X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1

1970

УДК – 519.21

# ЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА С БОЛЬШИМИ УКЛОНЕНИЯМИ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

Э. Мисявичюс

Пусть имеется однородная цепь Маркова $\{\xi(k),\ k=1, 2, 3, \ldots\}$ с произвольным множеством состояний $\Omega$, выделенной на нем $\sigma$-алгеброй подмножеств $\mathfrak{F}$, переходной вероятностной функцией $\mathbf{P}(\omega, A)$, $\omega\in\Omega$, $A\in\mathfrak{F}$, и стационарным начальным распределением $\mathbf{P}(A)$, $A\in\mathfrak{F}$.

Совокупность функций $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$, $\ldots$, $X_n(\omega)$, $\ldots$, определенных на $\Omega$ и $\mathfrak{F}$-измеримых, называется последовательностью случайных величин, связанных в однородную цепь Маркова.

Предположим, что коэффициент эргодичности $\alpha$ (см. [8])

$$\alpha = 1 - \sup_{\omega,\,\bar{\omega},\,A} |\mathbf{P}(\omega, A) - \mathbf{P}(\bar{\omega}, A)| > 0. \tag{1}$$

Нетрудно доказать (см. [5]), что

$$\sup_{\omega,\,A} |P^{(n)}(\omega, A) - P(A)| \leqslant (1-\alpha)^n, \tag{2}$$

где $\mathbf{P}^{(n)}(\omega, A)$ — переходная вероятностная функция за $n$ шагов.

Пусть для некоторой постоянной $a>0$ с вероятностью 1 условное математическое ожидание

$$\mathbf{M}\{e^{a|X_1|}/\xi(1)=\omega\} \leqslant C_1 < \infty. \tag{3}$$

В дальнейшем будем понимать, не говоря каждый раз отдельно, что если случайная величина ограничена, то она ограничена с вероятностью 1.

При выполнении условия (3) случайные величины имеют конечные условные моменты любого порядка. Положим для простоты $\mathbf{M}X_1=0$. Допустим, что существует условная плотность $p_{X_2}\big(x\,|\,\xi(1),\ \xi(3)\big)$ и

$$p_{X_2}\big(x/\xi(1),\ \xi(3)\big) \leqslant C_2 < \infty. \tag{4}$$

Тогда существуют плотности $p_{X_2}\big(x/\xi(1)\big)$ и $p_{X_1}(x)$ и

$$p_{X_2}\big(x/\xi(1)\big) \leqslant C_3 < \infty, \tag{4a}$$

$$p_{X_1}(x) \leqslant C_4 < \infty. \tag{4б}$$

Ввиду (2), (3) и (4а) существует конечный положительный предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,\mathbf{M}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2 = \sigma^2. \tag{5}$$

Положим

$$S_{kl}=\sum_{j=k+1}^{l} X_j,\quad S_n=S_{on},\quad 0\leqslant k<l\leqslant n;$$

$$Z_n=\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\,S_n.$$

Пусть

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sup\left|f_{X_s}\left(t\,/\,\xi(1),\ \xi(3)\right)\right|\right]^2 dt<\infty, \tag{6}$$

где

$$f_{X_s}\left(t\,/\,\xi(1),\ \xi(3)\right)=\mathbf{M}\left\{e^{itX_s}\,/\,\xi(1),\ \xi(3)\right\}.$$

При выполнении условия (6) случайная величина $Z_n$ имеет ограниченную плотность $p_{Z_n}(x)$.

**Теорема.** *Если выполнены условия* (1), (3), (4) *и* (6), *то равномерно относительно* $x$, $x\geqslant 1$, $x=0\,(\sqrt{n})$ *при* $n\to\infty$

$$p_{Z_n}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{\sqrt{n}}\,\mu\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right\}\left[1+O\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right], \tag{7}$$

$$p_{Z_n}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{\sqrt{n}}\,\mu\left(-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right\}\left[1+O\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right], \tag{7a}$$

*где* $\mu(t)$ — *некоторый степенной ряд, сходящийся в некоторой окрестности нуля.*

Доказательство. Переходную характеристическую функцию (см. [8]) случайной величины $S_{kl}$ обозначим через $f_{kl}(t,\omega,A)$, $\omega\in\Omega$, $A\in\mathfrak{F}$. Тогда для любого набора целых чисел

$$b\leqslant l_1<l_2<\cdots<l_N\leqslant n$$

$$\left|f_{S_n}(t)\right|\leqslant\sup\left|f_{X_s}\left(t\,/\,\xi(1),\ \xi(3)\right)\right|^2\prod_{j=1}^{N-1}\sup_{\omega_j}\left\|f_{l_j l_{j+1}}(t,\ \omega_j,\cdot)\right\|, \tag{8}$$

