X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1

1970

УДК–513

О ГЕОМЕТРИИ НЕКОТОРЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

З. Ю. Лупейкис

Некоторые вопросы локальной геометрической теории систем дифференциальных уравнений второго порядка рассмотрены в работах В. Близникаса [1], [2], А. Кризцтена [4] и др. Из систем дифференциальных уравнений второго и более высокого порядков наиболее глубоко разработаны специальные системы, т. е. системы, разрешенные относительно старших производных. К числу таких систем принадлежат системы дифференциальных уравнений, определяющие геодезические кривые пространства аффинной связности.

В работе В. И. Близникаса [2] рассмотрена геометрия систем дифференциальных уравнений, разрешенных относительно частных производных второго порядка, в которых число неизвестных функций больше числа уравнений, а число независимых переменных – произвольное (конечное); в работе [1] приведен новый подход к геометрии систем дифференциальных уравнений любого порядка. В работе А. Кризцтена [4] рассматривается геометрия одного дифференциального уравнения с частными производными второго порядка.

В работах [7] и [8] рассматривается геометрия некоторых классов квазилинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, не разрешенных относительно старших производных. Получены объекты аффинных связностей.

В настоящей работе рассматривается геометрия некоторых систем квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными, не разрешенных относительно старших производных. Для рассматриваемых классов определены объекты аффинных и линейных связностей. Объекты кривизны всех полученных связностей могут быть определены таким же образом как и для соответствующих связностей пространства опорных элементов.

Работа выполнена теоретико-групповым методом Г. Ф. Лаптева [5].

§ 1. Общие вопросы

Пусть V_n и V_m – дифференцируемые многообразия, структурные уравнения которых имеют вид

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega^i_k,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$D\omega^i_{j_1\dots j_a} = \sum_{p=1}^{a} \frac{a!}{p!\,(a-p)!}\, \omega^k_{(j_1\dots j_p} \wedge \omega^i_{j_{p+1}\dots j_a)k} + \omega^k \wedge \omega^i_{j_1\dots j_a k} \qquad (1.1)$$

$$D\Theta^{\alpha}=\Theta^{\beta}\wedge\Theta^{\alpha}_{\beta},$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$D\Theta^{\alpha}_{\beta_1\dots\beta_b}=\sum_{p=1}^{b}\frac{b!}{p!\,(b-p)!}\,\Theta^{\gamma}_{(\beta_1\dots\beta_p}\wedge\Theta^{\alpha}_{\beta_{p+1}\dots\beta_b)\gamma}+\Theta^{\gamma}\wedge\Theta^{\alpha}_{\beta_1\dots\beta_b\gamma}, \tag{1.2}$$

$$(i,\ j,\ k,\qquad =1,\ 2,\ \dots,\ n;\ \alpha,\ \beta,\qquad =1,\ 2,\ \dots,\ m).$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$h^{a\alpha\beta}_{i}(x^{j},\ u^{\gamma},\ p^{k}_{\gamma})\,p^{i}_{\alpha\beta}+h^{a}(x^{j},\ u^{\gamma},\ p^{k}_{\sigma})=0, \tag{1.3}$$

$$(a,\ b,\qquad =1,\ 2,\ \dots,\ r),$$

где

$$p^{i}_{\alpha}=\frac{\partial x^{i}}{\partial u^{\alpha}},\qquad p^{i}_{\alpha\beta}=\frac{\partial^{2}x^{i}}{\partial u^{\alpha}\partial u^{\beta}}$$

Согласно определению, данному в работе [1], систему дифференциальных уравнений (1.3) можно рассматривать как конечные уравнения поверхности пространства m-мерных поверхностных элементов втторого порядка $K^{(2)}_{n,m}$, локальные координаты $(x^{i}, u^{\alpha}, p^{i}_{\alpha}, p^{i}_{\alpha\beta})$ которых преобразуются следующим образом:

$$x^{i'}=x^{i'}(x^{i}),\qquad u^{\alpha'}=u^{\alpha'}(u^{\alpha}),\qquad p^{i'}_{\alpha'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial u^{\alpha'}}p^{i}_{\alpha},$$

$$p^{i'}_{\alpha'\beta'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial u^{\alpha'}}\frac{\partial u^{\beta}}{\partial u^{\beta'}}p^{i}_{\alpha\beta}+\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\frac{\partial^{2}u^{\alpha}}{\partial u^{\alpha'}\partial u^{\beta'}}p^{i}_{\alpha}+$$

$$+\frac{\partial^{2}x^{i'}}{\partial x^{i}\partial x^{j}}\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial u^{\alpha'}}\frac{\partial u^{\beta}}{\partial u^{\beta'}}p^{i}_{\alpha}p^{j}_{\beta}. \tag{1.4}$$

Потребуем, чтобы структура системы (1.3) не менялась при следующих преобразованиях ($\det\|A^{a'}_{a}\|\neq 0$):

$$A^{a'}_{a}H^{a}=0,$$

где H^{a} — левая часть системы дифференциальных уравнений (1.3), а группа $GL(r,\ R)$ матриц $\|A^{a'}_{a}\|$ имеет структурные уравнения

$$D\Theta^{a}_{b}=\Theta^{c}_{b}\wedge\Theta^{a}_{c}. \tag{1.5}$$

Система функций $h^{a\alpha\beta}_{i}$ и h^{a} определена в пространстве m-мерных поверхностных элементов первого порядка $K^{(1)}_{n,m}$, являющемся подпространством пространства $K^{(2)}_{n,m}$. Таким образом, если на пространстве $K^{(2)}_{n,m}$ задана поверхность, определенная системой (1.3), то она определяет в пространстве $K^{(1)}_{n,m}$ дифференциально-геометрический объект следующей структуры:

$$h^{a'\alpha'\beta'}_{i'}=A^{a'}_{a}\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial u^{\alpha'}}{\partial u^{\alpha}}\frac{\partial u^{\beta'}}{\partial u^{\beta}}h^{a\alpha\beta}_{i},$$

$$h^{a'}=A^{a'}_{a}h^{a}-A^{a'}_{a}h^{a\sigma\gamma}_{k}\left(\frac{\partial^{2}u^{\alpha}}{\partial u^{\alpha'}\partial u^{\beta'}}\frac{\partial u^{\alpha'}}{\partial u^{\sigma}}\frac{\partial u^{\beta'}}{\partial u^{\gamma}}p^{k}_{\alpha}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^{2}x^{i'}}{\partial x^{i}\partial x^{j}}\frac{\partial x^{k}}{\partial x^{i'}}p^{i}_{\sigma}p^{j}_{\gamma}\right), \tag{1.6}$$

при этом x^{i}, u^{α}, p^{i}_{α} являются первыми интегралами вполне интегрируемой системы

$$\omega^{i}=0,$$

$$\Theta^{\alpha}=0, \tag{1.7}$$

$$\Theta^{i}_{\alpha}\equiv dp^{i}_{\alpha}+p^{k}_{\alpha}\omega^{i}_{k}-p^{i}_{\beta}\Theta^{\beta}_{\alpha}=0.$$

Структурные уравнения пространства $K^{(1)}_{n,m}$ имеют вид (1.1), (1.2) и

$$D\Theta^i_\alpha = \Theta^\beta_\alpha \wedge \Theta^i_\beta + \Theta^k_\alpha \wedge \omega^i_k + \Theta^\gamma \wedge \Theta^i_{\alpha\gamma} + \omega^k \wedge \Theta^i_{\alpha k}, \tag{1.8}$$

где

$$\Theta^i_{\alpha\gamma} = -p^i_\beta \Theta^\beta_{\alpha\gamma}, \quad \Theta^i_{\alpha j} = p^k_\alpha \omega^i_{kj}.$$

Геометрия системы дифференциальных уравнений (1.3) (имеется в виду геометрия поверхности $n+m+nm+\frac{nm(m+1)}{2}-r$ измерений $n+m+nm+$ $+\frac{nm(m+1)}{2}$-мерного пространства $K^{(2)}_{n,m}$) эквивалентна геометрии пространства $K^{(1)}_{n,m}$ с заданным дифференциально-геометрическим объектом $(h^{a\alpha\beta}_i, h^a)$, который будет играть роль фундаментального объекта этого пространства. Геометрией пространства $K^{(1)}_{n,m}$ с фундаментальным объектом $(h^{a\alpha\beta}_i, h^a)$ называется совокупность инвариантов и инвариантных операций, построенных при помощи объекта $(h^{a\alpha\beta}_i, h^a)$.

С целью применения метода Г Ф. Лаптева заменим конечные законы преобразования (1.6) дифференциальными уравнениями. Оказывается, что система дифференциальных уравнений объекта $(h^{a\alpha\beta}_i, h^a)$, определенного на $K^{(1)}_{n,m}$, имеет вид

$$\begin{aligned}
&\nabla h^{a\alpha\beta}_i = h^{a\alpha\beta}_{ik}\omega^k + h^{a\alpha\beta}_{i\sigma}\Theta^\sigma + h^{a\alpha\beta\sigma}_{i\cdot k}\Theta^k_\sigma,\\
&\nabla h^a + h^{a\alpha\beta}_i(\Theta^i_{\alpha\beta} - p^k_\beta\Theta^i_{\alpha k}) = h^a_k\omega^k + h^a_\beta\Theta^\beta + h^{a\sigma}_{\cdot k}\Theta^k_\sigma
\end{aligned} \tag{1.9}$$

с дифференциальным продолжением

$$\begin{aligned}
&\nabla h^{a\alpha\beta}_{ij} - h^{a\alpha\beta}_k\omega^k_{ij} - h^{a\alpha\beta\gamma}_{i\cdot k}p^l_\gamma\omega^k_{lj} = h^{a\alpha\beta}_{ijk}\omega^k + h^{a\alpha\beta}_{ij\sigma}\Theta^\sigma + h^{a\alpha\beta\sigma}_{ij\cdot k}\Theta^k_\sigma,\\
&\nabla h^{a\alpha\beta}_{i\sigma} + h^{a\gamma\beta}_i\Theta^\alpha_{\gamma\sigma} + h^{a\alpha\gamma}_i\Theta^\beta_{\gamma\sigma} - h^{a\alpha\beta\gamma}_{i\cdot k}p^k_\varepsilon\Theta^\varepsilon_{\gamma\sigma} = h^{a\alpha\beta}_{i\sigma k}\omega^k + h^{a\alpha\beta}_{i\sigma\gamma}\Theta^\gamma + h^{a\alpha\beta\gamma}_{i\sigma\cdot k}\Theta^k_\gamma,\\
&\nabla h^{a\alpha\beta\sigma}_{i\cdot j} = h^{a\alpha\beta\sigma}_{i\cdot jk}\omega^k + h^{a\alpha\beta\sigma}_{i\cdot j\gamma}\Theta^\gamma + h^{a\alpha\beta\sigma\gamma}_{i\cdot j\cdot k}\Theta^k_\gamma,\\
&\nabla h^a_k - h^{a\alpha\beta}_{lk}p^l_\gamma\Theta^\gamma_{\alpha\beta} + h^{a\alpha\beta}_{ik}p^s_\alpha p^j_\beta\omega^i_{sj} - h^{a\alpha\beta}_i p^s_\alpha p^j_\beta\omega^i_{sjk} + h^{a\sigma}_{\cdot j}\Theta^j_{\sigma k} =\\
&= h^a_{kj}\omega^j + h^a_{k\sigma}\Theta^\sigma + h^{a\sigma}_{k\cdot j}\Theta^j_\sigma,\\
&\nabla h^a_\beta - h^{a\alpha\sigma}_{l\beta}p^i_\gamma\Theta^i_\gamma\Theta^\gamma_{\alpha\beta} - h^{a\alpha\sigma}_l p^l_\gamma\Theta^\gamma_{\alpha\sigma\beta} - h^{a\alpha\sigma}_{i\beta}p^k_\alpha p^j_\sigma\omega^i_{jk} - h^{a\sigma}_{\cdot k}\Theta^k_{\sigma\beta} =\\
&= h^a_{\beta j}\omega^j + h^a_{\beta\gamma}\Theta^\gamma + h^{a\gamma}_{\beta\cdot k}\Theta^k_\gamma,\\
&\nabla h^{a\sigma}_{\cdot k} - h^{a\alpha\beta\sigma}_{i\cdot k}p^i_\gamma\Theta^\gamma_{\alpha\beta} - h^{a\alpha\beta}_k\Theta^\sigma_{\alpha\beta} - h^{a\alpha\beta\sigma}_{i\cdot k}p^s_\alpha p^j_\beta\omega^i_{sj} - 2h^{a\alpha\sigma}_i p^j_\alpha\omega^i_{jk} =\\
&= h^{a\sigma}_{\cdot kj}\omega^j + h^{a\sigma}_{\cdot k\gamma}\Theta^\gamma + h^{a\sigma\gamma}_{\cdot k\cdot j}\Theta^j_\gamma.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Оказывается, что исследование дифференциально-геометрического объекта $(h^{a\alpha\beta}_i, h^a)$ в общем виде затруднено (это видно из (1.10)), поэтому в настоящей работе рассмотрены отдельные классы систем дифференциальных уравнений вида (1.3).

§ 2. Геометрия одного квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка с частными производными

В этом случае дифференциально-геометрический объект $(h^{\alpha\beta}_i, h)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\nabla h^{\alpha\beta}_i = h^{\alpha\beta}_{ij}\omega^j + h^{\alpha\beta}_{i\gamma}\Theta^\gamma + h^{\alpha\beta\gamma}_{i\cdot k}\Theta^k_\gamma, \tag{2.1}$$

$$dh + h^{\alpha\beta}_i(\Theta^i_{\alpha\beta} - p^j_\beta\Theta^i_{\alpha j}) = h_i\omega^i + h_\alpha\Theta^\alpha + h^\gamma_{\cdot j}\Theta^j_\gamma \tag{2.2}$$

с частичным продолжением

$$\nabla h^{\alpha\beta}_{ij} - (h^{\alpha\beta}_s\delta^k_i + h^{\alpha\beta\gamma}_{i\cdot s}p^k_\gamma)\,\omega^s_{kj} \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \omega^i,\ \Theta^\alpha,\ \Theta^i_\alpha). \tag{2.3}$$

Рассмотрим тензор $h_i^{\alpha\beta}$. Если $n=\frac{m(m+1)}{2}$, то данный тензор можем рассматривать как квадратную матрицу (перестановка (α, β) — номер строки, i — номер столбца). В этом случае, если $\det \| h_i^{\alpha\beta} \| \neq 0$, можем говорить о существовании тензора $\overset{*}{h}{}^j_{\alpha\beta}$, который вместе с данным тензором $h_i^{\alpha\beta}$ удовлетворяет соотношениям

$$\overset{*}{h}{}^j_{\alpha\beta} h_i^{\alpha\beta} = \delta_i^j. \tag{2.4}$$

Из работы А. Е. Либера [6] непосредственно следует, что для симметричных по индексам α и β тензоров $h_i^{\alpha\beta}$ существует относительный инвариант (см. теорему на стр. 445), если $n \leqslant \binom{m+1}{2}$. Тогда на основании доказательств, приведенных в работе [6] (см. стр. 420), можем утверждать о существовании тензора $\overset{*}{h}{}^i_{\alpha\beta}$, удовлетворяющего тождествам

$$\overset{*}{h}{}^i_{\alpha\beta} h_i^{\alpha\gamma} = n\delta_\beta^\gamma,$$
$$\overset{*}{h}{}^i_{\alpha\beta} h_j^{\alpha\beta} = m\delta_j^i. \tag{2.5}$$

Для случая $n=\binom{m+1}{2}-1$ искомый инвариант строится явно, а именно, компоненты тензора $h_i^{\alpha\beta}$ располагаются в виде матрицы, строки которой состоят из компонент при фиксированном i. Совокупность определителей n-го порядка этой матрицы является совокупностью компонент связующей тензорной плотности $Z_{\alpha\beta}$, и искомый инвариант есть Det $(Z_{\alpha\beta})$.

