1$.

Используя (19), многочлен (20) запишем в виде

$$\frac{\gamma_1 t(t-z_0)^{n-1}+\gamma_1 z_0(t-z_0)^{n-1}+2\gamma_2 t(t-z_0)^{n-2}+\ldots+2(n-1)!\,\gamma_n t}{(t-z_0)^n}=$$

$$=\frac{\gamma_1 t^n+(2z_0\gamma_1-nz_0\gamma_1+2\gamma_2)t^{n-1}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot z_0^n\cdot\gamma_1}{(t-z_0)^n}.$$

В числителе стоит алгебраический многочлен степени не выше n. Пусть $\gamma_1\neq 0$ и указанный многочлен имеет на окружности $|t|=1$ n корней: $t_1, \ldots t_n$. По теореме Виета $|t_1 t_2 \ldots t_n|=|z_0|^n$, чего быть не может, ибо $|z_0|<1$. Таким образом, если $\gamma_1\neq 0$, то многочлен имеет на окружности не более $(n-1)$ корней. Если же $\gamma_1=0$, то многочлен имеет степень не более $(n-1)$, поэтому он также имеет не более $(n-1)$ корней. Следовательно, при любом γ_1 многочлен $P_n(t)$ имеет не более $(n-1)$ корней на окружности $|t|=1$, т. е. система (18) есть система Чебышева. Лемма доказана.

Теорема 2. *Каждой граничной точке* $(\zeta^*)=(\zeta_1^*, \ldots, \zeta_n^*)$ *тела* $w(P_m)$ *соответствует единственная мера* $d\nu^*\in\Sigma$, *имеющая вид*

$$d\nu^*=q[\alpha(\Theta)]\,d\Theta+d\mu, \tag{21}$$

где

$$\int_0^{2\pi} m\left[q\left(\alpha(\Theta)\right)\right]d\Theta=1, \tag{22}$$

$$\alpha(\Theta)=\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\alpha_k(\Theta)\geqslant 0, \tag{23}$$

причем коэффициенты γ_k *определяются точкой* (ζ^*) *при условии* (22) *однозначно. Мера* $d\mu\leqslant 0$ *сосредоточена на множестве корней уравнения* $\alpha(\Theta)=$ $=0$, *число которых не превышает* n, *если* $z_0\neq 0$ *и* $n-1$, *если* $z_0=0$.

Обратно, всякой мере $d\nu^*$ вида (21), где $\alpha(\Theta)$ и $d\mu$ удовлетворяют описанным условиям, отвечает граничная точка тела $w(P_m)$.

Доказательство. Пусть (ζ^*) – граничная точка тела $w(P_m)$. Через эту точку можно провести опорную гиперплоскость π, заданную уравнением

$$\mathrm{Re}\sum_{1}^{n}\gamma_k\zeta_k=d. \tag{24}$$

Так как тело $w(P_m)$ лежит по одну сторону от гиперплоскости π, то можно считать, что для любой точки $(\zeta)\in w(P_m)$ выполняется неравенство

$$\mathrm{Re}\sum_{1}^{n}\gamma_k\zeta_k\leqslant d. \tag{25}$$

Пусть, как и выше, $\alpha_1(\Theta)$, $\alpha_2(\Theta)$, ..., $\alpha_n(\Theta)$ — соответственно ядро Шварца и его последовательные производные до $(n-1)$ порядка. Для координат точек $(\zeta)\in w(P_m)$ имеем представление

$$\zeta_k=\rho^{(k-1)}(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha_k(\Theta)\,d\nu,\qquad d\nu\in\Sigma. \tag{26}$$

Отсюда следует, что

$$\mathrm{Re}\sum_1^n\gamma_k\zeta_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\mathrm{Re}\sum_1^n\gamma_k\alpha_k(\Theta)\right]d\nu=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha(\Theta)\,d\nu\leqslant d. \tag{27}$$

Для граничной точки (ζ^*) неравенство (25), а, следовательно, и (27) переходит в равенство. Поэтому

$$\sup_{\nu\in\Sigma}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha(\Theta)\,d\nu=d, \tag{28}$$

