LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

1970

УДК – 519.21

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, СВЯЗАННЫХ В ЦЕПЬ МАРКОВА. III*.

В. А. Статулявичус

§ 4. Доказательство теорем 1 – 12

Доказательство теоремы 1 следует из асимптотического разложения для $f_{Z_n}(t)$, полученного в лемме 9, которое при $s=3$ и $|t| \leqslant \frac{\alpha^{(n)} B_n}{2H_2 C^{(n)}}$ выглядит так:

$$f_{Z_n}(t) = (1 + \Theta_3 |t|^3) e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Действительно, согласно теореме Эссеена ([65], § 39, теорема 1), если $F(x)$ и $G(x)$ – две функции распределения, с характеристическими функциями, $f(t)$, $g(t)$ соответственно, существует $G'(x)$ при всех x и $|G'(x)| \leqslant A$, то при любом $T>0$

$$|F(x) - G(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\pi} + \frac{24A}{\pi T}, \tag{4.1}$$

где

$$\varepsilon = \int_{-T}^{T} \frac{|f(t) - g(t)|}{|t|} dt$$

и для доказательства теоремы достаточно положить

$$T = \frac{\alpha^{(n)} B_n}{2 H_2 C^{(n)}}.$$

Доказательство теоремы 2 следует из того, что согласно лемме 6 существуют абсолютные константы $H_1 > 0$, $H_2 > 0$, такие что

$$|\Gamma_k\{S_n\}| \leqslant \frac{k!\, H_1 H_2^{k-2} C^{(n)\,k-2}}{\alpha^{(n)\,k-2}}, \qquad k=3,\ 4,$$

Поэтому, применив нашу лемму из [42] при $\xi = S_n$ находим, что для $F(x) = F_{S_n}(x)$ имеют место соотношения больших уклонений (1.4) при $H=H_1$, $m=0$, $\sigma_k = \Gamma_k\{S_n\}$, $\sigma = B_n$ и

$$\Delta = B_n \inf_{k \geqslant 3} \left(\frac{k!\, H_1 B_n^2}{|\Gamma_k\{S_n\}|} \right)^{\frac{1}{k-2}} = \frac{\alpha^{(n)} B_n}{H_2 C^{(n)}}.$$

Теорема 2 доказана.

* Продолжение. Начало (части I и II) с библиографией, резюме на литовском и английском языках и авторефератом в журнале „Литовский математический сборник", том IX, №№ 2–3 за 1969 г.

Доказательство теоремы 3 вполне аналогично доказательству теоремы 1, если воспользоваться неравенством (4.1) и доказательством леммы 11. Из (3.103′) и (3.101′) находим

$$\ln f_{Z'_n}(t) = \sum_{r=2}^{s} \frac{\Gamma_r\{S'_n\}}{r!}\left(\frac{it}{B_n}\right)^r + 4\Theta H_6^s |t|^{s+1} \rho^{(n)-1} L_{sn}, \tag{4.2}$$

$$f_{Z_n}(t) = f_{Z'_n}(t) + \Theta |t| \rho^{(n)s-1} L_{sn}, \tag{4.3}$$

при

$$|t| \leqslant \frac{\rho^{(n)}}{2\sqrt{2}H_6},$$

где

$$\rho^{(n)} = 2\sqrt{2}H_6 a \sqrt{\ln\left(1 + L_{sn}^{-\frac{1}{s-2}}\right)},$$

$a > 0$ — любое, H_6 — абсолютная константа, и, согласно (3.98),

$$\Gamma_r\{S'_n\} \leqslant r!\, H_0^{r-2} B_n^r L_{sn}^{\frac{r-2}{s-2}}, \qquad 3 \leqslant r \leqslant s. \tag{4.4}$$

Далее,

$$S'_n = \sum_{k=1}^{n} X'_k,$$

$$X'_k = \begin{cases} X_k & \text{если } |X_k| \leqslant C^{(n)}, \\ 0 & \text{при } |X_k| > C^{(n)}, \end{cases}$$

$$C^{(n)} = \frac{\alpha^{(n)} B_n}{\rho^{(n)}}.$$

Поэтому

$$\Gamma_2\{S'_n\} = D\{S'_n\} = B_n^2\left(1 + 24\Theta\rho^{(n)\frac{s-2}{2}} L_{sn}^{\frac{1}{2}}\right), \tag{4.5}$$