Для $n=\binom{m+1}{2}$ таким инвариантом служит определитель, составленный из всех компонент тензора $h_i^{\alpha\beta}$.

Определим объекты аффинной и линейной связностей пространства m-мерных поверхностных элементов $K_{n,m}^{(1)}$ для некоторых классов систем дифференциальных уравнений.

1. Если $m<n$, $n=\frac{m(m+1)}{2}$, то, свертывая систему величин, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений (2.3), с тензором $\overset{*}{h}{}^r_{\alpha\beta}$ получим

$$\nabla(\overset{*}{h}{}^r_{\alpha\beta} h_{ij}^{\alpha\beta}) - Q_{si}^{rk}\omega_{kj}^s \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \omega^i,\ \Theta^\alpha,\ \Theta_\alpha^{il}), \tag{2.6}$$

где

$$Q_{si}^{rk} = \delta_s^r \delta_i^k + \overset{*}{h}{}^r_{\alpha\beta} h_{i\cdot s}^{\alpha\beta\gamma} p_\gamma^k. \tag{2.7}$$

Полагая, что $\det \| Q_{si}^{rk} \| \neq 0$, можем говорить о существовании тензора $\overset{*}{Q}{}^{iq}_{pr}$, который вместе с данным тензором Q_{si}^{rk} удовлетворяет соотношениям

$$\overset{*}{Q}{}^{iq}_{pr} Q_{si}^{rk} = \delta_s^q \delta_p^k. \tag{2.8}$$

Из формул (2.6) и (2.8) следует, что система величин

$$\Gamma_{pj}^q = \overset{*}{Q}{}^{iq}_{pr} \overset{*}{h}{}^r_{\alpha\beta} h_{ij}^{\alpha\beta} \tag{2.9}$$

является объектом аффинной связности, соответствующим формам

$$\tilde{\omega}_j^i = \omega_j^i + \Gamma_{jk}^i \omega^k, \tag{2.10}$$

и охватывается первым дифференциальным продолжением подобъекта $h_i^{\alpha\beta}$

Система величин

$$N^s_{\alpha k} = \Gamma^s_{jk} p^j_\alpha \tag{2.11}$$

удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\nabla N^s_{\alpha k} - \Theta^s_{\alpha k} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^i,\ \Theta^\alpha,\ \Theta^i_\alpha)$$

и является объектом линейной связности пространства m-мерных поверхностных элементов $K^{(1)}_{n,m}$, соответствующим формам

$$\bar{\Theta}^i_\alpha = \Theta^i_\alpha + N^i_{\alpha k} \omega^k, \tag{2.12}$$

с тем же порядком охвата.

Рассмотрим систему функций

$$H^{\alpha\beta}_{i\sigma} = h^{\alpha\beta}_{ij} p^j_\sigma, \tag{2.13}$$

которая, на основании формулы (2.3), удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\nabla H^{\alpha\beta}_{i\sigma} - (h^{\alpha\beta}_j \delta^k_i + h^{\alpha\beta\gamma}_{i \cdot j} p^k_\gamma)\, \Theta^j_{\sigma k} = H^{\alpha\beta}_{i\sigma k} \omega^k + H^{\alpha\beta}_{i\sigma\gamma} \Theta^\gamma + H^{\alpha\beta\gamma}_{i\sigma\cdot k} \Theta^k_\gamma, \tag{2.14}$$

где

$$H^{\alpha\beta\gamma}_{i\sigma\cdot k} = h^{\alpha\beta}_{ik} \delta^\gamma_\sigma + h^{\alpha\beta\gamma}_{ij\cdot k} p^j_\sigma. \tag{2.15}$$

Свертывая систему величин (2.13) с тензором $\overset{*}{h}{}^r_{\alpha\beta}$ и учитывая соотношения (2.5), получим систему функций, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений

$$\nabla (H^{\alpha\beta}_{i\sigma} \overset{*}{h}{}^r_{\alpha\beta}) - Q^{rk}_{li} \Theta^l_{\sigma k} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^i,\ \Theta^\alpha,\ \Theta^i_\alpha), \tag{2.16}$$

где

$$Q^{rk}_{li} = \delta^r_l \delta^k_i + \overset{*}{h}{}^r_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta\gamma}_{i\cdot l} p^k_\gamma. \tag{2.17}$$

Если $\det \| Q^{rk}_{li} \| \neq 0$, то можем предполагать существование тензора $\overset{*}{Q}{}^{is}_{pr}$, причем удовлетворены соотношения типа (2.8). Свертывая систему величин, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений (2.16) с $\overset{*}{Q}{}^{is}_{pr}$, получим

$$\nabla N^s_{\sigma p} - \Theta^s_{\sigma p} = N^s_{\sigma p k} \omega^k + N^s_{\sigma p \gamma} \Theta^\gamma + N^{s\gamma}_{\sigma p\cdot k} \Theta^k_\gamma, \tag{2.18}$$

где система величин

$$N^s_{\sigma p} = H^{\alpha\beta}_{i\sigma} \overset{*}{h}{}^r_{\alpha\beta} \overset{*}{Q}{}^{is}_{pr} \tag{2.19}$$

является объектом линейной связности, соответствующим формам типа (2.12) и охватываемым первым дифференциальным продолжением подобъекта $h^{\alpha\beta}_i$, причем

$$N^s_{\sigma p\cdot k}{}^\gamma = (H^{\alpha\beta\gamma}_{i\sigma\cdot k} \overset{*}{h}{}^r_{\alpha\beta} + H^{\alpha\beta}_{i\sigma} \overset{*}{h}{}^r_{\alpha\beta\cdot k}{}^\gamma)\, \overset{*}{Q}{}^{is}_{pr} + H^{\alpha\beta}_{i\sigma} \overset{*}{h}{}^r_{\alpha\beta} \overset{*}{Q}{}^{is}_{pr\cdot k}{}^\gamma. \tag{2.20}$$

Система величин

$$\Gamma^s_{kp} = \frac{1}{m} N^{s\gamma}_{\gamma p\cdot k} \tag{2.21}$$

является объектом аффиной связности, соответствующим формам типа (2.10) и охватываемым вторым дифференциальным продолжением подобъекта $h^{\alpha\beta}_i$. Из формулы (2.20) видно, что объект аффинной связности (2.21) содержит объект аффинной связности (2.9).

Аналогичные расчеты проведены и для случая $m<n<\binom{m+1}{2}$. В этом случае тензор Q_{li}^{rk} имеет вид

$$Q_{li}^{rk}=m\delta_l^r\delta_i^k+\overset{*}{h}{}_{\alpha\beta}^{r}h_{i\cdot l}^{\alpha\beta\gamma}p_\gamma^k. \tag{2.22}$$

Таким образом, доказана теорема.

Теорема 1. *Если* $r=1$, $n=\frac{m(m+1)}{2}$ *или* $m<n<\binom{m+1}{2}$ *и* $\det\|Q_{li}^{rk}\|\neq 0$, *то всегда существует объект линейной связности* (2.19), *определенный формами вида* (2.12) *и охватываемый первым дифференциальным продолжением подобъекта* $h_i^{\alpha\beta}$. *Дифференциальное продолжение объекта* (2.19) *дает объект аффинной связности* (2.21), *охватываемый вторым дифференциальным продолжением подобъекта* $h_i^{\alpha\beta}$.

Замечание. Объект аффинной связности (2.9), полученный непосредственным свертыванием системы величин $h_{ij}^{\alpha\beta}$, удовлетворяющих уравнению системы (2.3) с тензором $\overset{*}{h}{}_{\alpha\beta}^{r}$, охватывается первым дифференциальным продолжением подобъекта $h_i^{\alpha\beta}$ и входит в состав объекта аффинной связности (2.21).

2. Если $h_i^{\alpha\beta}=h_i^{\alpha\beta}(x^j,\ u^\gamma)$, то система дифференциальных уравнений (2.1) примет вид

$$\begin{gathered}\nabla h_i^{\alpha\beta}=h_{ij}^{\alpha\beta}\omega^j+h_{i\gamma}^{\alpha\beta}\Theta^\gamma,\\ dh+h_i^{\alpha\beta}(\Theta_{\alpha\beta}^i-p_\beta^k\Theta_{\alpha k}^i)=h_i\omega^i+h_\alpha\Theta^\alpha+h_{\cdot i}^{\gamma}\Theta_\gamma^i,\end{gathered} \tag{2.1'}$$

а ее частичное продолжение дает

$$\begin{gathered}\nabla_{ik}^{\alpha\beta}-h_j^{\alpha\beta}\omega_{ik}^j\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ \omega^i,\ \Theta^\alpha),\\ \nabla h_{i\gamma}^{\alpha\beta}+h_i^{\sigma\beta}\Theta_{\sigma\gamma}^{\alpha}+h_i^{\alpha\sigma}\Theta_{\sigma\gamma}^{\beta}\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ \ \omega^i,\ \Theta^\alpha).\end{gathered} \tag{2.23}$$

Рассмотрим систему функций

$$H_{\gamma j}^{\alpha\beta}=h_{ij}^{\alpha\beta}p_\gamma^i, \tag{2.24}$$

удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений

$$\nabla H_{\gamma j}^{\alpha\beta}-h_i^{\alpha\beta}\Theta_{\gamma j}^i=H_{\gamma jk}^{\alpha\beta}\omega^k+H_{\gamma j\sigma}^{\alpha\beta}\Theta^\sigma+H_{\gamma j\cdot k}^{\alpha\beta\sigma}\Theta_\sigma^k.$$

Так как для тензора $h_i^{\alpha\beta}$ при $n=\frac{m(m+1)}{2}$ существует тензор $\overset{*}{h}{}_{\alpha\beta}^{l}$, удовлетворяющий равенствам (2.4), то, свертывая систему величин (2.24) с тензором $\overset{*}{h}{}_{\alpha\beta}^{l}$, получим систему величин

$$N_{\gamma j}^{l}H_{\gamma j}^{\alpha\beta}\overset{*}{h}{}_{\alpha\beta}^{l},\qquad N_{\gamma j}^{l}=N_{\gamma j}^{l}(x^k,\ u^\alpha,\ p_\alpha^k), \tag{2.25}$$

которая является объектом линейной связности пространства $K_{n,m}^{(1)}$, охватываемым первым продолжением подобъекта $h_i^{\alpha\beta}$ и удовлетворяющим системе дифференциальных уравнений

$$\nabla N_{\gamma j}^{l}-\Theta_{\gamma j}^{l}=N_{\gamma jk}^{l}\omega^k+N_{\gamma j\sigma}^{l}\Theta^\sigma+N_{\gamma j\cdot k}^{l\sigma}\Theta_\sigma^k,$$

где

$$N_{\gamma j\cdot k}^{l\gamma}=mh_{kj}^{\alpha\beta}\overset{*}{h}{}_{\alpha\beta}^{l}.$$

Частичное продолжение объекта линейной связности (2.25) дает объект аффинной связности

$$\Gamma_{jk}^{l}=\frac{1}{m}N_{\gamma j\cdot k}^{l\gamma}. \tag{2.26}$$

Объект аффинной связности Γ^{l}_{jk} может быть получен непосредственным свертыванием системы величин $h^{\alpha\beta}_{ik}$ (удовлетворяющих первому уравнению системы (2.23)) с тензором $\overset{*}{h}{}^{l}_{\alpha\beta}$ и с учетом соотношения (2.4). Оказывается, что таким образом полученный объект аффинной связности совпадает с объектом аффинной связности (2.26) и охватывается первым дифференциальным продолжением подобъекта $h^{\alpha\beta}_{i}$.

Аналогично находится объект аффинной связности типа (2.26) при $m<n\leqslant\leqslant\binom{m+1}{2}$ и имеют место вышеуказанные совпадения объекта аффинной связности вида (2.26) и объекта, полученного непосредственно из первого уравнения системы (2.23).

Сравнивая выражения (2.21), (2.9) и учитывая формулы (2.13), (2.15) и (2.20), получим условие для совпадения связностей (2.21) и (2.9):

$$(h^{\alpha\beta\gamma}_{ij\cdot k}\overset{*}{h}{}^{r}_{\alpha\beta}+h^{\alpha\beta}_{ij}\overset{*}{h}{}^{r\gamma}_{\alpha\beta\cdot k})\overset{*}{Q}{}^{is}_{pr}+h^{\alpha\beta}_{ik}\overset{*}{h}{}^{r}_{\alpha\beta}\overset{*}{Q}{}^{is\gamma}_{pr\cdot k}=0.$$

Из этого условия следует, что для совпадения объектов аффинных связностей (2.21) и (2.9) достаточно, чтобы было удовлетворено условие $h^{\alpha\beta}_{i}=h^{\alpha\beta}_{i}(x^{j}, u^{\gamma})$.

Примечание. Оказывается, что в данном случае можно построить обобщенную аффинную связность пространства $K^{(1)}_{n,m}$, соответствующую формам

$$\tilde{\omega}^{i}_{j}=\omega^{i}_{j}+\Gamma^{i}_{jk}\omega^{k}+C^{i}_{j\alpha}\Theta^{\alpha}. \tag{2.27}$$

Известно, что для того, чтобы эта связность существовала при заданном объекте аффинной связности (2.21), необходимо и достаточно чтобы система величин $C^{i}_{j\alpha}$ была тензором, т. е. удовлетворяла системе дифференциальных уравнений

$$\nabla C^{i}_{j\alpha}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \omega^{i},\ \Theta^{\alpha},\ \Theta^{i}_{\alpha}). \tag{2.28}$$

Для отыскания тензора $C^{i}_{j\alpha}$ рассмотрим тензор

$$S^{\alpha\beta}_{l\varepsilon\mu}=h^{\alpha\beta\gamma\sigma}_{l\cdot j\cdot k}\overset{*}{h}{}^{j}_{\gamma\varepsilon}\overset{*}{h}{}^{k}_{\sigma\mu}. \tag{2.29}$$

Свертывая полученный тензор по любому индексу α или β и по любому нижнему индексу ε или μ (так как в данном случае имеет место симметричность по верхним и по последним двум нижним индексам), получим тензор $S^{\alpha\beta}_{l\varepsilon}$, свертывая который с тензором p^{j}_{α}, получим искомый тензор

$$C^{j}_{i\varepsilon}=S^{\alpha\beta}_{i\varepsilon\beta}p^{j}_{\alpha}, \tag{2.30}$$

удовлетворяющий системе дифференциальных уравнений (2.28) и охватываемый вторым дифференциальным продолжением подобъекта $h^{\alpha\beta}_{i}$.

§ 3. Случаи $r=m$ и $n=\frac{rm(m+1)}{2}$

Рассмотрим некоторые частные случаи систем дифференциальных уравнений (1.3).