где

$$f_{S_n}(t)=\mathbf{M}\,e^{itS_n},\quad f_{kl}(t,\ \omega,\cdot)=f_{kl}(t,\ \omega,\ \Omega),$$

$$\|f_{kl}(t,\ \omega,\cdot)\|=\sup_{|\varphi_t|\leqslant 1}\left|\int_{\Omega}\varphi_t(\omega_1)\,f_{kl}(t,\ \omega,\ d\omega_1)\right|. \tag{8a}$$

Здесь верхняя грань берется по всем комплексным $\mathfrak{F}$-измеримым функциям $\varphi_t(\omega)$, $\omega\in\Omega$, таким, что $|\varphi_t(\omega)|\leqslant 1$ (см. [1]). Для любого целого числа $k_j$, $l_j<k_j<l_{j+1}$, $j=1,2,\ldots,N-1$ получаем

$$\|f_{l_j l_{j+1}}(t,\ \omega_j,\cdot)\|\leqslant\mathbf{M}\left|f_{k_j l_{j+1}}\left(t\,/\,\xi(k_j),\ \xi(l_{j+1})\right)\right|+e^{\alpha(k_j-l_j)} \tag{9}$$

Выберем числа $k_j=l_{j+1}-2$, а числа $l_j$ определим так, что

$$l_{j+1}-l_j=\left[\frac{\ln n}{\alpha}\right]+2. \tag{10}$$

Для любого числа $b$ справедливо неравенство

$$|b| \leqslant 1 - \frac{1}{2}(1 - |b|^2). \tag{11}$$

Тогда для (9) получаем оценку:

$$\|f_{l_j l_{j+1}}(t,\ \omega_j, \cdot)\| \leqslant \exp\left\{\frac{1}{n} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\left[1 - \mathbf{M}\left|f_{k_j l_{j+1}}\left(t / \xi(k_j),\ \xi(l_{j+1})\right)\right|^2\right]\right\} \tag{12}$$

Но (см. [8] и [1])

$$1 - \mathbf{M}\left|f_{k_j l_{j+1}}\left(t / \xi(k_j),\ \xi(l_{j+1})\right)\right|^2 = \mathbf{MD}\left\{e^{itS_{k_j l_{j+1}}} / \xi(k_j),\ \xi(l_{j+1})\right\} =$$
$$= \mathbf{MD}\left\{e^{itS_{k_j l_{j+1}-1}}\,\middle|\,\xi(k_j),\ \xi(l_{j+1})\right\} \geqslant \frac{\alpha^2}{32}\left(1 - |f_{X_1}(t)|^2\right); \tag{13}$$

здесь

$$f_{X_1}(t) = \mathbf{M}e^{itX_1}.$$

Окончательно,

$$|f_{S_n}(t)| \leqslant \left[\sup\left|f_{X_1}\left(t / \xi(1),\ \xi(3)\right)\right|\right]^2 \cdot$$
$$\cdot \exp\left\{(N-1)\left[\frac{1}{n} - \frac{\alpha^2}{64}\left(1 - |f_{X_1}(t)|^2\right)\right]\right\} \tag{14}$$

По формуле обращения

$$p_{Z_n}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} f_{Z_n}(t)\,dt, \quad f_{Z_n}(t) = \mathbf{M}\,e^{itZ_n}. \tag{15}$$

Тогда

$$p_{Z_n}(x) = \frac{\sigma\sqrt{n}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\sigma\sqrt{n}xt} f_{S_n}(t)\,dt. \tag{16}$$

Выберем $\varepsilon_1 > 0$ и обозначим

$$I_1 = \frac{\sigma\sqrt{n}}{2\pi}\int_{|t| \leqslant \varepsilon_1} e^{-i\sigma\sqrt{n}xt} f_{S_n}(t)\,dt, \tag{17}$$

$$I_2 = \frac{\sigma\sqrt{n}}{2\pi}\int_{|t| > \varepsilon_1} e^{-i\sigma\sqrt{n}xt} f_{S_n}(t)\,dt. \tag{17a}$$

Для оценки интеграла $I_1$ воспользуемся операторным методом (см. [7]). С этой целью на линейном метрическом пространстве $B$ всех комплексных ограниченных $\mathfrak{F}$-измеримых функций $g(\omega)$, $\omega \in \Omega$, с нормой

$$\|g\| = \sup_{\omega} |g(\omega)|$$

определим линейный оператор

$$\left(P(z)g\right)(\omega) = \int_{\Omega} e^{zX_k(\tilde{\omega})} g(\tilde{\omega})\,\mathbf{P}(\omega,\ d\tilde{\omega}); \quad k = 2,\ 3, \tag{18}$$

и линейный функционал

$$(g,\ m) = \int_{\Omega} g(\omega)\, m(d\omega), \tag{19}$$

где $m(A)$ — некоторая комплексная мера с ограниченной полной вариацией. Тогда

$$f_{S_n}(t) = \left(\mathbf{P}^{n-1}(it)\,\psi,\ \ M(it)\right), \tag{20}$$

где

$$M(z,\ A) = \int_{A} e^{zX_1(\omega)}\, \mathbf{P}(d\omega), \tag{21}$$

$$\psi(\omega) \equiv 1. \tag{22}$$

Нам потребуется одна лемма, доказанная С. В. Нагаевым (см. [7]).