так как

$$DS''_n \leqslant \frac{16}{\alpha^{(n)} C^{(n)s-2}} \sum_{k=1}^{n} M|X_k|^s \leqslant 16 B_n^2 \rho^{(n)s-2} L_{sn}.$$

Из (4.2) – (4.5) выводим

$$\ln f_{Z'_n}(t) e^{\frac{t^2}{2}} = 1 + 2\Theta H_0(t) L_{sn}^{\frac{1}{s-2}}$$

или

$$|f_{Z'_n}(t)| = \left(1 + 2\Theta H_0(t) L_{sn}^{\frac{1}{s-2}}\right) e^{-\frac{t^2}{2}} \tag{4.6}$$

если только

$$|t| \leqslant \min\left\{ \frac{\rho^{(n)}}{2\sqrt{2}H_6},\ \frac{L_{sn}^{-\frac{1}{s-2}}}{2H_0} \right\}. \tag{4.7}$$

Из (4.3) и (4.6) получаем

$$|f_{Z_n}(t)| = \left(1 + 2\Theta H_0 |t| L_{sn}^{\frac{1}{s-2}}\right) e^{-\frac{t^2}{2}} + \Theta |t| \rho^{(n)s-1} L_{sn}. \tag{4.8}$$

Кроме того, согласно лемме 12,

$$|f_{Z_n}(t)| \leqslant e^{-\frac{t^2}{12\pi^2}} \quad \text{при } |t| \leqslant c L_{sn}^{-\frac{1}{s-2}} \tag{4.9}$$

где $c>0$ — абсолютная константа.

В (4.1) положим $T = c\, L_{sn}^{-\frac{1}{s-2}}$

Тогда (4.7) и (4.9) позволяют утверждать, что

$$\varepsilon \leqslant C_1 \left(L_{sn}^{\frac{1}{s-2}} + \rho^{(n)s} L_{sn}\right)$$

или

$$|F_{Z_n}(x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{C_1}{\pi} \left(L_{sn}^{\frac{1}{s-2}} + \rho^{(n)s} L_{sn}\right) + \frac{24}{\pi c} L_{sn}^{\frac{1}{s-2}}$$

где C_1 — абсолютная константа. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4 следует из соотношений (4.1), (4.9), (3.75) и из леммы 17, при $s=3$. Следует положить $T = cL_{3n}^{-1}$, так как

$$\tilde{L}_{3n} \geqslant L_{3n}.$$

Доказательство теоремы 5. После доказательства лемм 1—12, доказательство теорем об асимптотических разложениях проводится точно также, как и в [40], [41] для сумм независимых случайных величин. Если обозначить

$$p(x) = \frac{d}{dx}\, \Phi_{s-1,n}(x) = \varphi_{s-1,n}(x),$$

где $\Phi_{s-1,n}(x)$ определено в теореме 6 и

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x)\, dx = h_{s-1,n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + \sum_{\nu=1}^{s-3} P_\nu(it)\, L_{sn}^{\frac{\nu-2}{s-2}}\right)$$

(многочлены $P_{\nu n}(it)$ определены в лемме 10), то для любых $K > A > 0$ имеет место неравенство

$$\sup_x |p_{Z_n}(x) - p(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi} (I_1 + I_2 + I_3 + I_4),$$

$$\sup_x |F_{Z_n}(x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi} (\hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \hat{I}_3 + \hat{I}_4), \tag{4.10}$$

где

$$I_1 = \int_{|t| \leqslant A} |f_{Z_n}(t) - h(t)|\, dt, \quad I_2 = \int_{|t| > A} |h(t)|\, dt,$$

$$I_3 = \int_{A < |t| \leqslant K} |f_{Z_n}(t)|\, dt, \quad I_4 = \int_{K < |t| < \infty} |f_{Z_n}(t)|\, dt,$$

а $\hat{I}_i$ отличается от I_i только тем, что подынтегральная функция умножается на $|t|^{-1}$. Положим

$$A = \min\left\{a \ln^{\frac{1}{2}} \left(1 + \tilde{L}_{sn}^{-\frac{1}{s-2}}\right),\ \tilde{L}_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)}}\right\}, \quad a > 0, \quad K = c\, L_{sn}^{-\frac{1}{s-2}}$$

Тогда с помощью лемм 10 и 12 находим

$$I_1 + I_2 + I_3 = 2\pi\, \delta_s \tilde{L}_{sn}.$$

Аналогично

$$\tilde{I}_1+\tilde{I}_2+\tilde{I}_3=2\pi\delta_s'\tilde{L}_{sn}.$$

Осталось оценить I_4 и $\tilde{I}_4$.