1. Рассмотрим тензор

$$X^{\alpha\beta}=h^{\alpha\alpha\beta}_{i}p^{i}_{\alpha}, \tag{3.1}$$

удовлетворяющий системе дифференциальных уравнений

$$\nabla X^{a\beta}=X_i^{a\beta}\omega^i+X_\gamma^{a\beta}\Theta^\gamma+X^{a\beta\gamma}_{\cdot i}\Theta^i_\gamma \tag{3.2}$$

с дифференциальным продолжением

$$\nabla X^{a\beta}_k-X^{a\beta\gamma}_{\cdot j}p^s_\gamma\omega^j_{sk}\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\omega^i,\ \Theta^\alpha,\ \Theta^i_\alpha),$$

$$\nabla X^{a\beta}_\gamma+X^{a\sigma}\Theta^\beta_{\sigma\gamma}-X^{a\beta\sigma}_{\cdot k}p^k_\varepsilon\Theta^\varepsilon_{\sigma\gamma}\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\omega^i,\ \Theta^\alpha,\ \Theta^i_\alpha),$$

$$\nabla X^{a\beta\gamma}_{\cdot k}\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\omega^i,\ \Theta^\alpha,\ \Theta^i_\alpha). \tag{3.3}$$

Если $r=m$, $m<n$, то для тензора $X^{a\beta}$ можно построить (при условии $\det\|X^{a\beta}\|\neq 0$) обратный тензор $\overset{*}{X}_{a\beta}$, удовлетворяющий условиям

$$\overset{*}{X}_{a\sigma}X^{a\beta}=\delta^\beta_\sigma.$$

Так как второе уравнение системы (3.3) можно переписать в виде

$$\nabla X^{a\beta}_\gamma-(-X^{a\sigma}\delta^\beta_\varepsilon+X^{a\beta\sigma}_{\cdot k}p^k_\varepsilon)\,\Theta^\varepsilon_{\sigma\gamma}\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\omega^i,\ \Theta^\alpha,\ \Theta^i_\alpha),$$

то свертывая систему величин $X^{a\beta}_\gamma$ с тензором $\overset{*}{X}_{a\tau}$, получим

$$\nabla(\overset{*}{X}_{a\tau}X^{a\beta}_\gamma)-\Pi^{\sigma\beta}_{\tau\varepsilon}\Theta^\varepsilon_{\sigma\gamma}\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\omega^i,\ \Theta^\alpha,\ \Theta^i_\alpha), \tag{3.4}$$

где

$$\Pi^{\sigma\beta}_{\tau\varepsilon}=-\delta^\sigma_\tau\delta^\beta_\varepsilon+\overset{*}{X}_{a\tau}X^{a\beta\sigma}_{\cdot k}p^k_\varepsilon. \tag{3.5}$$

Если $\det\|\Pi^{\sigma\beta}_{\tau\varepsilon}\|\neq 0$, то для тензора $\Pi^{\sigma\beta}_{\tau\varepsilon}$ существует такой обратный тензор $\overset{*}{\Pi}{}^{\nu\tau}_{\beta\mu}$, что имеет место равенство

$$\Pi^{\sigma\beta}_{\tau\varepsilon}\overset{*}{\Pi}{}^{\nu\tau}_{\beta\mu}=\delta^\nu_\varepsilon\delta^\sigma_\mu. \tag{3.6}$$

Из (3.5) и (3.6) следует

$$\nabla\Gamma^\nu_{\mu\gamma}-\Theta^\nu_{\mu\gamma}\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\omega^i,\ \Theta^\alpha,\ \Theta^i_\alpha),$$

где

$$\Gamma^\nu_{\mu\gamma}=\overset{*}{X}_{a\tau}X^{a\beta}_\gamma\overset{*}{\Pi}{}^{\nu\tau}_{\beta\mu} \tag{3.7}$$

является объектом аффинной связности, охватываемым первым дифференциальным продолжением подобъекта $h_i^{a\alpha\beta}$ и соответствующим формам

$$\tilde\Theta^\alpha_\beta=\Theta^\alpha_\beta+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\Theta^\gamma. \tag{3.7$'$}$$

Свертывая систему величин (3.7) с тензором p^i_ν, получим величины

$$M^i_{\mu\gamma}=-\Gamma^\nu_{\mu\gamma}p^i_\nu, \tag{3.8}$$

удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений

$$\nabla M^i_{\mu\gamma}-\Theta^i_{\mu\gamma}\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,(\omega^i,\ \Theta^\alpha,\ \Theta^i_\alpha),$$

т. е. являющиеся объектом линейной связности пространства $K^{(1)}_{n,m}$, охватываемым первым дифференциальным продолжением подобъекта $h_i^{a\alpha\beta}$. Эта связность соответствует формам

$$\tilde\Theta^i_\alpha=\Theta^i_\alpha+M^i_{\alpha\beta}\Theta^\beta. \tag{3.8$'$}$$

Заменяя формы Θ^α_β и Θ^i_α формами (3.7′) и (3.8′) в первом дифференциальном уравнении системы (1.9), получим

$$dh_i^{a\alpha\beta}-h_j^{a\alpha\beta}\omega^j_i+h_i^{b\alpha\beta}\Theta^a_b+h_i^{a\tau\beta}\tilde\Theta^\alpha_\tau+h_i^{a\alpha\tau}\tilde\Theta^\beta_\tau=$$

$$=h^{a\alpha\beta}_{ik}\omega^k+(\overset{\Gamma}{\nabla}_\gamma h_i^{a\alpha\beta})\,\Theta^\gamma+h^{a\alpha\beta\gamma}_{i\cdot j}\tilde\Theta^j_\gamma, \tag{3.9}$$

где

$$\overset{\Gamma}{\nabla}_\gamma h_i^{a\alpha\beta} = h_{i\gamma}^{a\alpha\beta} + h_i^{a\tau\beta}\Gamma_{\tau\gamma}^{\alpha} + h_i^{a\alpha\tau}\Gamma_{\tau\gamma}^{\beta} - h_{i\cdot j}^{a\alpha\beta\sigma} M_{\sigma\gamma}^{j}. \tag{3.10}$$

Из второго уравнения системы (1.10) и из систем дифференциальных уравнений объектов (3.7) и (3.8) следует, что система величин (3.10) является тензором.

Рассмотрим тензор

$$H_i^{a\alpha} = \overset{\Gamma}{\nabla}_\beta h_i^{a\alpha\beta}, \tag{3.11}$$

удовлетворяющий системе дифференциальных уравнений

$$\nabla H_i^{a\alpha} = H_{ij}^{a\alpha}\omega^j + H_{i\beta}^{a\alpha}\Theta^\beta + H_{i\cdot j}^{a\alpha\beta}\Theta_\beta^j$$

с частичным продолжением

$$\nabla H_{ij}^{a\alpha} - (H_l^{a\alpha}\delta_i^k + H_{i\cdot l}^{a\alpha\beta} p_\beta^k)\,\omega_{kj}^l \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\,\omega^i,\ \Theta^\alpha,\ \Theta_\alpha^i). \tag{3.12}$$

Из работы В. И. Близникаса [3] известно, что при $m = nr$ или $m < nr$ для тензора $H_i^{a\alpha}$ можем предполагать существование тензора $\overset{*}{H}{}_{a\alpha}^{i}$, связанного с данным тензором следующими соотношениями

$$\begin{aligned}
&\overset{*}{H}{}_{a\alpha}^{i} H_j^{a\alpha} = mr\delta_j^i,\\
&\overset{*}{H}{}_{a\beta}^{i} H_i^{a\alpha} = nr\delta_\beta^\alpha,\\
&\overset{*}{H}{}_{b\alpha}^{i} H_i^{a\alpha} = mn\delta_b^a.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Так как в нашем случае $r = m$ и $m < n$, то необходимое условие $m < nr$ всегда будет выполнено, т. е. возможно предположение существования тензора $\overset{*}{H}{}_{a\alpha}^{s}$.

Свертывая систему величин $H_{ij}^{a\alpha}$ с $\overset{*}{H}{}_{a\alpha}^{s}$ и учитывая (3.13), получим

$$\nabla(\overset{*}{H}{}_{a\alpha}^{s} H_{ij}^{a\alpha}) - \Pi_{li}^{sk}\omega_{k\,j}^{l} \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\omega^i,\ \Theta^\alpha,\ \Theta_\alpha^i), \tag{3.14}$$

где

$$\Pi_{li}^{sk} = mr\delta_l^s\delta_i^k + \overset{*}{H}{}_{a\alpha}^{s} H_{i\cdot l}^{a\alpha\beta} p_\beta^k. \tag{3.15}$$

Если $\det \| \Pi_{li}^{sk} \| \neq 0$, то для тензора Π_{li}^{sk} существует такой тензор $\overset{*}{\Pi}{}_{ns}^{im}$, что имеют место равенства типа (2.8).

Из (3.14), (3.15) и (2.8) следует, что система величин

$$\cdot\,\Gamma_{n\,j}^{m} = \overset{*}{H}{}_{a\alpha}^{s} H_{ij}^{a\alpha} \overset{*}{\Pi}{}_{ns}^{im} \tag{3.16}$$

удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\nabla\Gamma_{nj}^{m} - \omega_{nj}^{m} \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\omega^i,\ \Theta^\alpha,\ \Theta_a^i),$$

т. е. является объектом аффинной связности, соответствующим формам типа (2.10). Полученный объект аффинной связности охватывается вторым дифференциальным продолжением подобъекта $h_i^{a\alpha\beta}$.

Свертывая объект аффинной связности (3.16) с тензором p_α^n, получим объект линейной связности пространства $K_{n,m}^{(1)}$.

$$N_{\alpha j}^{m} = \Gamma_{nj}^{m} p_\alpha^n, \tag{3.17}$$

соответствующий формам (2.12) с тем же порядком охвата, что и объект (3.16).

Наличие аффинной связности (3.7) и (3.16) индуцирует линейную связность пространства $K^{(1)}_{n,m}$ ((3.8), (3.17)) со вторым порядком охвата подобъектом $h^{a\alpha\beta}_i$, соответствующую формам

$$\overset{0}{\Theta}{}^i_\alpha=\Theta^i_\alpha+N^i_{\alpha k}\omega^k+M^i_{\alpha\beta}\Theta^\beta. \tag{3.17'}$$

Итак, доказана теорема.

Теорема 2. *Если* $r=m$, $m<n$, $\det\|X^{a\beta}\|\neq 0$, $\det\|\Pi^{\sigma\beta}_{\tau\varepsilon}\|\neq 0$ и $\det\|\Pi^{sk}_{il}\|\neq 0$, *то внутренним образом индуцируются аффинные связности* (3.7), (3.16), *охваченные соответственно первым и вторым дифференциальным продолжением подобъекта* $h^{a\alpha\beta}_i$ *и линейные связности пространства* $K^{(1)}_{n,m}$ (3.8), (3.17) *соответственно с тем же порядком охвата.*

2. Если $n=\frac{r\,m(m+1)}{2}$, то тензор $h^{a\alpha\beta}_i$ можем рассматривать как квадратную матрицу (i — номер строки, перестановка (a, α, β) — номер столбца). Тогда для тензора $h^{a\alpha\beta}_i$ можем предполагать наличие обратного тензора $\overset{*}{h}{}^q_{a\alpha\beta}$, причем

$$\overset{*}{h}{}^q_{a\alpha\beta}h^{a\alpha\beta}_i=\delta^q_i.$$

Рассмотрим систему функций $h^{a\alpha\beta}_{ij}\,p^j_\gamma$, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений

$$\nabla(h^{a\alpha\beta}_{ij}p^j_\gamma)-(h^{a\alpha\beta}_k\delta^l_i+h^{a\alpha\beta\sigma}_{i\cdot k}p^l_\sigma)\,\Theta^k_{\gamma l}\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\omega^i,\ \Theta^\alpha,\ \Theta^i_\alpha). \tag{3.18}$$

Свертывая полученное выражение с тензором $\overset{*}{h}{}^q_{a\alpha\beta}$, имеем выражение $h^{a\alpha\beta}_{ij}p^j_\gamma\times$ $\times\overset{*}{h}{}^q_{a\alpha\beta}$, удовлетворяющее системе дифференциальных уравнений

$$\nabla(h^{a\alpha\beta}_{ij}p^j_\gamma\overset{*}{h}{}^q_{a\alpha\beta})-M^{ql}_{ki}\Theta^k_{\gamma l}\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\omega^i,\ \Theta^\alpha,\ \Theta^i_\alpha), \tag{3.19}$$

где

$$M^{ql}_{ki}=\delta^q_k\delta^l_i+\overset{*}{h}{}^q_{a\alpha\beta}h^{a\alpha\beta\sigma}_{i\cdot k}p^l_\sigma. \tag{3.20}$$

Если $\det\|M^{ql}_{ki}\|\neq 0$, то для тензора M^{ql}_{ki} можем определить такой тензор $\overset{*}{M}{}^{in}_{mq}$, что имеют место соотношения (2.8). Из (3.19) и (2.8) следует, что система величин

$$N^n_{\gamma m}=\overset{*}{h}{}^q_{a\alpha\beta}h^{a\alpha\beta}_{ij}p^j_\gamma\overset{*}{M}{}^{in}_{mq} \tag{3.21}$$

является объектом линейной связности пространства $K^{(1)}_{n,m}$, соответствующим формам типа (2.12) и охватываемым первым дифференциальным продолжением подобъекта $h^{a\alpha\beta}_i$. Его дифференциальное продолжение дает объект аффинной связности

$$\Gamma^i_{jk}=\frac{1}{m}N^{i\gamma}_{\gamma j\cdot k}, \tag{3.22}$$

соответствующий формам типа (2.10) и охватываемый вторым дифференциальным продолжением подобъекта $h^{a\alpha\beta}_i$.

Необходимо заметить, что, свертывая непосредственно систему величин, удовлетворяющих первому уравнению системы (1.10), с тензором $\overset{*}{h}{}^q_{a\alpha\beta}$ и предполагая невырожденность тензора (3.20), получим объект аффинной связности

$$\Gamma^n_{mj} = \overset{*}{h}{}^q_{\alpha\beta} h^{\alpha\alpha\beta}_{ij} \overset{*}{M}{}^{in}_{mq}, \tag{3.23}$$

охватываемый первым дифференциальным продолжением подобъекта $h^{\alpha\alpha\beta}_i$. Наличие объекта аффинной связности (3.23) дает объект линейной связности

$$N^n_{\alpha j} = \Gamma^n_{mj} p^m_\alpha. \tag{3.24}$$

Заменяя формы ω^i_j и Θ^i_α формами $\tilde{\omega}^i_j$ и $\tilde{\Theta}^i_\alpha$ в третьем уравнении системы (1.10), получим тензор

$$\overset{\Gamma}{\nabla}_k h^{\alpha\alpha\beta\sigma}_{i\cdot j} = h^{\alpha\alpha\beta\sigma}_{i\cdot jk} - h^{\alpha\alpha\beta\sigma\gamma}_{i\cdot j\cdot l} N^l_{\gamma k} - h^{\alpha\alpha\beta\sigma}_{l\cdot j}\Gamma^l_{ik} - h^{\alpha\alpha\beta\sigma}_{i\cdot l}\Gamma^l_{jk}. \tag{3.25}$$

Тогда существует тензор

$$H^\sigma_{kj} = (\overset{\Gamma}{\nabla}_k h^{\alpha\alpha\beta\sigma}_{i\cdot j})\, \overset{*}{h}{}^i_{\alpha\alpha\beta}, \tag{3.26}$$

удовлетворяющий системе дифференциальных уравнений

$$\nabla H^\sigma_{kj} = H^\sigma_{kjl}\omega^l + H^\sigma_{kj\alpha}\Theta^\alpha + H^{\sigma\gamma}_{kj\cdot i}\Theta^i_\gamma$$

и частичным продолжением

$$\nabla H^\sigma_{kj\alpha} - (-H^\beta_{kj}\delta^\sigma_\tau + H^\sigma_{kj\cdot l}{}^\beta p^l_\tau)\,\Theta^\tau_{\beta\alpha} \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\omega^i,\ \Theta^\alpha,\ \Theta^i_\alpha). \tag{3.27}$$

На основании теоремы (см. [6], стр. 455) для тензора H^β_{kj} существует тензор $\overset{*}{H}{}^{kj}_\mu$ и такой, что справедливы соотношения вида (2.5). Из (3.27) и вышесказанного следует, что

$$\nabla(\overset{*}{H}{}^{kj}_\mu H^\sigma_{kj\alpha}) - R^{\beta\sigma}_{\mu\tau}\Theta^\tau_{\beta\alpha} \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\omega^i,\ \Theta^\alpha,\ \Theta^i_\alpha), \tag{3.28}$$

где

$$R^{\beta\sigma}_{\mu\tau} = -n\delta^\beta_\mu\delta^\sigma_\tau + \overset{*}{H}{}^{kj}_\mu H^{\sigma\beta}_{kj\cdot i} p^i_\tau. \tag{3.29}$$

Если $\det \| R^{\beta\sigma}_{\mu\tau} \| \neq 0$, то для тензора $R^{\beta\sigma}_{\mu\tau}$ можем предполагать существование тензора $\overset{*}{R}{}^{\gamma\mu}_{\sigma\varepsilon}$ и из последней системы дифференциальных уравнений следует, что система величин

$$\Gamma^\gamma_{\varepsilon\alpha} = \overset{*}{R}{}^{\gamma\mu}_{\sigma\varepsilon}\overset{*}{H}{}^{kj}_\mu H^\sigma_{kj\alpha} \tag{3.30}$$

является объектом аффинной связности, соответствующим формам типа (3.7′) и охваченным дифференциальными продолжениями подобъекта $h^{\alpha\alpha\beta}_i$ порядка не выше третьего (если использована связность (3.23), то охват второго порядка). Система величин

$$M^i_{\alpha\beta} = -\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} p^i_\gamma \tag{3.31}$$

определяет объект связности, соответствующий формам вида (3.8′) с тем же порядком охвата.