т. е. верхняя грань конечна и достигается на мерах, соответствующих точке (ζ^*). По лемме 1 $\alpha(\Theta)\geqslant 0$ на $[0, 2\pi]$. По лемме 3 мера $d\nu^*$, соответствующая граничной точке (ζ^*), имеет вид (21), причем можно считать, что выполняется условие (22) (иначе все коэффициенты в уравнении (24) умножили бы на соответствующее число k^*), и мера $d\mu$ сосредоточена на множестве корней многочлена $\alpha(\Theta)$, имеющего вид (23). Из леммы 3 следует, что абсолютно-непрерывная часть меры $d\nu^*$ определяется однозначно. Покажем, что и сингулярная компонента $d\mu$ также определяется однозначно. Для этого надо показать, что атомы меры $d\mu$ в корнях многочлена $\alpha(\Theta)$ определяются однозначно. Из формул (19) и (20) следует, что

$$\alpha(\Theta)=\mathrm{Re}\sum_1^n\gamma_k\alpha_k(t)=\frac{T_n(t)}{|t-z_0|^{2n}}\qquad t=e^{i\Theta}. \tag{29}$$

Если $z_0\neq 0$, то $T_n(t)=T_n(\Theta)$ — неотрицательный тригонометрический многочлен порядка не выше n, имеющий не более чем n различных нулей на $[0, 2\pi]$. Если $z_0=0$, то $T_n(\Theta)$ — тригонометрический многочлен порядка не выше $n-1$. Рассматриваем далее для определенности случай $z_0\neq 0$. Пусть t_1, ..., t_s, $s\leqslant n$ нули многочлена $T_n(t)$, а μ_1, μ_s — атомы меры $d\mu$ в этих нулях.

По лемме 5 система (18) есть система Чебышева, поэтому для фиксированного t_j, $j=1$, ..., s можно построить многочлен

$$R_j(t)=\sum_1^n\gamma_k^j\alpha_k(t),$$

удовлетворяющий следующим интерполяционным условиям:

$$R_j(t_j)=1,\quad R_j(t_k)=0,\quad k=1,\ \dots,\ s,\ k\neq j. \tag{30}$$

Тогда, очевидно, для многочлена $R_j(t)$, удовлетворяющего условиям (30), имеем:

$$\int_0^{2\pi}R_j(t)\,d\mu=\mu_j,$$

Точка (ζ^*) определяет однозначно числа c_k:

$$c_k = \int_0^{2\pi} \alpha_k(t)\,d\mu = \int_0^{2\pi} \alpha_k(\Theta)\,d\nu^* - \int_0^{2\pi} q[\alpha(\Theta)]\,\alpha_k(\Theta)\,d\Theta =$$

$$= \zeta_k^* - \int_0^{2\pi} q[\alpha(\Theta)]\,\alpha_k(\Theta)\,d\Theta, \qquad k=1,$$

Поэтому

$$\int_0^{2\pi} R_j(t)\,d\mu = \mu_j = \sum_1^n \gamma_k^j c_k, \tag{31}$$

и атомы μ_j — определены однозначно (ведь $R_j(t)$ не зависит от меры μ).

Итак, мера $d\nu^*$, отвечающая граничной точке (ζ^*), определена однозначно. Теперь легко понять, что и коэффициенты γ_k определены однозначно.

Докажем обратное утверждение теоремы.

Пусть мера $d\nu^*$ имеет вид (21) и удовлетворяет всем условиям, указанным в теореме. По лемме 3 эта мера является экстремальной для задачи

$$\sup_{\nu\in\Sigma} \int_0^{2\pi} \alpha(\Theta)\,d\nu$$

с $\alpha(\Theta)$ вида (23).