**Лемма.** *При* $|z| < a$

$$P^n(z) = \lambda^n(z)\, P_1(z) + T_n(z), \tag{23}$$

*где*

$$P_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{I} R(u,\ z)\, du,$$

$R(u,z)$ — *резольвента оператора* $P(z)$, $I$ — *окружность с центром в точке* 1 *и радиусом* $r$, $\lambda(z)$ — *собственное значение оператора* $P(z)$:

$$\lambda(z) = \frac{\left(P(z)\, P_1(z)\, \psi,\ \mathbf{P}\right)}{\left(P_1(z)\, \psi,\ \mathbf{P}\right)}, \tag{24}$$

$T_n(z)$ — оператор с нормой

$$\| T_n(z) \| = O(e^{-n\eta_1}); \tag{25}$$

здесь и в дальнейшем $\eta_j$ означают положительные постоянные.

Применяя результаты леммы к (17), получаем

$$I_1 = \frac{\sigma \sqrt{n}}{2\pi i} \int_{-i\varepsilon_1}^{i\varepsilon_1} e^{-\sigma \sqrt{n}\, xz} \left(P_1(z)\, \psi,\ M(z)\right) \lambda^{n-1}(z)\, dz + O(e^{-n\eta_1}). \tag{26}$$

Составляем уравнение перевала (см. [3]), предварительно обозначив

$$\tau = \frac{x}{\sqrt{n}},\quad 1 \leqslant x \leqslant o(\sqrt{n}) \ \text{ при } n \to \infty,$$

$$K'(z) - \sigma\tau = 0, \tag{27}$$

где в качестве $K(z) = \ln \lambda(z)$ выбрана та ветвь логарифма, которая непрерывна и $K(0) = 0$. Вследствие (3) $\lambda(z)$ и $\left(P_1(z)\, \psi,\ M(z)\right)$ являются аналитическими функциями в круге $|z| < a$. Разложим $K(z)$ в ряд, сходящийся в некоторой окрестности нуля:

$$K(z) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\gamma_k z^k}{k!}\ ;\quad \lambda(0) = 1,\quad \lambda'(0) = 0,\quad \lambda''(0) = -\sigma^2. \tag{28}$$

В силу (27)

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\gamma_k z^{k-1}}{(k-1)!} = \sigma\tau \tag{29}$$

и, следовательно, существует решение этого уравнения $z_c > 0$ (так как по (5) $\sigma^2 > 0$):

$$z_0 = \frac{\tau}{\sigma} - \frac{\gamma_3}{2\sigma^4}\tau^2 - \frac{\sigma^2\gamma_4 - 3\gamma_3^2}{6\sigma^7}\tau^3 + \cdots \tag{30}$$

Отсюда и из (28) вытекает, что

$$K(z_0) - \sigma\tau z_0 = -\frac{\tau^2}{2} + \tau^3 \mu(\tau), \tag{31}$$

где степенной ряд $\mu(\tau)$ сходится в достаточно малой окрестности нуля. Заменим в (26) контур интегрирования (в силу аналитичности подынтегральной функции):

$$I_1 = I_3 + I_4 + I_5 + O(e^{-m n}), \tag{32}$$

где

$$I_3 = \frac{\sigma\sqrt{n}}{2\pi i} \int_{-i\varepsilon_2}^{-i\varepsilon_2 + z_0} e^{-\sigma\sqrt{n}xz} \lambda^{n-1}(z)\Big(P_1(z)\psi,\ M(z)\Big)\,dz, \tag{33}$$

$$I_4 = \frac{\sigma\sqrt{n}}{2\pi i} \int_{z_0 + i\varepsilon_2}^{i\varepsilon_2} e^{-\sigma\sqrt{n}xz} \lambda^{n-1}(z)\Big(P_1(z)\psi,\ M(z)\Big)\,dz, \tag{33а}$$

$$I_5 = \frac{\sigma\sqrt{n}}{2\pi i} \int_{z_0 - i\varepsilon_2}^{z_0 + i\varepsilon_2} e^{-\sigma\sqrt{n}xz} \lambda^{n-1}(z)\Big(P_1(z)\psi,\ M(z)\Big)\,dz. \tag{33б}$$