Замечание. Возможно непосредственное построение объекта связности $M^i_{\alpha\beta}$. Тогда объект аффинной связности $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ получается продолжением объекта $M^i_{\alpha\beta}$, но порядок охвата объекта $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ подобъектом $h^{\alpha\alpha\beta}_l$ повышается.

Итак, в данном случае существует обобщенная связность, соответствующая формам вида (3.17′).

Таким образом, доказана теорема.

Теорема 3. *Если* $n=\frac{rm(m+1)}{2}$, $\det\|h_i^{a\alpha\beta}\|\neq 0$, $\det\|M_{ki}^{al}\|\neq 0$ *и* $\det\|R_{\mu\tau}^{\beta\sigma}\|\neq\neq 0$, *то существует обобщенная линейная связность пространства* $K_{n,m}^{(1)}$ ((3.24), (3.31)), *линейные связности* (3.24), (3.31), *охватываемые соответственно дифференциальными продолжениями первого и второго порядка подобъекта* $h_i^{a\alpha\beta}$ *и индуцирующие аффинные связности* Γ_{jk}^i *и* $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ *с порядком охвата на единицу выше.*

Имеет место и обратное утверждение: существуют аффинные связности Γ_{jk}^i и $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$, охваченные соответственно дифференциальными продолжениями первого и второго порядка подобъекта $h_i^{a\alpha\beta}$, которые индуцируют обобщенную линейную связность $(N_{\alpha k}^i, M_{\alpha\beta}^i)$.

§ 4. Случай $h_i^{a\alpha\beta}=h_i^{a\alpha\beta}(x^j u^\gamma)$

Если $h_i^{a\alpha\beta}=h_i^{a\alpha\beta}(x^j,\ u^\gamma)$ и $h^a=h^a(x^j,\ u^\alpha,\ p_\alpha^j)$, то система дифференциальных уравнений (1.9) примет вид

$$\begin{aligned}&\nabla h_i^{a\alpha\beta}=h_{ik}^{a\alpha\beta}\omega^k+h_{i\gamma}^{a\alpha\beta}\Theta^\gamma,\\ &\nabla h^a+h_i^{a\alpha\beta}(\Theta_{\alpha\beta}^i-p_\beta^l\Theta_{\alpha l}^i)=h_k^a\omega^k+h_\beta^a\Theta^\beta+h_{\cdot k}^{a\beta}\Theta_\beta^k,\end{aligned}\tag{1.9'}$$

а первое, второе и последнее уравнения системы (1.10) примут вид

$$\begin{aligned}&\nabla h_{ik}^{a\alpha\beta}-h_j^{a\alpha\beta}\omega_{ik}^j=h_{ikl}^{a\alpha\beta}\omega^l+h_{ik\gamma}^{a\alpha\beta}\Theta^\gamma,\\ &\nabla h_{i\gamma}^{a\alpha\beta}+h_i^{a\varepsilon\beta}\Theta_{\varepsilon\gamma}^\alpha+h_i^{a\alpha\varepsilon}\Theta_{\varepsilon\gamma}^\beta=h_{i\gamma j}^{a\alpha\beta}\omega^j+h_{i\gamma\sigma}^{a\alpha\beta}\Theta^\sigma,\\ &\nabla h_{\cdot k}^{a\sigma}-h_k^{a\alpha\beta}\Theta_{\alpha\beta}^\sigma-2h_i^{a\alpha\sigma}p_\sigma^s\omega_{sk}^i=h_{\cdot kl}^{a\sigma}\omega^l+h_{\cdot k\gamma}^{a\sigma}\Theta^\gamma+h_{\cdot k\cdot l}^{a\sigma\gamma}\Theta_\gamma^l.\end{aligned}\tag{4.1}$$

1. Если $nr=\frac{m(m+1)}{2}$, то на элементы тензора $h_i^{a\alpha\beta}$ можно смотреть как на квадратную матрицу (перестановка (α,β) — номер строки, (^a_i) — номер столбца). Будем рассматривать случай невырожденной квадратной матрицы ($h=\det\|h_i^{a\alpha\beta}\|\neq 0$). В этом случае рассмотрим величину

$$H=h^{\mathfrak{a}}\ (\mathfrak{a}\text{ — рациональное число}).$$

Если H является относительным инвариантом веса (λ,μ,ν), то

$$d\ln H+\lambda\omega_k^k+\mu\Theta_\alpha^\alpha+\nu\Theta_a^a=H_l\omega^l+H_\alpha\Theta^\alpha.\tag{4.2}$$

Рассмотрим величины

$$\overset{*}{h}{}_{a\alpha\beta}^l=\frac{\partial\ln H}{\partial h_l^{a\alpha\beta}},$$

которые образуют тензор и удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\nabla\overset{*}{h}{}_{a\alpha\beta}^l=\overset{*}{h}{}_{a\alpha\beta k}\omega^k+\overset{*}{h}{}_{a\alpha\beta\gamma}^l\Theta^\gamma.\tag{4.3}$$

Так как $d\ln H=\overset{*}{h}{}_{a\alpha\beta}^l\,dh_l^{a\alpha\beta}$, то в силу первого уравнения системы (1.9′) и (4.2), подбирая соответствующим образом $\mathfrak{a}$ (при $\mathfrak{a}=m$), получим следующие равенства:

$$\begin{aligned}&\overset{*}{h}{}_{a\alpha\beta}^l h_k^{a\alpha\beta}=m^2r\delta_k^l,\\ &\overset{*}{h}{}_{a\alpha\beta}^l h_l^{b\alpha\beta}=m^2n\delta_a^b,\\ &\overset{*}{h}{}_{a\alpha\beta}^l h_l^{a\gamma\beta}=nmr\delta_\alpha^\gamma.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Рассмотрим систему функций

$$H^{\alpha\alpha\beta}_{\gamma k}=h^{\alpha\alpha\beta}_{ik}p^i_\gamma,$$

удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений

$$\nabla H^{\alpha\alpha\beta}_{\gamma k}-h^{\alpha\alpha\beta}_{s}\Theta^s_{\gamma k}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \omega^i,\ \Theta^\alpha,\ \Theta^i_\alpha).$$

Свертывая систему функций $H^{\alpha\alpha\beta}_{\gamma k}$ с тензором $\overset{*}{h}{}^l_{\alpha\alpha\beta}$ и учитывая равенства (4.4), получим систему величин

$$N^l_{\gamma k}=\frac{1}{m^2r}H^{\alpha\alpha\beta}_{\gamma k}\overset{*}{h}{}^l_{\alpha\alpha\beta}, \tag{4.5}$$

удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений типа (2.18), т. е. являющихся объектом линейной связности пространства $K^{(1)}_{n,m}$, соответствующим формам типа (2.12) и охваченным первым дифференциальным продолжением подобъекта $h^{\alpha\alpha\beta}_i$. Его дифференциальное продолжение дает объект аффинной связности Γ^i_{jk}, соответствующий формам вида (2.10) с тем же порядком охвата подобъектом $h^{\alpha\alpha\beta}_i$ и $\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}(x,u)$.

Объект аффинной связности Γ^j_{ik} можно определить и непосредственно, свертывая первое уравнение системы (4.1) с тензором $\overset{*}{h}{}^j_{\alpha\alpha\beta}$

$$\Gamma^j_{ik}=\frac{1}{m^2r}\overset{*}{h}{}^j_{\alpha\alpha\beta}h^{\alpha\alpha\beta}_{ik}. \tag{4.6}$$

Объект аффинной связности (4.6) охватывается первым дифференциальным продолжением подобъекта $h^{\alpha\alpha\beta}_i$ и полностью совпадает с объектом аффинной связности, получаемым в результате частичного продолжения объекта линейной связности (4.5). Система величин

$$N^j_{\alpha k}=\Gamma^j_{ik}p^i_\alpha \tag{4.7}$$

является объектом линейной связности пространства $K^{(1)}_{n,m}$, соответствующим формам типа (2.12) с тем же порядком охвата.

Необходимо заметить, что в этом случае существует объект аффинной связности типа (3.23) и при $h^{\alpha\alpha\beta}_i=h^{\alpha\alpha\beta}_i(x^j,u^\gamma,p^j_\gamma)$, но только в этом случае тензор M^{ql}_{ki} имеет вид

$$M^{ql}_{ki}=mr\delta^q_k\delta^l_i+\overset{*}{h}{}^q_{\alpha\alpha\beta}h^{\alpha\alpha\beta\gamma}_{i\cdot k}p^l_\gamma,$$

при этом объект аффинной связности, полученный непосредственно входит в состав объекта аффинной связности, полученного в результате частичного продолжения объекта линейной связности.

Из последнего уравнения системы (4.1) видно, что двухкратное его частичное продолжение дает тензор $h^{\alpha\alpha\beta\gamma}_{\cdot i\cdot j\cdot k}$.

Рассмотрим тензор

$$H^\gamma_{ij}=h^{\alpha\alpha\beta\sigma}_{\cdot i\cdot j\cdot k}\overset{*}{h}{}^k_{\alpha\alpha\beta}, \tag{4.8}$$

удовлетворяющий системе дифференциальных уравнений

$$\nabla H^\gamma_{ij}=H^\gamma_{ijk}\omega^k+H^\gamma_{ij\sigma}\Theta^\sigma+H^{\gamma\sigma}_{ij\cdot k}\Theta^k_\sigma$$

с частичным продолжением

$$\nabla H^\gamma_{ij\sigma}-(-H^\varepsilon_{ij}\delta^\gamma_\alpha+H^{\gamma\varepsilon}_{ij\cdot k}p^k_\alpha)\Theta^\alpha_{\varepsilon\sigma}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \omega^i,\ \Theta^\alpha,\ \Theta^i_\alpha). \tag{4.9}$$

Так как для тензора H^{ε}_{ij} требования теоремы (см. [6], стр. 455) всегда выполнены, то можем говорить о существовании тензора $\overset{*}{H}{}^{ij}_{\beta}$, связанного с данным тензором H^{ε}_{ij} соотношениями вида (2.5). Свертывая систему величин $H^{\gamma}_{ij\sigma}$ с тензором $\overset{*}{H}{}^{ij}_{\beta}$, получим

$$\nabla(\overset{*}{H}{}^{ij}_{\beta}H^{\gamma}_{ij\sigma})-R^{\varepsilon\gamma}_{\beta\alpha}\Theta^{\alpha}_{\varepsilon\sigma}\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ \omega^{i},\ \Theta^{\alpha},\ \Theta^{i}_{\alpha}), \tag{4.10}$$

где

$$R^{\varepsilon\gamma}_{\beta\alpha}=-n\delta^{\varepsilon}_{\beta}\delta^{\gamma}_{\alpha}+\overset{*}{H}{}^{ij}_{\beta}H^{\gamma\varepsilon}_{ij\cdot k}p^{k}_{\alpha}.$$

Если $\det\|R^{\varepsilon\gamma}_{\beta\alpha}\|\neq 0$, то для тензора $R^{\varepsilon\gamma}_{\beta\alpha}$ можно предполагать наличие такого тензора $\overset{*}{R}{}^{\mu\beta}_{\gamma\nu}$, что действительны соотношения (3.6). Из (4.10) и ранее сказанного следует, что система величин

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}=\overset{*}{R}{}^{\mu\beta}_{\gamma\nu}\overset{*}{H}{}^{ij}_{\beta}H^{\gamma}_{ij\sigma} \tag{4.11}$$

образует объект аффинной связности, охватываемый третьим дифференциальным продолжением фундаментального объекта $(h^{a\alpha\beta}_{i},\ h^{a})$, причем $\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}=\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}\times$ $\times(x^{i},\ u^{\alpha},\ p^{i}_{\alpha})$.

Система величин

$$M^{i}_{\nu\sigma}=-\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}p^{i}_{\mu} \tag{4.12}$$

является объектом линейной связности, соответствующим формам типа (3.8′), с тем же порядком охвата.

Итак, доказана теорема.

Теорема 4. *Если* $nr=\frac{m(m+1)}{2}$, $h=\det\|h^{a\alpha\beta}_{i}\|\neq 0$ *и* $\det\|R^{\varepsilon\gamma}_{\beta\alpha}\|\neq 0$, *то существуют объекты связности* (4.6) *и* (4.11), *охваченные соответственно первым дифференциальным продолжением подобъекта* $h^{a\alpha\beta}_{i}$ *и третьим продолжением объекта* $(h^{a\alpha\beta}_{i},\ h^{a})$, *а также объекты линейной связности* (4.5) *и* (4.12) *пространства* $K^{(1)}_{n,m}$ *с тем же порядком охвата соответственно.*

2. Рассмотрим случай, когда тензор $h^{a\alpha\beta}_{i}$ представляет прямоугольную матрицу (a — номер строки, перестановка $(^{\alpha\beta}_{i})$ — номер столбца) при условии, что $r=\frac{nm(m+1)}{2}+1$ и ранг матрицы $\|h^{a\alpha\beta}_{i}\|$ равен $\frac{nm(m+1)}{2}$

В этом случае существует такое ковекторное поле m_a, компоненты которого удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\nabla m_a=m_{ai}\omega^{i}+m_{a\alpha}\Theta^{\alpha}+m^{\alpha}_{a\cdot i}\Theta^{i}_{\alpha} \tag{4.13}$$

с частичным продолжением

$$\nabla m^{\alpha}_{a\cdot i}=m^{\alpha}_{a\cdot ij}\omega^{j}+m^{\alpha}_{a\cdot i\beta}\Theta^{\beta}+m^{\alpha\beta}_{a\cdot i\cdot j}\Theta^{j}_{\beta},$$
$$m^{\alpha\beta}_{a\cdot i\cdot j}=m^{\beta\alpha}_{a\cdot j\cdot i}, \tag{4.14}$$

что система уравнений

$$h^{a\alpha\beta}_{i}m_a=0 \tag{4.15}$$

имеет решение

$$\tilde{m}_a=\lambda m_a, \tag{4.16}$$

определенное с точностью до скалярного множителя λ (его мы будем считать функцией от x^i, u^α, p^i_α), причем

$$d\lambda = \lambda_i\omega^i + \lambda_\alpha\Theta^\alpha + \lambda^{\alpha}_{\cdot i}\Theta^i_\alpha. \tag{4.17}$$

Продолжая дифференциальное уравнение (4.17), получим

$$\begin{aligned}
&\nabla\lambda_i - \lambda^{\alpha}_{\cdot j}\Theta^j_{\alpha i} = \lambda_{ij}\omega^j + \lambda_{i\beta}\Theta^\beta + \lambda^{\beta}_{i\cdot j}\Theta^j_\beta,\\
&\nabla\lambda_\alpha - \lambda^{\beta}_{\cdot i}\Theta^i_{\cdot\beta\alpha} = \lambda_{\alpha j}\omega^j + \lambda_{\alpha\beta}\Theta^\beta + \lambda^{\beta}_{\alpha\cdot j}\Theta^j_\beta,\\
&\nabla\lambda^{\alpha}_{\cdot i} = \lambda^{\alpha}_{\cdot ij}\omega^j + \lambda^{\alpha}_{\cdot i\beta}\Theta^\beta + \lambda^{\alpha\beta}_{\cdot i\cdot j}\Theta^j_\beta,
\end{aligned} \tag{4.18}$$

причем

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ji},\quad \lambda_{\alpha\beta} = \lambda_{\beta\alpha},\quad \lambda^{\alpha\beta}_{\cdot i\cdot j} = \lambda^{\beta\alpha}_{\cdot j\cdot i},\quad \lambda_{i\beta} = \lambda_{\beta i},$$
$$\lambda^{\beta}_{i\cdot j} = \lambda^{\beta}_{ji},\quad \lambda^{\alpha}_{\cdot i\beta} = \lambda^{\alpha}_{\beta\cdot i}.$$

Тогда функция

$$F = h^a\, m_a \tag{4.19}$$

удовлетворяет условию $\bar{F} = \lambda F$.