Если точка (ζ^*) соответствует мере $d\nu^*$, то гиперплоскость

$$\mathrm{Re} \sum_1^n \gamma_k \zeta_k = \mathrm{Re} \sum_1^n \gamma_k \zeta_k^*$$

будет опорной к нашему телу $w(P_m)$. Действительно, для любой точки $(\zeta)\in w(P_m)$ имеем:

$$\mathrm{Re} \sum_1^n \gamma_k \zeta_k = \int_0^{2\pi} \left[\mathrm{Re} \sum_1^n \gamma_k \alpha_k(\Theta)\right] d\nu = \int_0^{2\pi} \alpha(\Theta)\,d\nu \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(\Theta)\,d\nu^* = \mathrm{Re} \sum_1^n \gamma_k \zeta_k^*.$$

Следовательно, точка (ζ^*) — граничная точка тела $w(P_m)$. Теорема полностью доказана.

Теорема 3. *Пусть $z_0 \neq 0$. Каждой точке (ζ^*) тела $w(P_m)$ соответствует в P_m единственная функция $\rho^*(z)$ вида:*

$$\rho^*(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\Theta}+z}{e^{i\Theta}-z}\, q\left[a\, \frac{\prod_1^n |1-\bar{\alpha}_k e^{i\Theta}|^2}{|e^{i\Theta}-z_0|^{2n}}\right] d\Theta + \Sigma \mu_j \frac{\alpha_j+z}{\alpha_j-z} \tag{32}$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ некоторые точки в круге $|z| \leqslant 1$, среди которых могут быть и одинаковые. Σ распространяется на те α_j, для которых $|\alpha_j| = 1$, все $\mu_j \leqslant 0$. Константа a подобрана так, чтобы

$$\int_0^{2\pi} m\left[q\left(a\,\frac{\prod\limits_1^n |1-\bar{\alpha}_k e^{i\Theta}|^2}{|e^{i\Theta}-z_0|^{2n}}\right)\right] d\Theta = 1. \tag{33}$$

Доказательство. По предыдущей теореме, каждой граничной точке (ζ^*) тела $w(P_m)$ соответствует единственная мера $d\nu^*$, имеющая устройство, описанное в теореме 2. Каждой мере $d\nu^*$ соответствует единственная функция $\rho(z) \in P_m$ вида:

$$\rho(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\Theta}+z}{e^{i\Theta}-z}\, d\nu^*. \tag{34}$$

Преобразуем $d\nu^*$. Вспомним, что

$$\alpha(\Theta) = \operatorname{Re}\sum_{k=1}^n \gamma_k \alpha_k(\Theta) = \frac{T_n(\Theta)}{|e^{i\Theta}-z_0|^{2n}} \geqslant 0. \tag{35}$$

По теореме Фейера (см., например, [6]), утверждающей, что всякий неотрицательный на окружности $|z| = 1$ тригонометрический многочлен $T_n(\Theta)$ является квадратом модуля алгебраического многочлена, все корни которого можно считать лежащими в области $|z| \geqslant 1$, имеем $T_n(\Theta) = |g(e^{i\Theta})|^2$, где

$$g(z) = a\prod_1^n (1-\bar{\alpha}_k z), \tag{36}$$

где $a > 0$, $|\alpha_k| \leqslant 1$, $k = 1, \ldots, n$. Здесь $\frac{1}{\bar{\alpha}_k}$, $k = 1, \quad n$ — корни многочлена $g(z)$, а число a выбрано так, чтобы

$$\int_0^{2\pi} m\left[q\left(a\alpha(\Theta)\right)\right] d\Theta = 1.$$

Из формул (21), (35) и (36) имеем:

$$d\nu^* = q\left[a\,\frac{\prod\limits_1^n |1-\bar{\alpha}_k e^{i\Theta}|^2}{|e^{i\Theta}-z_0|^{2n}}\right] d\Theta + d\mu. \tag{37}$$

По теореме 2 мера $d\mu$ сосредоточена на множестве корней уравнения $\alpha(\Theta) = 0$, поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\Theta}+z}{e^{i\Theta}-z}\, d\mu = \Sigma\mu_j\,\frac{\alpha_j+z}{\alpha_j-z}. \tag{38}$$

Из формул (34), (37) и (38) получаем вид $\rho(z)$, указанный в теореме.