Для любого набора

$$1\leqslant l_1<l_2< \quad <l_N=n$$

имеем

$$|f_{S_n}(t)|\leqslant \|f_{l_1}(t,\cdot)\| \prod_{p=1}^{N-1} \sup_{\omega_p} \|f_{l_p l_{p+1}}(t, \omega_p,\cdot)\|. \tag{4.11}$$

Пусть

$$l_p=2(p+3),\ p=1,\ 2, \quad N-1.$$

Поскольку

$$\|f_{kl}(t, \omega,\cdot)\|=M\left\{\left|f_{S_{kl}}(t\,|\,\tilde{F}_k\times\tilde{F}_l)\right|\ \Big|\ \xi(k)=\omega\right\}$$

и при любом b справедливо неравенство $b\leqslant 1-\frac{1}{2}(1-b^2)$, то

$$\|f_{kl}(t, \omega,\cdot)\|\leqslant \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(1-M\left\{\left|f_{S_{kl}}(t\,|\,\tilde{F}_k\times\tilde{F}_l)\right|^2\ \Big|\ \xi(k)=\omega\right\}\right)\cdot\right. \tag{4.12}$$

Как уже отмечалось при выводе следствия из леммы 2,

$$1-M\left\{\left|f_{S_{kl}}(t\,|\,\tilde{F}_k\times\tilde{F}_l)\right|^2\ \Big|\ \xi(k)=\omega\right\}=$$

$$=M\left\{D\left\{e^{itS_{kl}}\,|\,\tilde{F}_k\times\tilde{F}_l\right\}\,|\,\xi(k)=\omega\right\}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\alpha_{l-1,l}}{2}\,D\left\{e^{itS_{kl}}\ \Big|\ \xi(k)=\omega\right\}=\frac{\alpha_{l-1,l}}{2}\left(1-\left|f_{S_{kl}}\left(t\,|\,\xi(k)=\omega\right)\right|^2\right)\cdot \tag{4.13}$$

Учитывая подбор l_p и (4.11)–(4.13), находим

$$|f_{S_n}(t)|\leqslant \|f_8(t,\cdot)\|\exp\left\{-\frac{1}{4}\sum_{\substack{k\\9\leqslant 2k+1\leqslant n}}\alpha_{2k+2}\left(1-\sup\left|f_{X_{2k+1}}(t\,|\,\tilde{F}_{2k})\right|^2\right)\right.$$

или

$$|f_{S_n}(t)|\leqslant\prod_{i=1}^{4}\sup\left|f_{X_{2i-1}}(t\,|\,\tilde{F}_{2i-2}\times\tilde{F}_{2i})\right|\exp\left\{-\frac{\alpha^{(n)}}{4}\,\tilde{I}_n\left(\frac{t}{2\pi}\right)\right\}, \tag{4.14}$$

где

$$\tilde{I}_n(t)=\frac{1}{2}\sum_{k=9}^{n}\left(1-\sup\left|f_{X_k}(2\pi t\,|\,\tilde{F}_{k-1})\right|^2\right)=$$

$$=\inf\sum_{k=9}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin^2\pi tx\,\tilde{p}_{X_k}(x\,|\,\tilde{F}_{k-1})\,dx$$

отличается от $I_n(t)$, введенного в [40], (5.2), только тем, что вместо плотностей $\tilde{p}_{\xi_k}(x)$ берутся плотности

$$\tilde{p}_{X_k}(x\,|\,\tilde{F}_{k-1})=\int_{-\infty}^{+\infty}p_{X_k}(x+y\,|\,\tilde{F}_{k-1})\,p_{X_k}(y\,|\,\tilde{F}_{k-1})\,dy.$$