Так как имеет место второе уравнение системы (1.9′) и (4.13), то дифференцируя обычным образом функцию F, получим

$$dF = F_i\omega^i + F_\alpha\Theta^\alpha + F^{\alpha}_{\cdot i}\Theta^i_\alpha, \tag{4.20}$$

где

$$\begin{aligned}
&F_i = h^a_i m_a + h^a m_{ai},\\
&F_\alpha = h^a_\alpha m_a + h^a m_{a\alpha},\\
&F^{\alpha}_{\cdot i} = h^{a\alpha}_{\cdot i} m_a + h^a m^{\alpha}_{a\cdot i},
\end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned}
&\bar{F}_i = \lambda F_i + \lambda_i F,\\
&\bar{F}_\alpha = \lambda F_\alpha + \lambda_\alpha F,\\
&\bar{F}^{\alpha}_{\cdot i} = \lambda F^{\alpha}_{\cdot i} + \lambda^{\alpha}_{\cdot i}F.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Пространство $(K^{(1)}_{n,m}, F)$, ассоциированное к пространству m-мерных поверхностных элементов $K^{(1)}_{n,m}$, назовем обобщенным ареальным пространством.

Из систем (4.13), (4.14), (4.16) и (4.17) получим формулы преобразования компонент дифференциальных продолжений ковектора m_a при перенормировке ковектора m_a, т. е. при изменении обобщенного ареального пространства в пучке обобщенных ареальных пространств, определяемом скалярной функцией λ:

$$\begin{aligned}
&\bar{m}_{ai} = \lambda m_{ai} + \lambda_i m_a,\\
&\bar{m}_{a\alpha} = \lambda m_{a\alpha} + \lambda_\alpha m_a,\\
&\bar{m}^{\alpha}_{a\cdot i} = \lambda m^{\alpha}_{a\cdot i} + \lambda^{\alpha}_{\cdot i} m_a.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Продолжая дифференциальное уравнение (4.20), получим

$$\begin{aligned}
&\nabla F_i - F^{\alpha}_{\cdot j}\Theta^j_{\alpha i} = F_{ij}\omega^j + F_{i\beta}\Theta^\beta + F^{\beta}_{i\cdot j}\Theta^j_\beta,\\
&\nabla F_\alpha - F^{\beta}_{\cdot i}\Theta^i_{\beta\alpha} = F_{\alpha j}\omega^j + F_{\alpha\beta}\Theta^\beta + F^{\beta}_{\alpha\cdot j}\Theta^j_\beta,\\
&\nabla F^{\alpha}_{\cdot i} = F^{\alpha}_{\cdot ij}\omega^j + F^{\alpha}_{\cdot i\beta}\Theta^\beta + F^{\alpha\beta}_{\cdot i\cdot j}\Theta^j_\beta,
\end{aligned} \tag{4.23}$$

где

$$F_{ij}=F_{ji},\ F_{\alpha\beta}=F_{\beta\alpha},\ F^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot i\cdot j}=F^{\beta\alpha}_{\cdot\cdot j\cdot i},\ F_{i\beta}=F_{\beta i},$$
$$F^{\beta}_{i\cdot j}=F^{\beta}_{\cdot ji},\ F^{\beta}_{\alpha\cdot j}=F^{\beta}_{\cdot j\alpha}.$$

Продолжая последнее уравнение предыдущей системы, получим

$$\begin{aligned}&\nabla F^{\alpha}_{\cdot ij}-F^{\alpha}_{l}\omega^{l}_{ij}-F^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot i\cdot l}p^{k}_{\beta}\omega^{l}_{kj}=F^{\alpha}_{\cdot ijk}\omega^{k}+F^{\alpha}_{\cdot ij\gamma}\Theta^{\gamma}+F^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot ij\cdot k}\Theta^{k}_{\beta},\\&\nabla F^{\alpha}_{\cdot i\beta}+F^{\varepsilon}_{\cdot i}\Theta^{\alpha}_{\varepsilon\beta}-F^{\alpha\varepsilon}_{\cdot\cdot i\cdot j}p^{j}_{\sigma}\Theta^{\sigma}_{\varepsilon\beta}=F^{\alpha}_{\cdot i\beta k}\omega^{k}+F^{\alpha}_{\cdot i\beta\gamma}\Theta^{\gamma}+F^{\alpha\gamma}_{\cdot\cdot i\beta\cdot k}\Theta^{k}_{\gamma},\\&\nabla F^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot i\cdot j}=F^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot i\cdot jk}\omega^{k}+F^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot i\cdot j\gamma}\Theta^{\gamma}+F^{\alpha\beta\gamma}_{\cdot\cdot\cdot i\cdot j\cdot k}\Theta^{k}_{\gamma}.\end{aligned}\tag{4.24}$$

Получили, что система величин $F^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot i\cdot j}$ является тензором. Используя последнее равенство (4.21), последнее уравнение системы (4.23) и последнее уравнение системы (4.18), получим закон преобразования тензора $F^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot i\cdot j}$ при преобразованиях (4.16):

$$\tilde F^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot i\cdot j}=\lambda F^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot i\cdot j}+\lambda^{\alpha}_{\cdot i}F^{\beta}_{\cdot j}+\lambda^{\beta}_{\cdot j}F^{\alpha}_{\cdot i}+\lambda^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot i\cdot j}F.\tag{4.25}$$

Дальнейшие расчеты будут проводиться для того случая, когда преобразование (4.16) индуцирует конформное преобразование тензора $F^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot i\cdot j}$ рассматриваемого ареального пространства, т. е. когда

$$\tilde F^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot i\cdot j}=\lambda F^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot i\cdot j}.\tag{4.26}$$

Из (4.25) видно, что, для того чтобы преобразование (4.25) тензора $F^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot i\cdot j}$ при преобразовании (4.16) ковектора m_a было эквивалентно преобразованию (4.26), необходимо выполнение условия $\lambda=\lambda\,(x^i,\ u^\alpha)$.

Будем рассматривать случай, когда $\det\|F^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot i\cdot j}\|\neq 0$, где тензор $F^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot i\cdot j}$ рассматривается как квадратная матрица ($\binom{\alpha}{i}$ — номер строки, $\binom{\beta}{j}$ — номер столбца). Тогда существует обратный тензор $\overset{*}{F}{}^{ij}_{\alpha\beta}$ и такой, что имеют место следующие равенства:

$$\overset{*}{F}{}^{ki}_{\gamma\alpha}F^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot i\cdot j}=\delta^{\beta}_{\gamma}\delta^{k}_{j}.\tag{4.27}$$

Продолжая последнее уравнение системы (4.24), получим

$$\begin{aligned}&\nabla F^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot i\cdot jk}-F^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot l\cdot j}\omega^{l}_{ik}-F^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot i\cdot l}\omega^{l}_{jk}-F^{\alpha\beta\gamma}_{\cdot\cdot\cdot i\cdot j\cdot l}\Theta^{l}_{\gamma k}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \omega^{i},\ \Theta^{\alpha},\ \Theta^{i}_{\alpha}),\\&\nabla F^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot i\cdot j\gamma}+F^{\varepsilon\beta}_{\cdot\cdot i\cdot j}\Theta^{\alpha}_{\varepsilon\gamma}+F^{\alpha\varepsilon}_{\cdot\cdot i\cdot j}\Theta^{\beta}_{\varepsilon\gamma}-F^{\alpha\beta\varepsilon}_{\cdot\cdot\cdot i\cdot j\cdot l}\Theta^{l}_{\varepsilon\gamma}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \omega^{i},\ \Theta^{\alpha},\ \Theta^{i}_{\alpha}),\\&\nabla F^{\alpha\beta\gamma}_{\cdot\cdot\cdot i\cdot j\cdot k}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \omega^{i},\ \Theta^{\alpha},\ \Theta^{i}_{\alpha}).\end{aligned}\tag{4.28}$$

Свертывая систему величин, удовлетворяющих первому уравнению системы (4.28) с тензором $\overset{*}{F}{}^{jq}_{\beta\alpha}$, получим систему величин, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений

$$\nabla\,(\overset{*}{F}{}^{jq}_{\beta\alpha}F^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot i\cdot jk})-M^{qs}_{li}\omega^{l}_{sk}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \omega^{i},\ \Theta^{\alpha},\ \Theta^{i}_{\alpha}),\tag{4.29}$$

где

$$M^{qs}_{li}=m\delta^{q}_{l}\delta^{s}_{i}+\overset{*}{F}{}^{sq}_{\beta\alpha}F^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot i\cdot l}+\overset{*}{F}{}^{jq}_{\beta\alpha}F^{\alpha\beta\varepsilon}_{\cdot\cdot\cdot i\cdot j}p^{s}_{\varepsilon}.\tag{4.30}$$

Если $\det\|M^{qs}_{li}\|\neq 0$, то, предполагая наличие обратного тензора $\overset{*}{M}{}^{in}_{rq}$, удовлетворяющего формуле (2.8), получим систему величин

$$\Gamma^{n}_{rk}=\overset{*}{M}{}^{in}_{rq}\overset{*}{F}{}^{jq}_{\beta\alpha}F^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot i\cdot jk},\tag{4.31}$$

являющихся объектом аффинной связности, но

$$\tilde\Gamma^{n}_{rk}=\Gamma^{n}_{rk}+m\overset{*}{M}{}^{in}_{ri}\tilde\lambda_{k},\ \tilde\lambda_{k}=\frac{\lambda_k}{\lambda},\tag{4.32}$$

т. е. доказали существование связности для каждого пространства пучка ареальных пространств с законом преобразования (4.32) при переходе от одного пространства к другому.

Вопрос отыскания общей связности для пучка обобщенных ареальных пространств

$$\Lambda^n_{rk} = \Gamma^n_{rk} + m\overset{*}{M}{}^{in}_{ri}\varphi_k \tag{4.33}$$

сводится к конструированию такого ковекторного поля φ_k, которое при преобразованиях (4.16) преобразуется по формуле

$$\tilde{\varphi}_k = \varphi_k - \bar{\lambda}_k. \tag{4.34}$$

Выражение

$$\mu_k = \overset{*}{F}{}^{ij}_{\alpha\beta}(\overset{\Gamma}{D}{}^*_k \overset{\Gamma}{D}{}^*_j h^{a\alpha\beta}_i)\, m_a \tag{4.35}$$

(где $\overset{\Gamma}{D}{}^*_i$ — символ неголономной ковариантной производной) при вышеуказанных преобразованиях (4.16) преобразуется по формуле

$$\tilde{\mu}_k = \mu_k - R^s_k \bar{\lambda}_s,$$

где

$$R^s_k = m\overset{*}{F}{}^{ij}_{\alpha\beta}(-h^{a\alpha\beta}_{lj}\overset{*}{M}{}^{nl}_{in}\delta^s_k - h^{a\alpha\beta}_{il}\overset{*}{M}{}^{nl}_{jn}\delta^s_k - h^{a\alpha\beta}_{lk}\overset{*}{M}{}^{nl}_{in}\delta^s_j)\, m_a. \tag{4.36}$$

Если $\det\|R^s_k\| \neq 0$, то для тензора R^s_k существует обратный тензор $\overset{*}{R}{}^k_q$, связанный с данным тензором соотношением

$$R^s_k \overset{*}{R}{}^k_q = \delta^s_q.$$

В этом случае ковекторы

$$\varphi_q = \mu_k \overset{*}{R}{}^k_q$$

при преобразованиях (4.16) преобразуются по формуле (4.34).

Свертывая систему величин (4.33) с тензором p^r_α, получим объект линейной связности $N^n_{\alpha k}$, общий для пучка обобщенных ареальных пространств.

Таким образом, доказана теорема.

Теорема 5. *Если* $r = \frac{nm(m+1)}{2} + 1$, $\det\|F^{\alpha\beta}_{\cdot i\cdot j}\| \neq 0$, $\det\|M^{qs}_{li}\| \neq 0$ и $\det\|R^s_k\| \neq \neq 0$, *то всегда существует объект аффинной связности* (4.33), *охватываемый третьим дифференциальным продолжением объекта* $(h^{a\alpha\beta}_i, h^a)$, *общий для пучка обобщенных ареальных пространств, определенного с точностью до склярной функции* $\lambda = \lambda(x^i, u^a)$.

Используя второе уравнение системы (4.28), аналогичным путем можно получить аффинную связность $\Lambda^\alpha_{\beta\gamma}$, общую для вышеупомянутого пучка обобщенных ареальных пространств, с тем же порядком охвата.

Необходимо заметить, что если $\lambda = \lambda(u^a)$, то связность (4.31) будет инвариантна относительно преобразовании (4.16). Если $\lambda = \lambda(x^i)$, то связность $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$, полученная таким же путем, как и связность (4.31), будет общей для всех пространств вышеупомянутого пучка обобщенных ареальных пространств.

Системы величин

$$N^j_{\alpha k} = \Lambda^j_{ik} p^i_\alpha, \tag{4.37}$$

$$M^l_{\beta\gamma} = -\Lambda^\alpha_{\beta\gamma} p^l_\alpha$$

образуют объекты линейной связности, определенные формами вида (2.12), (3.8′) и общие для вышеописанного пучка обобщенных ареальных пространств.

Необходимо заметить, что вместо функции F можно рассматривать функцию

$$M=\frac{1}{2}F^2, \qquad \bar{M}=\lambda^2 M.$$

Тогда вместо тензора $F^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot i\cdot j}$ будем иметь тензор

$$M^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot i\cdot j}=F\cdot F^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot i\cdot j}+F^{\alpha}_{\cdot i}F^{\beta}_{\cdot j},$$

а формула (4.25) примет вид

$$\bar{M}^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot i\cdot j}=\lambda^2 M^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot i\cdot j}+2F\lambda\,(\lambda^{\alpha}_{\cdot i}F^{\beta}_{\cdot j}+\lambda^{\beta}_{\cdot j}F^{\alpha}_{\cdot i})+F^2\,(\lambda^{\alpha}_{\cdot i}\lambda^{\beta}_{\cdot j}+\lambda\lambda^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot i\cdot j}).$$

Рассматривая случай $\det\|M^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot i\cdot j}\|\neq 0$, совершенно аналогично получим объекты аффинных связностей, общие для пучка обобщенных ареальных пространств $(K^{(1)}_{n,m},\ M)$, определенного скалярной функцией $\lambda=\lambda(x^i,\ u^\alpha)$.