Замечание. В случае $z_0 \neq 0$ не всякой функции вида (32) соответствует граничная точка тела $w(P_m)$. В самом деле, множество функций вида (32) совпадает с множеством тех функций, у которых в представлении (5)

$$u(\Theta)=\alpha(\Theta)=\operatorname{Re}\sum_{1}^{n}\gamma_k\alpha_k(\Theta)\geqslant 0.$$

Всякое такое $\alpha(\Theta)$ имеет вид (29), но однако не всякая функция вида (29) совпадает с некоторым $\alpha(\Theta)$. Это видно хотя бы из того, что система $\alpha_1(\Theta)$ $\ldots\alpha_n(\Theta)$ есть система n линейно-независимых комплексных функций, вещественные и минимые части которых дают $2n$ линейно-независимых функций. Поэтому совокупность различных $\alpha(\Theta)$ есть конус положительных функций, высекаемый из многообразия размерности $2n$. В то же время вещественные тригонометрические многочлены порядка n образуют многообразие размерности $2n+1$ (оно натянуто на функции $1, \cos\Theta, \sin\Theta, \ldots, \cos n\Theta, \sin n\Theta$), и положительные тригонометрические многочлены дают конус в этом многообразии.

В случае $z_0=0$ имеем более полный результат.

Теорема 4. *Пусть $z_0=0$. Каждой граничной точке (ζ^*) тела $w(P_m)$ соответствует в P_m единственная функция $\rho^*(z)$ вида:*

$$\rho^*(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\Theta}+z}{e^{i\Theta}-z}\,q\left[a\prod_{1}^{n-1}|1-\bar{\alpha}_k e^{i\Theta}|^2\right]d\Theta+\Sigma\mu_j\frac{\alpha_j+z}{\alpha_j-z}, \tag{39}$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ — некоторые точки в круге $|z|\leqslant 1$, среди которых могут быть и одинаковые. Σ распространяется на те α_j, для которых $|\alpha_j|=1$, все $\mu_j\leqslant 0$. Константа a подобрана так, чтобы

$$\int_0^{2\pi} m\left[q\left(a\prod_{1}^{n-1}|1-\bar{\alpha}_k e^{i\Theta}|^2\right]d\Theta=1. \tag{40}$$

Обратно всякой функции вида (39) соответствует в $w(P_m)$ граничная точка.

Доказательство. Надо доказать только вторую часть теоремы, ибо первая доказывается так же, как теорема 3.

В нашем случае система (19) имеет вид:

$$\alpha_1(\Theta)=1,\ \alpha_2(\Theta)=2e^{-i\Theta},\qquad \alpha_n(\Theta)=2(n-1)!\,e^{-i(n-1)\Theta}.$$

Так как $\alpha_1(\Theta)=1$ — действительное число, то вещественные и мнимые части этих функций образуют то же многообразие размерности $2n-1$, что и тригонометрические многочлены порядка $n-1$. Поэтому множество всех функций $\alpha(\Theta)=\operatorname{Re}\sum_{1}^{n}\gamma_k\alpha_k(\Theta)\geqslant 0$ совпадает со множеством неотрицательных тригонометрических полиномов порядка $(n-1)$. Каждый такой полином по теореме Фейера имеет представление

$$a\prod_{1}^{n-1}|1-\bar{\alpha}_k e^{i\Theta}|^2,$$

где

$$a>0,\ |\alpha_k|\leqslant 1,\ k=1,\qquad (n-1).$$

Отсюда следует, что каждой функции $\rho^*(z)$ вида (39) соответствует мера $d\nu^*$ вида (21), удовлетворяющая условиям теоремы 2. По теореме 2 этой мере будет отвечать граничная точка тела $w(P_m)$. Теорема доказана.

Теорема 3 может быть обобщена следующим образом.