Следовательно, для оценки $|f_{Z_n}(t)|$ при $|t|>cL_{sn}^{-\frac{1}{s-2}}$ можем применить результаты статьи [40], полученные при доказательстве аналогичной теоремы 4. Аналогично оценке (6.7) из [40], находим

$$I_4'=B_n \int\limits_{|t|>\frac{1}{B_n^0\widetilde{L}_{3n}^0}} |f_{s_n}(t)|\,dt \leqslant 192\pi\sqrt{2\pi}\,\alpha^{(n)-\frac{1}{2}} B_n L_{sn}^0 \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{4} C_{2i-1}^{\frac{1}{4}}\left(1+\frac{\pi\bar{\sigma}_{2i-1}}{8\sqrt{2}\,B_n^0\widetilde{L}_{3n}^0}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left\{-\frac{\alpha^{(n)}}{16}\sum_{k=9}^{n}\bar{\alpha}(\mathrm{m}_k,\ \pi B_n^0\widetilde{L}_{sn}^0)\right\}.$$

Осталось оценить

$$I_4''=B_n \int\limits_{\frac{c}{B_n L_{sn}^{\frac{1}{s-2}}}<|t|\leqslant\frac{1}{B_n^0\widetilde{L}_{sn}^0}} |f_{S_n}(t)|\,dt.$$

В этом случае, аналогично (6.6) из [40], имеем

$$|f_{S_n}(t)|\leqslant e^{-\frac{t^2}{12}\alpha^{(n)}\bar{B}_n^{02}} \quad \text{при} \quad |t|\leqslant\frac{1}{B_n^0\widetilde{L}_{3n}^0}.$$

Поэтому

$$I_4''\leqslant\frac{6B_n^2}{c\,\alpha^{(n)}\bar{B}_n^{02}}\,L_{sn}^{\frac{1}{s-2}}\exp\left\{-\frac{\alpha^{(n)}c^2\bar{B}_n^{02}}{6B_n^2}\,L_{sn}^{-\frac{2}{s-2}}\right\}.$$

Очевидно $I_4=I_4'+I_4''$. Также оценивается $\tilde{I}_4$.
Теорема доказана.

Доказательство теоремы 6. Эта теорема является в точности таким же обобщением теоремы 2 из [41], как и теорема 5 — теоремы 4 из [40].

Доказательство теоремы 7. В неравенстве Эссеена (4.1) положим $F=F_{Z_n}$, $G=\Phi_{s-1,n}$,

$$f(t)=f_{Z_n}(t),\quad h(t)=h_{s-1,n}(t),$$

где $\Phi_{s-1,n}$ определено в теореме 6, а $h_{s-1,n}(t)$ — в доказательстве теоремы 5. Выберем $T=L_{sn}^{-1}$. Имеем

$$\varepsilon=\int\limits_{|t|\leqslant L_{sn}^{-1}}\frac{|f_{Z_n}(t)-h_{s-1,n}(t)|}{|t|}\,dt\leqslant\tilde{I}_1+\tilde{I}_2+\tilde{I}_3+\tilde{I}_4,$$

где $\tilde{I}_j$, $j=1, 2, 3$ из (4.10) при

$$A=\min\left\{a\ln^{\frac{1}{2}}(1+L_{sn}^{-\frac{1}{s-2}}),\quad L_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)}}\right\},\quad a>0,$$

$$K=c\,L_{sn}^{-\frac{1}{s-2}},\quad \tilde{I}_4=\int\limits_{cL_{sn}^{-\frac{1}{s-2}}<|t|\leqslant L_{sn}^{-1}}|f_{Z_n}(t)|\,|t|^{-1}dt.$$

Из леммы 11 и 12 сразу находим, что при $a\geqslant 2\pi\sqrt{3(s-2)}$ имеет место оценка

$$\tilde{I}_1+\tilde{I}_2+\tilde{I}_3=2\pi\delta_{3s}L_{sn}.$$

Для оценки $\tilde{I}_4$ набор (3.105) выберем следующим образом. Положим

$$k_1=j-1,\quad l_1=j+1,\quad k_{i+1}=l_i+M,\quad M=\left[\frac{2\ln n}{\alpha^{(n)}}+1\right],$$

$l_i=k_i+2$, $i=1, \ldots, N$ и j какое-нибудь целое число из интервала $[1,\ M+2]$. Согласно (3.106) имеем

$$|f_{S_n}(t)|\leqslant \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(1-M\left|f_{S_{k_i l_i}}(t\,|\,\bar{F}_{k_i}\times\bar{F}_{l_i})\right|^2\right)+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^{N-1}(1-\alpha_{l_i k_{i+1}})\right\}. \tag{4.15}$$