§ 5. О геометрии квазилинейной системы дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными с линейной группой преобразования параметров

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (1.3) для того случая, когда преобразование локальных координат u^α пространства $K^{(2)}_{n,m}$ линейно, т. е. имеет вид

$$u^{\alpha'}=a^{\alpha'}_{\alpha}u^\alpha+b^{\alpha'}, \tag{5.1}$$

а на преобразование остальных координат никаких дополнительных условий не накладывается. Тогда

$$p^{i'}_{\alpha'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial u^\alpha}{\partial u^{\alpha'}}p^i_\alpha, \tag{5.2}$$

$$p^{i'}_{\alpha'\beta'}=\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i\partial x^j}\frac{\partial u^\alpha}{\partial u^{\alpha'}}\frac{\partial u^\beta}{\partial u^{\beta'}}p^i_\alpha p^j_\beta+\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial u^\alpha}{\partial u^{\alpha'}}\frac{\partial u^\beta}{\partial u^{\beta'}}p^i_{\alpha\beta}$$

и функции $h^{a\alpha\beta}_i$ и h^a преобразуются по закону

$$h^{a'\alpha'\beta'}_{i'}=A^{a'}_{a}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial u^{\alpha'}}{\partial u^\alpha}\frac{\partial u^{\beta'}}{\partial u^\beta}h^{a\alpha\beta}_i, \tag{5.3}$$

$$h^{a'}=A^{a'}_{a}h^a-h^{a\gamma\sigma}_{k}p^i_\gamma p^j_\sigma A^{a'}_{a}\frac{\partial x^k}{\partial x^{l'}}\frac{\partial^2 x^{l'}}{\partial x^i\partial x^j},$$

т. е. функции $h^{a\alpha\beta}_i$ и h^a представляют дифференциально-геометрический объект $(h^{a\alpha\beta}_i,\ h^a)$ с подобъектом $h^{a\alpha\beta}_i$.

Требование (5.1) накладывает условия и на структурные уравнения пространства $K^{(1)}_{n,m}$, являющегося подпространством пространства $K^{(2)}_{n,m}$, т. е. вместо (1.2) имеем

$$D\Theta^\alpha=\Theta^\beta\wedge\Theta^\alpha_\beta,$$
$$D\Theta^\alpha_\beta=\Theta^\gamma_\beta\wedge\Theta^\alpha_\gamma, \tag{5.4}$$

а формула (1.8) принимает вид

$$D\Theta^i_\alpha=\Theta^\beta_\alpha\wedge\Theta^i_\beta+\Theta^k_\alpha\wedge\omega^i_k+\omega^l\wedge\Theta^i_{\alpha l}.$$

Таким образом, конечные формулы преобразования объекта ($h_i^{a\alpha\beta}$, h^a) можно заменить системой дифференциальных уравнений

$$\nabla h_i^{a\alpha\beta} = h_{ij}^{a\alpha\beta}\omega^j + h_{i\gamma}^{a\alpha\beta}\Theta^\gamma + h_{i\cdot j}^{a\alpha\beta\gamma}\Theta_\gamma^j, \tag{5.5}$$

$$\nabla h^a - p_\alpha^i p_\beta^j h_k^{a\alpha\beta}\omega_{ij}^k = h_k^a\omega^k + h_\gamma^a\Theta^\gamma + h_{\cdot k}^{a\gamma}\Theta_\gamma^k$$

с дифференциальным продолжением

$$\begin{aligned}
&\nabla h_{ij}^{a\alpha\beta} - h_k^{a\alpha\beta}\omega_{ij}^k - h_{i\cdot l}^{a\alpha\beta\gamma}\Theta_{\gamma j}^l = h_{ijk}^{a\alpha\beta}\omega^k + h_{ij\sigma}^{a\alpha\beta}\Theta^\sigma + h_{ij\cdot k}^{a\alpha\beta\sigma}\Theta_\sigma^k,\\
&\nabla h_{i\gamma}^{a\alpha\beta} = h_{i\gamma j}^{a\alpha\beta}\omega^j + h_{i\gamma\sigma}^{a\alpha\beta}\Theta^\sigma + h_{i\gamma\cdot k}^{a\alpha\beta\sigma}\Theta_\sigma^k,\\
&\nabla h_{i\cdot j}^{a\alpha\beta\gamma} = h_{i\cdot jk}^{a\alpha\beta\gamma}\omega^k + h_{i\cdot j\sigma}^{a\alpha\beta\gamma}\Theta^\sigma + h_{i\cdot j\cdot k}^{a\alpha\beta\gamma\sigma}\Theta_\sigma^k,\\
&\nabla h_k^a - h_l^{a\alpha\beta}p_\alpha^i p_\beta^j\omega_{ijk}^l - h_{lk}^{a\alpha\beta}p_\alpha^i p_\beta^j\omega_{ij}^l - h_{\cdot l}^{a\gamma}\Theta_{\gamma k}^l =\\
&= h_{kl}^a\omega^l + h_{k\sigma}^a\Theta^\sigma + h_{k\cdot l}^{a\sigma}\Theta_\sigma^l,\\
&\nabla h_\gamma^a - h_{l\gamma}^{a\alpha\beta}p_\alpha^i p_\beta^j\omega_{ij}^l = h_{\gamma l}^a\omega^l + h_{\gamma\sigma}^a\Theta^\sigma + h_{\gamma\cdot l}^{a\sigma}\Theta_\sigma^l,\\
&\nabla h_{\cdot k}^{a\gamma} - 2h_l^{a\gamma\beta}p_\beta^j\omega_{kj}^l - h_{l\cdot k}^{a\alpha\beta\gamma}p_\alpha^i p_\beta^j\omega_{ij}^l = h_{\cdot kl}^{a\gamma}\omega^l + h_{\cdot k\sigma}^{a\gamma}\Theta^\sigma + h_{\cdot k\cdot l}^{a\gamma\sigma}\Theta_\sigma^l,
\end{aligned} \tag{5.6}$$

причем

$$\begin{aligned}
&h_{ijk}^{a\alpha\beta} = h_{ikj}^{a\alpha\beta}, \quad h_{ij\sigma}^{a\alpha\beta} = h_{i\sigma j}^{a\alpha\beta}, \quad h_{ij\cdot k}^{a\alpha\beta\sigma} = h_{i\cdot kj}^{a\alpha\beta\sigma},\\
&h_{i\gamma\sigma}^{a\alpha\beta} = h_{i\sigma\gamma}^{a\alpha\beta}, \quad h_{i\cdot j\cdot k}^{a\alpha\beta\gamma\sigma} = h_{i\cdot k\cdot j}^{a\alpha\beta\sigma\gamma}, \quad h_{i\cdot j\sigma}^{a\alpha\beta\gamma} = h_{i\sigma\cdot j}^{a\alpha\beta\gamma},\\
&h_{kl}^a = h_{lk}^a, \quad h_{k\sigma}^a = h_{\sigma k}^a, \quad h_{k\cdot l}^{a\sigma} = h_{\cdot lk}^{a\sigma}, \quad h_{\gamma\sigma}^a = h_{\sigma\gamma}^a,\\
&h_{\gamma\cdot l}^{a\sigma} = h_{\cdot l\gamma}^{a\sigma}, \quad h_{\cdot k\cdot l}^{a\gamma\sigma} = h_{\cdot l\cdot k}^{a\sigma\gamma}.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Частичное дифференциальное продолжение системы (5.6) показывает, что величины $h_{i\cdot j\cdot k}^{a\alpha\beta\gamma\sigma}$, $h_{i\cdot j\sigma}^{a\alpha\beta\gamma}$, $h_{i\gamma\sigma}^{a\alpha\beta}$, $h_{i\gamma\cdot k}^{a\alpha\beta\sigma}$ являются тензорами.

Рассмотрим тензор $h_{i\gamma\sigma}^{a\alpha\beta}$. Введем обозначение

$$H_i^a = h_{i\alpha\beta}^{a\alpha\beta}. \tag{5.8}$$

Тогда имеет место система дифференциальных уравнений

$$\nabla H_i^a = H_{ij}^a\omega^j + H_{i\alpha}^a\Theta^\alpha + H_{i\cdot j}^{a\alpha}\Theta_\alpha^j \tag{5.9}$$

с дифференциальным продолжением

$$\begin{aligned}
&\nabla H_{ik}^a - (H_j^a\delta_i^s + H_{i\cdot j}^{a\alpha}p_\alpha^s)\,\omega_{sk}^j \equiv 0\,(\mathrm{mod}\ \omega^i,\ \Theta^\alpha,\ \Theta_\alpha^i),\\
&\nabla H_{i\alpha}^a \equiv 0\,(\mathrm{mod}\ \omega^i,\ \Theta^\alpha,\ \Theta_\alpha^i),\\
&\nabla H_{i\cdot j}^{a\alpha} \equiv 0\,(\mathrm{mod}\ \omega^i,\ \Theta^\alpha,\ \Theta_\alpha^i).
\end{aligned} \tag{5.10}$$

1. Если $r = n$, $m < n$, тогда тензор H_i^a можно рассматривать как квадратную матрицу (a — номер строки. i — номер столбца). Естественно рассматривать случай, когда $\det \| H_i^a \| \neq 0$ (например, $H_i^a = \delta_i^a$). Тогда для тензора H_i^a существует такой обратный тензор $\overset{*}{H}{}_i^a$, что имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned}
&\overset{*}{H}{}_a^j H_i^a = \delta_i^j,\\
&\overset{*}{H}{}_b^i H_i^a = \delta_b^a
\end{aligned} \tag{5.11}$$

$$\nabla \overset{*}{H}{}_a^i = \overset{*}{H}{}_{aj}^i\omega^j + \overset{*}{H}{}_{a\alpha}^i\Theta^\alpha + \overset{*}{H}{}_{a\cdot j}^{i\alpha}\Theta_\alpha^j. \tag{5.12}$$

Свертывая первое уравнение системы (5.10) с тензором $\overset{*}{H}{}_a^l$, получим

$$\nabla(\overset{*}{H}{}_a^l H_{ik}^a) - \Pi_{ji}^{ls}\omega_{sk}^j \equiv 0\,(\mathrm{mod}\ \omega^i,\ \Theta^\alpha,\ \Theta_\alpha^i), \tag{5.13}$$

где

$$\Pi_{ji}^{ls}=\delta_j^l\delta_i^s+\overset{*}{H}{}_a^l H_{i\cdot j}^{a\alpha} p_\alpha^s. \tag{5.14}$$

Если $\det\|\Pi_{ij}^{ls}\|\neq 0$, то можно говорить о существовании тензора $\overset{*}{\Pi}{}_{ql}^{ir}$ и о выполнении равенств типа (2.8). Свертывая систему величин, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений (5.13), с тензором $\overset{*}{\Pi}{}_{ql}^{ir}$ и симметризируя по индексам q, k, получим систему величин

$$\Gamma_{qk}^r=\overset{*}{H}{}_a^l H_{l(k}^a \overset{*}{\Pi}{}_{q)l}^{ir}, \tag{5.15}$$

удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений

$$\nabla\Gamma_{qk}^r-\omega_{qk}^r\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ \ \omega^i,\ \Theta^\alpha,\ \Theta_\alpha^i), \tag{5.16}$$

т. е. являющихся объектом аффинной связности без кручения, соответствующим формам типа (2.10). Этот объект охватывается третьим дифференциальным продолжением подобъекта $h_i^{a\alpha\beta}$, а система величин

$$N_{\alpha k}^r=\Gamma_{qk}^r p_\alpha^q$$

является объектом линейной связности пространства $K_{n,\,m}^{(1)}$, соответствующим формам типа (2.12), с тем же порядком охвата.

Рассмотрим систему величин

$$R_{i\alpha}^a=H_{ik}^a p_\alpha^k, \tag{5.17}$$

удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений

$$\nabla R_{i\alpha}^a-(H_j^a\delta_i^r+H_{i\cdot j}^{a\beta}p_\beta^r)\,\Theta_{\alpha r}^j\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ \ \omega^i,\ \Theta^\alpha,\ \Theta_\alpha^i). \tag{5.18}$$

Свертывая систему величин (5.17) с тензором $\overset{*}{H}{}_a^s$, получим выражение, удовлетворяющее системе дифференциальных уравнений

$$\nabla(\overset{*}{H}{}_a^s R_{i\alpha}^a)-\Pi_{ji}^{sr}\Theta_{\alpha r}^j\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ \ \omega^i,\ \Theta^\alpha,\ \Theta_a^i), \tag{5.19}$$

где Π_{ij}^{sr} определяется формулой (5.14).

Свертывая систему величин, удовлетворяющих предыдущей системе дифференциальных уравнений, с тензором $\overset{*}{\Pi}{}_{ls}^{iq}$, обратным тензору Π_{ji}^{sr}, получим систему величин

$$N_{\alpha l}^q=\overset{*}{\Pi}{}_{ls}^{iq}\overset{*}{H}{}_a^s R_{i\alpha}^a, \tag{5.20}$$

удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений

$$\nabla N_{\alpha l}^q-\Theta_{\alpha l}^q=N_{\alpha lk}^q\omega^k+N_{\alpha l\gamma}^q\Theta^\gamma+N_{\alpha l\cdot k}^{q\gamma}\Theta_\gamma^k,$$

т. е. система величин (5.20) является объектом линейной связности пространства $K_{n,\,m}^{(1)}$, охватываемым третьим продолжением подобъекта $h_i^{a\alpha\beta}$, а его частичное продолж ение дает объект аффинной связности

$$\Gamma_{lk}^q=\frac{1}{m}\,N_{\alpha l\cdot k}^{q\alpha}, \tag{5.21}$$

охваченный четвертым дифференциальным продолжением подобъекта $h_i^{a\alpha\beta}$.

Так как

$$N_{\alpha l\cdot k}^{q\alpha}=\overset{*}{\Pi}{}_{ls}^{iq}(\overset{*}{H}{}_{a\cdot k}^{s\alpha}R_{i\alpha}^a+\overset{*}{H}{}_a^s H_{ij\cdot k}^{a\alpha}p_a^j+m\overset{*}{H}{}_a^s H_{ik}^a)+\overset{*}{\Pi}{}_{ls\cdot k}^{iq\alpha}\overset{*}{H}{}_a^s R_{i\alpha}^a,$$

то из предыдущего равенства и формулы (5.15) следует, что объект аффинной связности (5.21) содержит объект аффинной связности (5.15).

Таким образом, доказана теорема.

Теорема 6. *Если группа* $GL(m, R)$ *является группой линейных преобразований,* $r=n$ *и* $\det \| H_i^a \| \neq 0$, $\det \| \Pi_{jl}^{ik} \| \neq 0$, *где тензоры* H_i^a *и* Π_{jl}^{ik} *имеют выражения* (5.8) *и* (5.14), *то в пространстве* $K_{n,m}^{(1)}$ *с дифференциально-геометрическим объектом* $(h_i^{a\alpha\beta}, h^a)$ *существуют объекты аффинной связности* (5.15), (5.21) *и линейной связности* (5.20).