Пусть в круге $|z|<1$ выбраны различные точки $z_1, \ldots, z_k$ и заданы натуральные числа $n_1, \ldots, n_k$, сумму которых обозначим через N, т. е. $n_1+n_2+ + \ldots + n_k = N$. Через $w_k(P_m)$ обозначим множество точек вида

$$\left(\rho(z_1), \quad \rho^{(n_1-1)}(z_1), \quad \rho(z_k) \ldots \rho^{(n_k-1)}(z_k)\right), \tag{41}$$

где $\rho(z) \in P_m$.

Теорема 3а. $W_k(P_m)$ *— неограниченное, замкнутое тело.*

Каждой граничной точке (ζ^*) *тела* $W_k(P_m)$ *соответствует в* P_m *единственная функция* $\rho^*(z)$ *вида*

$$\rho^*(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\Theta}+z}{e^{i\Theta}-z}\, q\left[a\,\frac{\prod_1^n |1-\bar{\alpha}_j e^{i\Theta}|^2}{\prod_1^k |e^{i\Theta}-z_j|^{2n_j}}\right] d\Theta + \Sigma \mu_j \frac{\alpha_j+z}{\alpha_j-z}, \tag{42}$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ *— некоторые точки в круге* $|z| \leqslant 1$, *среди которых могут быть и одинаковые.* Σ *распространяется на те* α_j, *для которых* $|\alpha_j|=1$, *все* $\mu_j \leqslant 0$. *Константа* a *подобрана так, чтобы*

$$\int_0^{2\pi} m\left[q\left(a\,\frac{\prod_1^N |1-\bar{\alpha}_j e^{i\Theta}|^2}{\prod_1^k |e^{i\Theta}-z|^{2n_j}}\right)\right] d\Theta = 1. \tag{43}$$

Непосредственным следствием теоремы 3а является следующая теорема о нелинейных экстремальных задачах.

Теорема 5. *Пусть* $u(c_1, \ldots, c_N)$ *непрерывная вещественная функция, заданная на множестве* $w_k(P_m)$, *которая достигает своей верхней грани лишь на границе этого множества. Тогда всегда в классе* P_m *существует экстремальная функция задачи*

$$\sup_{\rho \in P_m} u\left[\rho(z_1), \ldots, \rho^{(n_1-1)}(z_1), \ldots, \rho(z_k), \quad \rho^{(n_k-1)}(z_k)\right]$$

и любая экстремальная функция имеет вид (42).

Аналогичную теорему можно сформулировать и об

$$\inf_{\rho \in P_m} u\left[\rho(z_1), \quad \rho^{(n-1)}(z_1), \ldots, \rho(z_k), \ldots, \rho^{(n_k-1)}(z_k)\right],$$

ибо задача об $\inf u$ сводится к задаче о $\sup(-u)$.

В качестве $u(c_1, \ldots, c_N)$ можно брать, например, гармоническую в области $W_k(P_m)$ функцию. Если $\varphi(c_1, \ldots, c_N)$ — целая функция от своих аргументов, то в качестве $u(c_1, \ldots, c_N)$ можно взять $\operatorname{Re}\varphi(c_1, \ldots, c_N)$ или $|\varphi(c_1, c_N)|$ и т. п.

Рассмотрим экстремальные задачи в классах A_m^0.

Через $W_k(A_m^0)$ обозначим множество точек вида

$$\left(F(z_1),\ \ldots,\ F^{(n_1-1)}(z_1),\ \ldots,\ F(z_k),\ \ldots,\ F^{(n_k-1)}(z_k)\right), \tag{44}$$

где $F(z)\in A_m^0$, $n_1+\ldots+n_k=N$.

Множество $W_k(A_m^0)$ рассматривается в 2 N-мерном эвклидовом пространстве R_{2N}, если среди точек $z_1, \ldots, z_k$ нет нуля, и в R_{2N-1}, если $z_1=0$. Так как A_m^0 состоит из функций вида

$$F(z)=e^{\rho(z)},\quad \rho(z)\in P_m, \tag{45}$$

то, очевидно, точка $(0)=(0, \ldots, 0)\,\overline{\in}\, W_k(A_m^0)$.

Обозначим через $W_k'(A_m^0)=W_k(A_m^0)\cup(0)$.