При нашем наборе

$$\sum_{i=1}^{N-1}(1-\alpha_{l_i k_{i+1}})\leqslant\sum_{i=1}^{N-1}e^{-\alpha^{(n)}(k_{i+1}-l_i)}\leqslant\frac{n}{M}\exp\{-2\ln n\}\leqslant\frac{1}{n}$$

и так как мы можем j выбрать произвольным из интервала $[1,\ M+2]$, то

$$|f_{S_n}(t)|\leqslant e\exp\left\{-\frac{\alpha^{(n)}}{4(1+\ln n)}\sum_{k=1}^{n}\left(1-M|f_{X_k}(t\,|\,\bar{F}_{k-1}\times\bar{F}_{k+1})|^2\right)\right\}.$$

Пользуясь следствием леммы 2, находим

$$|f_{S_n}(t)|\leqslant e\cdot\exp\left\{-\frac{\alpha^{(n)^2}}{128(1+\ln n)}\sum_{k=1}^{n}\left(1-|f_{X_k}(t)|^2\right)\right\}$$

или

$$|f_{S_n}(t)|\leqslant e\cdot\exp\left\{-\frac{\alpha^{(n)^2}}{128(1+\ln n)}\sum_{k=1}^{n}a_k\left(1-|f_k(t)|^2\right)\right\},$$

где $f_k(t)$ – характеристическая функция случайной величины, имеющей плотность вероятности $p_{X_k}(x)$. Согласно лемме 1 из [40]

$$\frac{1}{2}\left(1-|f_k(t)|^2\right)\geqslant\frac{1}{3}\,\bar{\alpha}\left(\mathrm{m}_k,\ \frac{\pi}{|t|}\right)$$

или

$$\min_{\frac{1}{B_n^0 L_{3n}^{\frac{1}{s-2}}}\leqslant|t|\leqslant\frac{1}{B_n L_{3n}}}\left(1-|f_k(t)|^2\right)\geqslant\frac{2}{3}\,\bar{\alpha}\left(\mathrm{m}_k,\ \pi B_n^0 L_{sn}^{0\,\frac{1}{s-2}}\right).$$

Поэтому

$$\tilde{I}_{4,1}=\int\limits_{\frac{B_n}{B_n^0 L_{sn}^{\frac{1}{s-1}}}<|t|\leqslant L_{sn}^{-1}}|f_{Z_n}(t)|\,|t|^{-1}dt\leqslant 2e\left(\ln B_n^0 L_{3n}^{0\,\frac{1}{s-2}}B_n^{-1}L_{sn}^{-1}\right)\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{\alpha^{(n)^2}}{192(1+\ln n)}\sum_{k=1}^{n}a_k\,\bar{\alpha}\left(\mathrm{m}_k\,\pi B_n^0 L_{sn}^{0\,\frac{1}{s-2}}\right)\right\}. \tag{4.15'}$$

Остался интеграл

$$\bar{I}_{4,2} = \int\limits_{cL_{sn}^{-\frac{1}{s-2}} < |t| \leqslant B_n B_n^{0-1} L_{sn}^{0^{-\frac{1}{s-2}}}} |f_{Z_n}(t)|\, |t|^{-1}\, dt.$$

В (4.15) положим $k_1=m$, $l_1=m+\Delta$, $k_{i+1}=l_i+M$, $l_i=k_i+\Delta$, $i=1, 2, \quad N$, где

$$M=\left[\frac{2\ln n}{\alpha^{(n)}}+1\right],\quad \Delta=\left[\frac{c\alpha^{(n)\frac{2}{s-2}}}{16^{\frac{2}{s-2}}|t|B_n^0 L_{sn}^{0\frac{1}{s-2}}}\right], \quad /$$

$$cB_n^{-1} L_{sn}^{-\frac{1}{s-2}} < |t| \leqslant B_n^{0-1} L_{sn}^{0^{-\frac{1}{s-2}}}$$