2. Введем обозначение

$$X_i^{a\alpha} = h_{i\beta}^{a\alpha\beta}. \tag{5.22}$$

Тогда второе уравнение системы (5.6) примет вид

$$\nabla X_i^{a\alpha} = X_{ij}^{a\alpha}\omega^j + X_{i\beta}^{a\alpha}\Theta^\beta + X_{i\cdot j}^{a\alpha\beta}\Theta_\beta^j.$$

Продолжая предыдущую систему дифференциальных уравнений, получим

$$\begin{aligned} &\nabla X_{ij}^{a\alpha} - (X_k^{a\alpha}\delta_i^s + X_{i\cdot k}^{a\alpha\beta}p_\beta^s)\,\omega_{sj}^k \equiv 0 (\mathrm{mod}\ \ \omega^i,\ \Theta^\alpha,\ \Theta_\alpha^i), \\ &\nabla X_{i\beta}^{a\alpha} \equiv 0\,(\mathrm{mod}\ \ \omega^i,\ \Theta^l,\ \Theta_\alpha^i), \\ &\nabla X_{i\cdot j}^{a\dot\alpha\beta} \equiv 0\,(\mathrm{mod}\ \ \omega^i,\ \Theta^\alpha,\ \Theta_\alpha^i). \end{aligned} \tag{5.23}$$

На основании работы [3] следует, что в случае $m=nr$ или $m<nr$ для тензора $X_i^{a\alpha}$ существует обратный тензор, причем имеют место равенства вида (3.13).

Свертывая первое уравнение системы (5.23) с тензором $\overset{*}{X}{}_{a\alpha}^l$, получим систему величин $\overset{*}{X}{}_{a\alpha}^l X_{ij}^{a\alpha}$, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений

$$\nabla (\overset{*}{X}{}_{a\alpha}^l X_{ij}^{a\alpha}) - R_{ki}^{ls}\omega_{sj}^k \equiv 0\,(\mathrm{mod}\ \ \omega^i,\ \Theta^\alpha,\ \Theta_\alpha^i),$$

где

$$R_{ki}^{ls} = mr\delta_k^l\delta_i^s + \overset{*}{X}{}_{a\alpha}^l X_{i\cdot k}^{a\alpha\beta}p_\beta^s. \tag{5.24}$$

Если $\det \| R_{ki}^{ls} \| \neq 0$, то справедливо утверждение о существовании тензора $\overset{*}{R}{}_{ql}^{iu}$, удовлетворяющего равенствам (2.8). Тогда, свертывая систему величин $(\overset{*}{X}{}_{a\alpha}^l X_{ij}^{a\alpha})$ с тензором $\overset{*}{R}{}_{ql}^{iu}$, получим объект аффинной связности

$$\Gamma_{qj}^u = \overset{*}{R}{}_{ql}^{iu}\overset{*}{X}{}_{a\alpha}^l X_{ij}^{a\alpha}, \tag{5.25}$$

соответствующий формам вида (2.10) и охваченный вторым продолжением подобъекта $h_i^{a\alpha\beta}$. Система величин

$$N_{\alpha j}^u = \Gamma_{qj}^u p_\alpha^q \tag{5.26}$$

является объектом линейной связности, соответствующим формам типа (2 12) с тем же порядком охвата.

Аналогично расчетам пункта 1, рассматривая систему величин

$$P_{i\beta}^{a\alpha} = X_{ij}^{a\alpha}p_\beta^j,$$

получим систему величин $N_{\alpha k}^q$, являющихся объектом линейной связности, охватываемым вторым дифференциальным продолжением подобъекта $h^{a\alpha\beta}_i$. Частичное продолжение полученного объекта линейной связности дает объект аффинной связности Γ_{qj}^u, охватываемый третьим дифференциальным продолжением подобъекта $h_i^{a\alpha\beta}$. Оказывается, что, и в этом случае, полученный объект аффинной связности охватывает объект аффинной связности (5.25). Таким образом, задание объекта аффинной связности определяет объект линейной связности пространства $K_{n,m}^{(1)}$ и наоборот, существование линейной связности пространства $K_{n,m}^{(1)}$ влечет существование аффинной связности.

Итак, доказана теорема.

Теорема 7. *Если* $m \leqslant nr$, $\det \| X_i^{a\alpha} \| \neq 0$ *и* $\det \| R_{ki}^{ls} \| \neq 0$, *где* $X_i^{a\alpha}$ *и* R_{ki}^{ls} *имеют выражения* (5.22) *и* (5.24), *то всегда существуют объекты линейной связности* $N_{\alpha k}^i$ *и аффинной связности* Γ_{jk}^i, *охватываемые соответственно вторым и третьим продолжением подобъекта* $h_i^{a\alpha\beta}$.

3. Если $h_i^{a\alpha\beta} = h_i^{a\alpha\beta}(x^j, u^\gamma)$ и $h^a = h^a(x^j, u^\gamma, p_\gamma^j)$, то система дифференциальных уравнений дифференциально-геометрического объекта $(h_i^{a\beta}, h^a)$ имеет вид

$$\nabla h_i^{a\alpha\beta} = h_{ik}^{a\alpha\beta}\omega^k + h_{i\gamma}^{a\alpha\beta}\Theta^\gamma,$$

$$\nabla h^a - h_i^{a\alpha\beta} p_\beta^l \Theta_{\alpha l}^i = h_k^a \omega^k + h_\beta^a \Theta^\beta + h_{\cdot k}^{a\beta}\Theta_\beta^k. \tag{5.27}$$

Продолжая первое уравнение системы (5.27), получим

$$\nabla h_{ik}^{a\alpha\beta} - h_l^{a\alpha\beta}\omega_{ik}^l \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^i,\ \Theta^\alpha), \tag{5.28}$$

$$\nabla h_{i\gamma}^{a\alpha\beta} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^i,\ \Theta^\alpha).$$

Из первого уравнения системы (5.28) для случая $nr = \frac{m(m+1)}{2}$ (когда $h = \det \| h_i^{a\alpha\beta} \| \neq 0$) следует существование объекта связности типа (4.7) и объекта аффинной связности (4.6).

Вводя функции вида (5.22) из второго уравнения системы (5.28), после его частичного продолжения, получим

$$\nabla X_{ij}^{a\alpha} - X_l^{a\alpha}\omega_{ij}^l \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^i,\ \Theta^\alpha). \tag{5.29}$$

Проводя расчеты, так же как и в п. 2, при $m = nr$ или $m < nr$, получим объект аффинной связности

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{mr} \overset{*}{X}{}_{a\alpha}^k X_{ij}^{a\alpha}. \tag{5.30}$$

В этом случае имеют место все рассуждения, проведенные в конце пункта 2.

4. Если $r = 1$, группа преобразований $GL(m, R)$ линейная и $h_i^{\alpha\beta} = p_\gamma^j a_{ij}^{\alpha\beta\gamma}(x^k, \omega^\varepsilon)$ то после трехкратного продолжения системы величин $h_{i\cdot j}^{\alpha\beta\gamma}$ получим тензор $a_{i\cdot j\sigma\tau\varepsilon}^{\alpha\beta\gamma}$.

Рассмотрим симметрический тензор

$$\mathfrak{a}_{ij} = a_{(i\cdot j)\,\alpha\beta\gamma}^{\alpha\beta\gamma}, \tag{5.31}$$

удовлетворяющий системе дифференциальных уравнений

$$\nabla \mathfrak{a}_{ij} = \mathfrak{a}_{ijk}\omega^k + \mathfrak{a}_{ij\alpha}\Theta^\alpha$$

с частичным продолжением

$$\nabla \mathfrak{a}_{ijk} - \mathfrak{a}_{lj}\cdot\omega_{ik}^l - \mathfrak{a}_{il}\omega_{jk}^l \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^i,\ \Theta^\alpha).$$

Если $\det \| \mathfrak{a}_{ij} \| \neq 0$, то существует тензор $\overset{*}{\mathfrak{a}}{}^{ij}$, связанный с данным тензором соотношениями

$$\overset{*}{\mathfrak{a}}{}^{jk}\mathfrak{a}_{ij} = \delta_i^k.$$

Тогда система величин

$$X^l_{ik} = \frac{1}{2}\overset{*}{a}{}^{lj}(a_{ljk} + a_{jki} - a_{kij}) \tag{5.32}$$

удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\nabla X^l_{ik} - \omega^l_{ik} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ \omega^i,\ \Theta^\alpha),$$

т.е. является объектом аффинной связности, охватываемым дифференциальным продолжением пятого порядка подобъекта $h^{\alpha\beta}_i$, а система величин

$$N^l_{\alpha i} = X^{ll}_{ki} p^k_\alpha$$

дает объект линейной связности пространства $K^{(1)}_{n,m}{}^{-}$ с тем же порядком охвата.

§ 6. Частный случай

Рассмотрим частный случай системы дифференциальных уравнений (1.3), т.е. систему вида

$$h^{a\alpha\beta}_i(x,\ u)\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} + b^{a\alpha\beta}_{ij}(x,\ u)\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} + C^{a\alpha}_i(x,\ u)\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} + \mu^a(x,\ u) = 0. \tag{6.1}$$

Функции $h^{a\alpha\beta}_i$, $b^{a\alpha\beta}_{ij}$, $C^{a\alpha}_i$ и μ^a преобразуются при преобразованиях (1.4) по следующим законам:

$$\begin{gathered}
h^{a'\alpha'\beta'}_{i'} = A^{a'}_a \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{l'}}\frac{\partial u^{\alpha'}}{\partial u^\alpha}\frac{\partial u^{\beta'}}{\partial u^\beta}\, h^{a\alpha\beta}_i, \\
b^{a'\alpha'\beta'}_{i'j'} = A^{a'}_a \frac{\partial x^i}{\partial x^{l'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial u^{\alpha'}}{\partial u^\alpha}\frac{\partial u^{\beta'}}{\partial u^\beta}\, b^{a\alpha\beta}_{ij} - \\
- A^{a'}_a \frac{\partial u^{\alpha'}}{\partial u^\alpha}\frac{\partial u^{\beta'}}{\partial u^\beta}\frac{\partial^2 x^{l'}}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial x^{l'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{l'}}\, h^{a\alpha\beta}_k, \\
C^{a'\alpha'}_{i'} = A^{a'}_a \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial u^{\alpha'}}{\partial u^\alpha}\, C^{a\alpha}_i - A^{a'}_a \frac{\partial^2 u^{\alpha'}}{\partial u^{\gamma'} \partial u^{\beta'}}\frac{\partial u^{\gamma'}}{\partial u^\gamma}\frac{\partial u^{\beta'}}{\partial u^\sigma}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\, h^{a\gamma\sigma}_i, \\
\mu^{a'} = A^{a'}_a \mu^a.
\end{gathered} \tag{6.2}$$

Поэтому под геометрией системы дифференциальных уравнений (6.1) понимается геометрия пространства $K^{(1)}_{n,m}$ с дифференциально-геометрическим объектом $(h^{a\alpha\beta}_i,\ b^{a\alpha\beta}_{ij},\ C^{a\alpha}_i,\ \mu^a)$, удовлетворяющим следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}
\nabla h^{a\alpha\beta}_i = h^{a\alpha\beta}_{ik}\omega^k + h^{a\alpha\beta}_{i\gamma}\Theta^\gamma, \\
\nabla b^{a\alpha\beta}_{ij} - h^{a\alpha\beta}_k \omega^k_{ij} = b^{a\alpha\beta}_{ijk}\omega^k + b^{a\alpha\beta}_{ij\gamma}\Theta^\gamma, \\
\nabla C^{a\alpha}_i - h^{a\gamma\beta}_i \Theta^\alpha_{\gamma\beta} = C^{a\alpha}_{ik}\omega^k + C^{a\alpha}_{i\gamma}\Theta^\gamma, \\
\nabla \mu^a = \mu^a_k \omega^k + \mu^a_\gamma \Theta^\gamma.
\end{gathered} \tag{6.3}$$

Из системы уравнений (6.3) видно, что данный объект охватывает следующие подобъекты: $h^{a\alpha\beta}_i$, μ^a, $(h^{a\alpha\beta}_i,\ b^{a\alpha\beta}_{ij})$, $(h^{a\alpha\beta}_i,\ C^{a\alpha}_i)$, $(h^{a\alpha\beta}_i,\ b^{a\alpha\beta}_{ij},\ C^{a\alpha}_i)$.

Из системы уравнений (6.3) непосредственно видно, что при $r=m$, $m<n$ и если выполнены условия, аналогичные условиям для тензора (3.1), то существует объект аффинной связности $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$, охватываемый первым дифференциальным продолжением подобъекта $h^{a\alpha\beta}_i$, а также объект линейной связ-

ности $M^i_{\beta\gamma}$, охватываемый первым дифференциальным продолжением подобъекта $h_i^{a\alpha\beta}$ Рассматривая тензор, аналогичный тензору (3.11), получим объект аффинной связности Γ^i_{jk} типа (3.16), охватываемый вторым дифференциальным продолжением подобъекта $h_i^{a\alpha\beta}$ и объект линейной связности типа $N^i_{\alpha k}$, охватываемый таким же дифференциальным продолжением подобъекта $h_i^{a\alpha\beta}$.

Если $n=\frac{rm(m+1)}{2}$, то тензор $h_i^{a\alpha\beta}$ можем рассматривать как квадратную матрицу (i – номер строки, перестановка (a, α, β) – номер столбца). Тогда, предполагая наличие для данного тензора $h_i^{a\alpha\beta}$ обратного, получим объект аффинной связности Γ^i_{jk} типа (3.23) и объект линейной связности $N^i_{\alpha k}$ типа (3.24), охватываемые первым дифференциальным продолжением подобъекта $h_i^{a\alpha\beta}$. Рассматривая тензор типа (3.26), получим объекты аффинной связности $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ типа (3.30) и линейной связности $M^i_{\beta\gamma}$ вида (3.31).

Если $nr=\frac{m(m+1)}{2}$, то на элементы тензора $h_i^{a\alpha\beta}$ можно смотреть как на квадратную матрицу (перестановка, (α, β) – номер строки, (^a_i) – номер столбца). Предполагая в этом случае наличие для данного тензора обратного, получим объект аффинной связности Γ^i_{jk} вида (4.6) и линейной связности $N^i_{\alpha k}$ вида (4.7), охватываемые первым дифференциальным продолжением подобъекта ($h_i^{a\alpha\beta}$, $b_{ij}^{a\alpha\beta}$).

Объект аффинной связности Γ^k_{ij} может быть получен свертыванием один раз продолженного первого уравнения системы (6.3) с тензором $\overset{*}{h}{}^k_{a\alpha\beta}$:

$$\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{rm}h_{ij}^{a\alpha\beta}\overset{*}{h}{}^k_{a\alpha\beta}. \tag{6.4}$$

В результате двухкратного продолжения последнего дифференциального уравнения системы (6.3) получим

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\mu^a_{ij}-\mu^a_l\omega^l_{ij}\equiv 0,\\&\nabla\mu^a_{i\beta}\equiv 0,\\&\nabla\mu^a_{\alpha j}\equiv 0,\\&\nabla\mu^a_{\alpha\beta}-\mu^a_\gamma\Theta^\gamma_{\alpha\beta}\equiv 0,\end{aligned}\right.\ (\mathrm{mod}\ \omega^i,\ \Theta^\alpha) \tag{6.5}$$

причем

$$\mu^a_{ij}=\mu^a_{ji},\quad \mu^a_{\alpha\beta}=\mu^a_{\beta\alpha},\quad \mu^a_{i\alpha}=\mu^a_{\alpha i}.$$

Если $r=m$, то для тензора μ^a_α может существовать (при условии $\det\|\mu^a_\alpha\|\neq 0$) обратный тензор $\overset{*}{\mu}{}^\alpha_a$, что имеет место соотношение

$$\mu^a_\alpha\overset{*}{\mu}{}^\sigma_a=\delta^\sigma_\alpha.$$

Тогда, свертывая последнее уравнение системы (6.5) с тензором $\overset{*}{\mu}{}^\sigma_a$, получим объект аффинной связности

$$\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}=\overset{*}{\mu}{}^\sigma_a\mu^a_{\alpha\beta}, \tag{6.6}$$

причем $\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}=\Gamma^\sigma_{\beta\alpha}$, охватываемый вторым дифференциальным продолжением подобъекта μ^a, а система величин

$$M^i_{\alpha\beta}=-\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}p^i_\sigma \tag{6.7}$$

образует объект линейной связности пространства $K^{(1)}_{n,m}$ с тем же порядком охвата.