Теорема 6. 1. $W_k'(A_m^0)$ *ограниченное замкнутое множество, содержащее внутренние точки (относительно* R_{2N} *или* R_{2N-1}*).*

2. *Каждой граничной точке* (ζ^*) *тела* $W_k'(A_m^0)$ *соответствуют лишь функции* $F^*(z)$ *вида*

$$F^*(z)=e^{\rho^*(z)}, \tag{46}$$

где $\rho^*(z)$ *описана в теореме 3а.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы очевидно. Докажем второе утверждение. Добавим к телу $W_k(P_m)$ несобственный элемент (∞), положив, что точка $(\zeta)\in W_k(P_m)$ стремится к ∞, если одновременно $\operatorname{Re}\zeta_1\to -\infty$; $\operatorname{Re}\zeta_{n_1+1}\to-\infty$, $\operatorname{Re}\zeta_{n_1+n_2+1}\to-\infty$ и т. д. Обозначим $W_k(P_m)\cup(\infty)=W_k'(P_m)$. С помощью формулы (45) получаем отображение множества $W_k'(P_m)$ на $W_k'(A_m^0)$, при котором $(\infty)\leftrightarrow(0)$. Соответствие между точками $(\eta)\in W_k'(A_m^0)$ и $(\zeta)\in W_k'(P_m)$ дается формулами

$$\begin{aligned}
&\eta_1=F(z_1)=e^{\rho(z_1)}=e^{\zeta_1},\\
&\eta_2=F'(z_1)=\rho'(z_1)\cdot e^{\rho(z_1)}=\zeta_2 e^{\zeta_1},\\
&\eta_3=F''(z_1)=\rho'^2(z_1)e^{\rho(z_1)}+\rho''(z_1)e^{\rho(z_1)}=(\zeta_2^2+\zeta_3)e^{\zeta_1},
\end{aligned} \tag{47}$$

Формулы (47) дают локально-гомеоморфное отображение $W_k^1(P_m)$ на $W_k'(A_m^0)$. Поэтому внутренние точки $W_k'(P_m)$ переходят во внутренние точки $W_k'(A_m^0)$, а граничные точки $W_k'(A_m^0)$ могут быть образами только граничных точек $W_k'(P_m)$. Осталось применить теорему 3а.

Из этой теоремы можно получить для класса A_m^0 результат о нелинейных экстремальных задачах, аналогичный теореме 4. Мы не будем его формулировать.

§ 4. Экстремальные задачи для класса A_m^1

Через $W_k(A_m^1)$ обозначим множество точек вида (44) с $F(z)\in A_m^1$.

Теорема 7. 1. $W_k(A_m^1)$ *ограниченное, замкнутое множество, содержащее внутренние точки. В частности, точка* (0) *— внутренняя точка для* $W_k(A_m^1)$.

2. *Каждой граничной точке* (ζ^*) *тела* $W_k(A_m^1)$ *соответствуют в* A_m^1 *только функции вида*

$$F^*(z)=e^{i\lambda}\prod_1^{N-1}\frac{z-\beta_j}{1-\bar\beta_j z}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\Theta}+z}{e^{i\Theta}-z}\,q\left[a\,\frac{\prod_1^N|1-\bar\alpha_j e^{i\Theta}|^2}{\prod_1^k|e^{i\Theta}-z_j|^{2n_j}}\right]d\Theta\right\},\tag{48}$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$, $\beta_1, \ldots, \beta_{N-1}$ *некоторые точки в круге* $|z|\leqslant 1$, *среди которых могут быть и одинаковые, константа* $a\geqslant 0$ *удовлетворяет условию* (43), λ — *действительное число.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы очевидно, докажем второе.

Любую функцию, принадлежащую A_m^1, можно представить в виде

$$F(z)=\Phi(z)\cdot B(z),\tag{49}$$

где $B(z)\in H_\infty^1$ (класс ограниченных единицей в круге аналитических функций), а $\Phi(z)\in A_m^0$. Обратно, всякое такое произведение входит в A_m^1. Рассмотрим множества $W_k(H_\infty^1)$ и $W_k(A_m^0)$. Из теории Каратеодори — Фейера — Неванлинна — Пика следует, что граничным точкам множества $W_k(H_\infty^1)$ отвечают только конечные произведения Бляшке вида

$$B^*(z)=e^{i\lambda}\prod_1^{N-1}\frac{z-\beta_j}{1-\bar\beta_j z}\tag{50}$$

(см., например, [2]).