натуральное m выберем позже. Согласно (3.106) и (3.107), находим

$$|f_{S_n}(t)| \leqslant \exp\left\{-\frac{t^2}{2\pi^2}\sum_{i=1}^{N}\iint\limits_{|x-y|\leqslant\frac{\pi}{|t|}}(x-y)^2\, dF_{S_{k_i l_i}}(x\,|\,\bar{F}_{k_i}\times\bar{F}_{l_i})\times\right.$$

$$\left.\times\, dF_{S_{k_i l_i}}(y\,|\,\bar{F}_{k_i}\times\bar{F}_{l_i})+\sum_{i=1}^{N-1}(1-\alpha_{l_i k_{i+1}})\right\}.$$

Учитывая (3.108) и выбор M и Δ, получаем

$$|f_{S_n}(t) \leqslant e\cdot\exp\left\{-\frac{t^2}{2\pi^2}\sum_{i=1}^{N}\left(MD\,\{S_{k_i l_i}|\bar{F}_{k_i}\times\bar{F}_{l_i}\}-R_{k_i l_i}(t)\right)\right\}, \tag{4.16}$$

где

$$R_{k_i l_i}(t) \leqslant 8\int\limits_{|x|>\frac{\pi}{2|t|}} x^2\, dF_{S_{k_i l_i}}(x) \leqslant 8\left(\frac{2|t|}{\pi}\right)^{s-2} M|S_{k_i l_i}|^s \leqslant$$

$$\leqslant 8\left(\frac{2|t|}{\pi}\right)^{s-2}\Delta^{s-2}\sum_{j=k_i+1}^{l_i} M|X_j|^s. \tag{4.17}$$

С помощью неравенства (3.14), что в лемме 10, имеем

$$MD\,\{S_{k_i l_i}|\bar{F}_{k_i}\times\bar{F}_{l_i}\} \geqslant \frac{3-2\sqrt{2}}{64}\,\alpha^{(n)}\sum_{j=k_i+1}^{l_i+1}\left(1-e^{-\alpha^{(n)}(j-k_i)}\right)DX_j \geqslant$$

$$\geqslant \frac{3-2\sqrt{2}}{128}\,\alpha^{(n)2}\sum_{j=k_i+1}^{l_i+1}(j-k_i)\,DX_j, \tag{4.18}$$

так как

$$\Delta \leqslant \frac{\alpha^{(n)\frac{2}{s-2}} B_n L_{sn}^{\frac{1}{s-2}}}{16^{\frac{2}{s-2}} B_n^0 L_{sn}^{0\frac{1}{s-2}}} \leqslant \frac{1}{\alpha^{(n)}}$$

согласно (1.5). Число m мы можем выбрать произвольно, поэтому из (4.16)–(4.18) выводим

$$|f_{S_n}(t)| \leqslant e \cdot \exp\left\{-\frac{t^2}{2\pi^2}\,\frac{3-2\sqrt{2}}{512}\,\frac{\alpha^{(n)}\Delta^2}{(1+\ln n)}\,B_n^{02}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant e \cdot \exp\left\{-c'\,\alpha^{(n)}\left(3+\frac{4}{s-2}\right)L_{sn}^{0\;-\frac{2}{s-2}}\right\},$$

если

$$cB_n^{-1}L_{sn}^{-\frac{1}{s-2}} \leqslant |t| \leqslant B_n^{0-1}L_{sn}^{0\;-\frac{1}{s-2}},$$

$c'>0$ — абсолютная константа.

Отсюда

$$\bar{I}_{4,2} \leqslant \frac{e}{c}\,(B_n^0 B_n^{-1})^{\frac{s-1}{s-2}} \exp\left\{-c'\,\alpha^{(n)}\left(3+\frac{4}{s-2}\right)L_{sn}^{0\;-\frac{2}{s-2}}\right\}.$$

Теорема доказана.

Доказательство теорем 8, 9.