На отрезках, где $\operatorname{Im} z = \pm\varepsilon_2$, $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant z_0$,

$$|\lambda(z)| \leqslant 1 - \frac{\varepsilon_2^2\sigma^2}{4} \tag{34}$$

при достаточно малом $\varepsilon_2$. Это возможно в силу непрерывности $\lambda(z)$ в окрестности нуля и (28). Вследствие (34)

$$I_3 + I_4 = O(e^{-m n}). \tag{35}$$

Далее,

$$I_5 = \frac{\sigma\sqrt{n}}{2\pi i}\Big(P_1(z_0)\psi,\ M(z_0)\Big) \int_{z_0 - i\varepsilon_2}^{z_0 + i\varepsilon_2} e^{-\sigma\sqrt{n}xz}\lambda^{n-1}(z)\,dz +$$

$$+ \frac{\sigma\sqrt{n}}{2\pi i} \int_{z_0 - i\varepsilon_2}^{z_0 + i\varepsilon_2} e^{-\sigma\sqrt{n}xz}\lambda^{n-1}(z)\Big[\Big(P_1(z)\psi,\ M(z)\Big) -$$

$$-\Big(P_1(z_0)\psi,\ M(z_0)\Big)\Big]\,dz. \tag{36}$$

Заметим теперь, что

$$\left(P_1(z_0)\,\psi,\ M(z_0)\right)=1+O(z_0), \tag{37}$$

$$\left(P_1(z)\,\psi,\ M(z)\right)-\left(P_1(z_0)\,\psi,\ M(z_0)\right)=O(z-z_0). \tag{37a}$$

Для оценки интеграла $I_2$ с помощью (14), (6) и (4б) получаем

$$I_2=O\left(e^{-\frac{n}{\ln n}\eta_1}\right). \tag{38}$$

После этих замечаний дальнейшее доказательство проводится как и в случае решетчатых случайных величин (см. [7]). Для доказательства (7а) достаточно заменить $X_k$ на $-X_k$; $k=1, 2,$ и привести те же самые вычисления. Теорема доказана.

В заключении выражаю глубокую благодарность доктору ф.-м.н. проф. В. А. Статулявичусу за предложенную задачу и ценные указания при ее решении и очень признателен ст.н. сотруднику Института физики и математики АН Лит. ССР Г. Алешкявичюсу за большую помощь при устранении неточностей.

Вильнюсский Государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию 19.IV.1969

**Литература**


1. А. Алешкявичене, Локальная предельная теорема для сумм случайных величин, связанных в однородную цепь Маркова, в случае устойчивого предельного распределения, Лит. матем. сб., **I**, № 1–2 (1961), 5–13.
2. Дж. Л. Дуб, Вероятностные процессы, Москва, 1956.
3. М. А. Евграфов, Асимптотические оценки и целые функции, Москва, 1962.
4. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, Независимые и стационарно связанные величины, Москва, 1965.
5. М. Лоэв, Теория вероятностей, Москва, 1962.
6. С. В. Нагаев, Некоторые предельные теоремы для однородных цепей Маркова, Теория вероятн. и ее примен., **II**, № 4 (1957), 389–416.
7. С. В. Нагаев, Уточнение предельных теорем для однородных цепей Маркова, Теория вероятн. и ее примен., **VI**, № 1 (1961), 67–86.
8. В. А. Статулявичус, Предельные теоремы для плотностей и асимптотичеескые разложения для неоднородных цепей Маркова, Лит. матем. сб., **I**, № 1–2 (1961), 221–314.
9. В. А. Статулявичус, Предельные теоремы для плотностей и асимптотические разложения для распределений сумм независимых случайных величин, Теория вероятн. и ее примен., **X**, № 4 (1965), 645–659.
10. В. А. Статулявичус, Исследования по предельным теоремам теории вероятностей (докторская диссертация), Вильнюс, 1967.
11. Э. Хилле, Р. Филлипс, Функциональный анализ и полугруппы, Москва, 1962.


**DIDELIŲ NUKRYPIMŲ HOMOGENINĖSE MARKOVO GRANDINĖSE LOKALINĖ TEOREMA**

E. Misevičius

*(Reziumė)*

Straipsnyje yra įrodyta didelių nukrypimų lokalinė teorema tankiams.

**DIE GROßEN ABWEICHUNGEN FÜR DIE HOMOGENEN MARKOFFSCHEN KETTEN**

E. Misevičius

(*Zusammenfassung*)

In diesem Artikel ist ein Lokalgrenzwertsatz der großen Abweichungen für die Dichtefunktion bewiesen.