Граничным точкам тела $W_k(A_m^0)$ отвечают функции $\Phi^*(z)$ вида (46) (по теореме 6).

С помощью формулы (49) построим отображение $W_k(H_\infty^1)\times W_k(A_m^0)$ на $W_k(A_m^1)$ следующим образом.

Для любой точки $(B_1, \ldots, B_{n_1}, \ldots, B_N)\in W_k(H_\infty^1)$ построим функцию $B(z)\in H_\infty^1$, для которой

$$B(z_1)=B_1,\ \ldots,\ B^{(n_1-1)}(z_1)=B_{n_1},\qquad B^{(n_k-1)}(z_k)=B_N.$$

Аналогично строим функцию $\Phi(z)\in A_m^0$, интерполирующую соответствующие значения

$$(\Phi_1,\ \ldots,\ \Phi_{n_1},\ \ldots,\ \Phi_N)\in W_k(A_m^0).$$

По функции $F(z)=B(z)\cdot\Phi(z)$ определим точку

$$\left(F_1=F(z_1),\ \ldots,\ F_{n_1}=F^{(n_1-1)}(z_1),\qquad F_N=F^{(n_k-1)}(z_k)\right)\in W_k(A_m^1).$$

Полученная точка не зависит от функций $\Phi(z)$ и $B(z)$, а только от точек $(B_1, \ldots, B_{n_1}, \ldots, B_N)\in W_k(H_\infty^1)$ и $(\Phi_1, \ldots, \Phi_{n_1}, \ldots, \Phi_N)\in W_k(A_m^0)$. Очевидно, получилось отображение $W_k(H_\infty^1)\times W_k(A_m^0)$ на все $W_k(A_m^1)$. Из формул

$$F_1=B_1\cdot\Phi_1,$$

$$F_2=B_2\Phi_1+B_1\cdot\Phi_2,$$

легко следует, что точка $(F_1^*, \ldots, F_{n_1}^*, \ldots, F_N^*)$ будет граничной в $W_k(H_m^1)$ лишь тогда, когда порождающие ее точки будут граничными в соответствующих множествах.

Пусть $F^*(z)$, $B^*(z)$, $\Phi^*(z)$ – функции, соответствующие граничным точкам в множествах $W_k(A_m^1)$, $W_k(H_\infty^1)$, $W_k(A_m^0)$ и $F^*(z)=B^*(z)\cdot\Phi^*(z)$, где $B^*(z)$ имеет вид (50), а $\Phi^*(z)$ вид (46). Покажем, что сингулярная компонента в $\Phi^*(z)$ отсутствует. Предположим противное, т. е.

$$\Phi^*(z)=\Phi_1^*(z)\cdot\exp\left(\Sigma\mu_j\,\frac{\alpha_j+z}{\alpha_j-z}\right),\qquad \mu_j\leqslant 0.$$

Объединим множитель $\exp\left(\Sigma\mu_j\,\frac{\alpha_j+z}{\alpha_j-z}\right)$ с функцией $B^*(z)$, получим новую ограниченную функцию

$$B_1^*(z)=B^*(z)\exp\left(\Sigma\mu_j\,\frac{\alpha_j+z}{\alpha_j-z}\right).$$

Причем снова функция

$$F^*(z)=B_1^*(z)\cdot\Phi_1^*(z),$$

где $B_1^*(z)\in H_\infty^1$, $\Phi_1^*(z)\in A_m^0$.