Доказательство соотношения (1.10) в теореме 8 в точности совпадает с доказательством теоремы 7, с заменой $\bar{P}_n$ на P_n. Также аналогичны доказательства соотношения (1.11) и теоремы 9. Если выполнены условия теоремы 9, то, как и в (4.10), имеем

$$\sup_x \left| p_{Z_n}(x) - \frac{d}{dx}\,\Phi_{s-1,n}(x)\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\,(I_1+I_2+I_3+I_4),$$

причем

$$I_1+I_2+I_3 = 2\pi\delta_{4s}\,L_{sn}\ln^{\frac{s+1}{2}}(1+L_{sn}^{-1})$$

согласно леммам 11, 12, если положить

$$A=\min\left\{a\ln^{\frac{1}{2}}(1+L_{sn}^{-1}),\quad L_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)}}\right\},\qquad K=cL_{sn}^{-\frac{1}{s-2}}$$

Интеграл I_4 предоставим суммой $I_{4,1}+I_{4,2}$, где

$$I_{4,1} = \int\limits_{|t|>\frac{B_n}{B_n^0 L_{sn}^{0\;-\frac{1}{s-2}}}} |f_{Z_n}(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant e \cdot \exp\{-P_n\}\,B_n \sup \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f_{X_1}(t\,|\,\bar{F}_2)\,f_{X_1}(t\,|\,\bar{F}_2\times\bar{F}_3)| \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi e\sqrt{C_1C_2}\,e^{-P_n}$$

аналогично случаю (4.15′) и

$$I_{4,2} = \int\limits_{cL_{sn}^{-\frac{1}{s-2}}<|t|<B_nB_n^{0-1}L_{sn}^{0\;-\frac{1}{s-2}}} |f_{Z_n}(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant c\,\frac{B_n}{B_n^0}\,L_{sn}^{0\;-\frac{1}{s-2}} \exp\left\{-c'\,\alpha^{(n)}\left(3+\frac{4}{s-2}\right)L_{sn}^{0\;-\frac{2}{s-2}}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant e\,\frac{B^n}{B_n^0}\,L_{sn}^{0\;-\frac{1}{s-2}} \exp\left\{-c'\,\alpha^{(n)}\left(3+\frac{4}{s-2}\right)L_{sn}^{0\;-\frac{2}{s-2}}\right\}$$

согласно оценке (4.19), причем, из ([43], 6) следует, что

$$L_{sn}^{0-\frac{1}{s-2}} \leqslant \sqrt{n}.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 11. $S_n=(S_n^{(1)}, \ldots, S_n^{(s)})$ можно представить как сумму $X_1+\ldots+X_n$ случайных векторов, связанных в цепь Маркова и своими значениями, принимающими единичные векторы $e_1=(1, 0, \ldots, 0)$, $e_s=(0, \ldots, 0, 1)$ s-мерного пространства, а именно $X_k(E_j)=e_j$, $k=1, \ldots, n$, $j=1, \ldots, s$. Повторив доказательство леммы 7, получим, что существуют абсолютные константы $H_1^0>0$, $H_2^0>0$, такие что для любого набора натуральных чисел $r_1, \ldots, r_s$ с $r=r_1+\quad+r_s$

$$|\Gamma_{r_1, r_2, \ldots, r_s}\{S_n\}| \leqslant \frac{r_1! \ldots r_s! H_1^0 H_2^{0\,r-2}}{\alpha^{(n)\,r-2}}.$$

Поэтому, для завершения доказательства теоремы, как известно [66], следует уметь оценить характеристическую функцию вне основного интервала. Аналогом арифметического показателя P_n в этом случае (см., напр., 29—30) будет

$$P^{(n)}=c'' \frac{\alpha^{(n)^2}}{\ln(1+\ln n)} \min_{a,\, q} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(\vec{a}, q) \geqslant c''' \frac{\alpha^{(n)^2} n}{\ln(1+\ln n)}, \tag{4.20}$$

так как

$$\alpha_k(\vec{a}, q)=\min_r P\{(\vec{a}, X_k) \not\equiv r \,(\mathrm{mod}\, q)\}=1.$$

Здесь минимум берется по всем таким $\vec{a}=(a_1, \ldots, a_{s-1}, 0)$ и q, что $a_l \leqslant \frac{1}{2q}$ и о.н.д. $(a_1, \ldots, a_{s-1}, q)=1$. Как мы уже видели доказывая теорему 8, скорость стремления $P^{(n)}$ к ∞ при $n\to\infty$, даваемая оценкой (4.20), вполне достаточна для оценки характеристической функции в четвертом интеграле. Мы, конечно, дали только наброски доказательства, но, желая привести полностью все рассуждения, нужные для получения локальной теоремы с учетом больших уклонений, пришлось бы сильно расширить данную работу.