Так как функция $B_1^*(z)$ не есть конечное произведение Бляшке, то ей должна соответствовать внутренняя точка множества $W_k(H_\infty^1)$. Но тогда и функции $F^*(z)$ должна соответствовать внутренняя точка тела $W_k(H_\infty^1)$. Получили противоречие. Таким образом, в представлении $\Phi^*(z)$ нет сингулярного множителя. Следовательно, функция $F^*(z)$, соответствующая граничной точке (ζ^*) тела $W_k(H_m^1)$ имеет вид (48). Теорема доказана.

Непосредственным следствием теоремы 7 является следующая теорема.

Теорема 8. *Пусть $u(c_1, \ldots, c_N)$ – непрерывная вещественная функция, определенная на $W_k(A_m^1)$, которая достигает своей верхней грани только на границе множества $W_k(A_m^1)$. Тогда в классе A_m^1 любая экстремальная функция для задачи о*

$$\sup_{f\in A_m^1} u\left(f(z_1), \ldots, f^{(n_1-1)}(z_1), \ldots, f^{(n_k-1)}(z_k)\right)$$

имеет вид, указанный в теореме 7.

В заключение пользуюсь случаем выразить искреннюю благодарность профессору С. Я. Хавинсону за консультации.

Москва

Поступило в редакцию 11.X.1968

Литература

1. И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, Изд. первое, МГУ, 1941.
2. И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, Изд. второе. Гостехиздат, М.–Л., 1950.
3. Е. Д. Соломенцев, О некоторых классах субгармонических функций, Изв. АН СССР, серия матем., 1938, 571–582.
4. С. А. Гельфер и Л. В. Креснякова, Метод вариаций в теории аналитических функций с ограниченным средним модулем, Матем., сб., 67 (109), № 4, 1965, 570–585.

5. А. Н. Кочетков, О некоторых экстремальных задачах для аналитических функций с положительной вещественной частью, в сборнике Исследования по современным проблемам конструктивной теории функции, Баку, 1963.
6. Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, М.—Л., Гостехиздат, 1947.
7. М. А. Красносельский и Я. Б. Рутицкий, Выпуклые функции и пространства Орлича, Физматгиз, 1958.

EKSTREMALINIAI UŽDAVINIAI KAI KURIOSE APRĖŽTO PAVIDALO ANALIZINIŲ FUNKCIJŲ POKLASĖSE

V. Terpigoreva

(*Reziumė*)

Darbe nagrinėjami ekstremaliniai uždaviniai analizinių funkcijų klasėje A_m^1:

$$\int_0^{2\pi} m[\ln^+ |f(re^{i\Theta})|]\,d\Theta \leqslant 1, \qquad 0<r<1.$$

Čia $m(u)$ yra didėjanti iškila funkcija intervale $[0, \infty)$ ir

$$\lim_{u\to 0} \frac{m(u)}{u} = 0, \qquad \lim_{u\to=\infty} \frac{m(u)}{u} = \infty.$$

Klasėje A_m^1 ir jos poklasyje A_m^0 (sudarytoje iš funkcijų, neturinčių skritulyje nulių) surastas eksremalinių funkcijų pavidalas.

Darbe sprendžiami ekstremaliniai uždaviniai ir klasėje P_m, sudarytoje iš funkcijų, priklausančių klasei A_m^0, logaritmų.

EXTREMUM PROBLEMS IN SOME SUBCLASSES OF ANALYTICAL FUNCTIONS OF A LIMITED TYPE

V. Terpigoreva

(*Summary*)

Extremum problems for analytical functions of A_m^1 class are considered in this paper:

$$\int_0^{2\pi} m[\ln^+ |f(re^{i\Theta})|]\,d\Theta \leqslant 1, \qquad 0<r<1.$$

Here $m(u)$ is a growing convex function within $[0, \infty)$ for which

$$\lim_{u\to 0} \frac{m(u)}{u} = 0, \qquad \lim_{u\to+\infty} \frac{m(u)}{u} = \infty.$$

A type of extremum functions in this class and in its A_m^0 subclass is determined, the latter consisting of functions having no zeores gin the circle.

Extremum problems of P_m class consisting of logarithms of A_m^0 functions are also considered in the paper.

The body of coefficient functions of those classes and the boundary points of the bodies are also investigated in detail.