Если $r=1$, то в этом случае справедливы все рассуждения, приведенные в § 2, т.е. существуют все те объекты линейной и аффинной связностей, которые охватываются дифференциальными продолжениями подобъекта $h_i^{\alpha\beta}$.

2. В работе В. И. Близникаса [3] доказано, что при $m=nr$ или при $m<nr$ для тензора $\mu_{\alpha j}^a$ существует тензор $\overset{*}{\mu}{}_a^{\alpha k}$, удовлетворяющий соотношениям (3.13).

Частично продолжив первое и последнее уравнения системы (6.6), получим

$$\begin{aligned} &\nabla\mu_{ij\gamma}^a-\mu_{l\gamma}^a\omega_{ij}^l\equiv 0 \pmod{\omega^i,\ \Theta^\alpha},\\ &\nabla\mu_{\alpha\beta i}^a-\mu_{i\gamma}^a\Theta_{\alpha\beta}^\gamma\equiv 0 \pmod{\omega^i,\ \Theta^\alpha}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Свертывая первое уравнение системы (6.8) с тензором $\overset{*}{\mu}{}_a^{k\gamma}$, а второе — с тензором $\overset{*}{\mu}{}_a^{i\sigma}$, получим объекты аффинных связностей без кручения

$$\begin{aligned} &\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma=\frac{1}{nr}\,\overset{*}{\mu}{}_a^{i\sigma}\mu_{\alpha\beta i}^a,\\ &\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{mr}\,\overset{*}{\mu}{}_a^{k\gamma}\mu_{ij\gamma}^a, \end{aligned} \tag{6.9}$$

охватываемые третьим продолжением подобъекта μ^a и соответствующие формам вида (2 10) и (3.7').

Так как величины μ_i^a и μ_α^a являются тензорами, то в данном случае величины

$$\begin{aligned} &h^\alpha=\mu_i^a\overset{*}{\mu}{}_a^{\alpha i},\\ &h^j=\mu_\alpha^a\overset{*}{\mu}{}_a^{\alpha j} \end{aligned} \tag{6.10}$$

тоже являются тензорами, удовлетворяющими дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} &\nabla h^\alpha=h_i^\alpha\omega^i+h_\beta^\alpha\Theta^\beta,\\ &\nabla h^j=h_i^j\omega^i+h_\beta^j\Theta^\beta, \end{aligned}$$

причем

$$\left.\begin{aligned} &\nabla h_i^\alpha\equiv 0,\\ &\nabla h_\beta^j\equiv 0. \end{aligned}\right. \pmod{\omega^i,\ \Theta^\alpha} \tag{6.11}$$

Тогда существуют тензоры

$$\begin{aligned} &H_i^j=h_i^\alpha h_\alpha^j,\\ &H_\beta^\alpha=h_i^\alpha h_\beta^i, \end{aligned}$$

частичные продолжения которых имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\nabla H_{i\alpha}^j\equiv 0,\\ &\nabla H_{\beta k}^\alpha\equiv 0. \end{aligned}\right. \pmod{\omega^i,\ \Theta^\alpha} \tag{6.12}$$

Объекты аффинной связности (6.9) и тензоры (6.12) образуют обобщенные аффинные связности, определенные формами вида

$$\begin{aligned} &\tilde\omega_j^i=\omega_j^i+\Gamma_{jk}^i\omega^k+H_{j\alpha}^i\Theta^\alpha,\\ &\tilde\Theta_\beta^\alpha=\Theta_\beta^\alpha+\mu_{\beta\gamma}^\alpha\Theta^\gamma+H_{\beta k}^\alpha\omega^k. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Из частичного продолжения первого уравнения системы (6.3) и второго уравнения той же системы следует, что система величин

$$H^{a\alpha\beta}_{ij} = b^{a\alpha\beta}_{ij} - h^{a\alpha\beta}_{ij} \tag{6.14}$$

является тензором. Рассмотрим тензор

$$X^{a\alpha}_{j} = H^{a\alpha\beta}_{ij} p^{i}_{\beta}, \tag{6.15}$$

удовлетворяющий системе дифференциальных уравнений

$$\nabla X^{a\alpha}_{j} = X^{a\alpha}_{jk}\omega^{k} + X^{a\alpha}_{j\beta}\Theta^{\beta} + X^{a\alpha\beta}_{j\cdot k}\Theta^{k}_{\beta} \tag{6.16}$$

с частичным продолжением

$$\begin{aligned} &\nabla X^{a\alpha}_{jk} - X^{a\alpha}_{l}\omega^{l}_{jk} - X^{a\alpha\beta}_{j\cdot l}\Theta^{l}_{\beta k} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ \omega^{i},\ \Theta^{\alpha},\ \Theta^{i}_{\alpha}),\\ &\nabla X^{a\alpha}_{j\beta} + X^{\alpha\gamma}_{j}\Theta^{\alpha}_{\gamma\beta} - X^{a\alpha\gamma}_{j\cdot k}\Theta^{k}_{\gamma\beta} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ \omega^{i},\ \Theta^{\alpha},\ \Theta^{i}_{\alpha}). \end{aligned} \tag{6.17}$$

Из ранее сказанного следует, что можем говорить о существовании обратного тензора для тензора $X^{a\alpha}_{j}$, если $m < nr$ или $m = nr$. Свертывая системы величин, удовлетворяющих предыдущим системам дифференциальных уравнений с тензорами $\overset{*}{X}{}^{i}_{a\alpha}$ и $\overset{*}{X}{}^{j}_{a\varepsilon}$, получим системы дифференциальных уравнений

$$\nabla(\overset{*}{X}{}^{i}_{a\alpha} X^{a\alpha}_{jk}) - \Pi^{is}_{lj}\omega^{l}_{sk} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ \omega^{i},\ \Theta^{\alpha},\ \Theta^{i}_{\alpha}), \tag{6.18}$$

где

$$\Pi^{is}_{lj} = mr\delta^{i}_{l}\delta^{s}_{j} - \overset{*}{X}{}^{i}_{a\alpha} X^{a\alpha\gamma}_{jl} p^{s}_{\gamma} \tag{6.19}$$

$$\nabla(\overset{*}{X}{}^{j}_{a\varepsilon} X^{a\alpha}_{j\beta}) - \Pi^{\gamma\alpha}_{\varepsilon\sigma}\Theta^{\sigma}_{\gamma\beta} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ \omega^{i},\ \Theta^{\alpha},\ \Theta^{i}_{\alpha}), \tag{6.20}$$

где

$$\Pi^{\gamma\alpha}_{\varepsilon\sigma} = -rn\delta^{\gamma}_{\varepsilon}\delta^{\alpha}_{\sigma} + \overset{*}{X}{}^{j}_{a\varepsilon} X^{a\alpha\gamma}_{j\cdot k} p^{k}_{\sigma}. \tag{6.21}$$

Если $\det\|\Pi^{is}_{lj}\| \neq 0$ и $\det\|\Pi^{\gamma\alpha}_{\varepsilon\sigma}\| \neq 0$, то для данных тензоров Π^{is}_{lj} и $\Pi^{\gamma\alpha}_{\varepsilon\sigma}$ существуют тензоры $\overset{*}{\Pi}{}^{ju}_{qi}$ и $\overset{*}{\Pi}{}^{\tau\varepsilon}_{\alpha\mu}$, связанные с данными тензорами соотношениями типа (2.8) и (3.6). Свертывая системы величин, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям (6.18) и (6.20) с тензорами $\overset{*}{\Pi}{}^{ju}_{qi}$ и $\overset{*}{\Pi}{}^{\tau\varepsilon}_{\alpha\mu}$ и учитывая равенства (2.8) и (3.6), получим объекты аффинных связностей

$$\Gamma^{u}_{qk} = \overset{*}{\Pi}{}^{ju}_{qi}\overset{*}{X}{}^{i}_{a\alpha} X^{a\alpha}_{jk}, \tag{6.22}$$

$$\Gamma^{\tau}_{\mu\beta} = \overset{*}{\Pi}{}^{\tau\varepsilon}_{\alpha\mu}\overset{*}{X}{}^{j}_{a\varepsilon} X^{a\alpha}_{j\beta}, \tag{6.23}$$

охватываемые третьим продолжением подобъекта $(h^{a\alpha\beta}_{i},\ b^{a\alpha\beta}_{ij})$, а система величин

$$\begin{aligned} &N^{u}_{\alpha k} = \Gamma^{u}_{qk} p^{q}_{\alpha},\\ &M^{i}_{\mu\beta} = -\Gamma^{\tau}_{\mu\beta} p^{i}_{\tau} \end{aligned} \tag{6.24}$$

образует объекты линейной связности пространства $K^{(1)}_{n,\ m}$ с тем же порядком охвата.

Рассмотрим системы величин

$$\overset{\Gamma}{\nabla}_{k} X^{a\alpha}_{j} \quad \text{и} \quad \overset{\Gamma}{\nabla}_{\beta} X^{a\alpha}_{j},$$

которые являются коэффициентами при формах ω^{k} и Θ^{β}, если в системе дифференциальных уравнений (6.16) формы ω_j^i, Θ_β^α и Θ_α^i заменить формами (2.10), (3.7′), (2.12) или (3.8′), определяющими аффинные связности (6.22), (6.23) и (6.24). Оказывается, что эти величины являются тензорами. Свертывая их с тензором $\overset{*}{X}{}^i_{a\alpha}$, обратным тензору $X_i^{a\alpha}$, получим систему тензоров

$$\begin{aligned} C^\alpha_{\beta j} &= \overset{*}{X}{}^k_{a\beta}(\overset{\Gamma}{\nabla}_k X_j^{a\alpha}), \\ C^i_{\beta j} &= \overset{*}{X}{}^i_{a\alpha}(\overset{\Gamma}{\nabla} X_j^{a\alpha}). \end{aligned} \tag{6.25}$$

Таким образом, объекты аффинных связностей (6.22), (6.23) и тензоры (6.25) определяют обобщенную аффинную связность, определенную формами вида (6.13).

3. Рассмотрим случай $r=m+1$ при условии, что ранг матрицы $\|\mu_\alpha^a\|$ равен m. В этом случае существует такое ковекторное поле m_a, компоненты которого удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\nabla m_a = m_{ai}\omega^i + m_{a\alpha}\Theta^\alpha, \tag{6.26}$$

что система уравнений

$$\mu_\alpha^a m_a = 0 \tag{6.27}$$

имеет решение

$$\tilde{m}_a = \lambda m_a, \tag{6.28}$$

определенное с точностью до скалярного множителя λ (его будем считать функцией от x^i и u^α), причем

$$d\lambda = \lambda_i\omega^i + \lambda_\alpha\Theta^\alpha.$$

В этом случае существует тензор

$$F_{\alpha\beta} = \mu^a_{\alpha\beta} m_a, \quad \tilde{F}_{\alpha\beta} = \lambda F_{\alpha\beta}, \quad F_{\alpha\beta} = F_{\beta\alpha}, \tag{6.29}$$

удовлетворяющий системе дифференциальных уравнений

$$\nabla F_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta i}\omega^i + F_{\alpha\beta\gamma}\Theta^\gamma$$

с дифференциальным продолжением

$$\begin{aligned} &\nabla F_{\alpha\beta i} \equiv 0 \pmod{\omega^i, \Theta^\alpha}, \\ &\nabla F_{\alpha\beta\gamma} - F_{\sigma\beta}\Theta^\sigma_{\alpha\gamma} - F_{\alpha\sigma}\Theta^\sigma_{\beta\gamma} \equiv 0 \pmod{\omega^i, \Theta^\alpha}. \end{aligned} \tag{6.30}$$

В дальнейшем будем предполагать, что тензор $F_{\alpha\beta}$ невырожденный, т.е. $\det \| F_{\alpha\beta} \| \neq 0$. Тогда существует тензор $\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta}$, обратный тензору $F_{\alpha\beta}$ и $\tilde{\overset{*}{F}}{}^{\alpha\beta} = \lambda^{-1}\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta}$.

Из (6.30) следует, что величина

$$\Gamma^\tau_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2}\overset{*}{F}{}^{\beta\tau}(F_{\alpha\beta\gamma} + F_{\beta\gamma\alpha} - F_{\gamma\alpha\beta}) \tag{6.31}$$

удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\nabla\Gamma^\tau_{\alpha\gamma} - \Theta^\tau_{\alpha\gamma} \equiv 0 \pmod{\omega^i, \Theta^\alpha},$$

причем

$$\tilde{\Gamma}^\tau_{\alpha\gamma} = \Gamma^\tau_{\alpha\gamma} + G^{\tau\mu}_{\alpha\gamma}\tilde{\lambda}_\mu, \tag{6.32}$$

где

$$\tilde{\lambda}_\mu = \frac{\lambda_\mu}{\lambda}, \qquad G^{\tau\mu}_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2}(\delta^\tau_\gamma\delta^\mu_\alpha + \delta^\tau_\alpha\delta^\mu_\gamma - \overset{*}{F}{}^{\tau\mu}F_{\alpha\gamma}).$$

Вопрос отыскания связности, инвариантной относительно конформных преобразований тензора (6.29), сводится к конструированию такого ковекторного поля φ_γ, которое преобразуется при перенормировке ковектора m_a (6.28) по формуле

$$\tilde{\varphi}_\gamma = \varphi_\gamma - \tilde{\lambda}_\gamma.$$

В качестве такого ковекторного поля могут быть взяты поля

$$\begin{aligned} \varphi_\gamma &= \frac{2}{m+2} \overset{*}{F}{}^{\alpha\beta} (\overset{\Gamma}{D}{}^*_\gamma \overset{\Gamma}{D}{}^*_\beta \mu^a_\alpha) m_a, \\ \varphi^*_\gamma &= \frac{2}{m+2} \overset{*}{F}{}^{\alpha\beta} (\overset{\Gamma}{D}{}^*_\beta \overset{\Gamma}{D}{}^*_\gamma \mu^a_\alpha) m_a, \end{aligned} \tag{6.33}$$

где $\overset{\Gamma}{D}{}^*_\beta$ — символ неголономной ковариантной производной.

Таким образом, аффинные связности

$$\begin{aligned} \underset{\varphi}{\Lambda}{}^\tau_{\alpha\gamma} &= \Gamma^\tau_{\alpha\gamma} + G^{\tau\varepsilon}_{\alpha\gamma} \varphi_\varepsilon, \\ \underset{\overset{*}{\varphi}}{\Lambda}{}^\tau_{\alpha\gamma} &= \Gamma^\tau_{\alpha\gamma} + G^{\tau\varepsilon}_{\alpha\gamma} \varphi^*_\varepsilon, \end{aligned} \tag{6.34}$$

являются связностями, инвариантными относительно конформных преобразований тензора $F_{\alpha\beta}$. Эти связности охватываются третьим продолжением подобъекта μ^a.

4. Если $r=n+1$, $m<n$ и ранг матрицы $\| \mu^a_i \|$ равен n, то совершенно аналогично определяется тензор

$$F_{ij} = \mu^a_{ij} m_a, \quad \bar{F}_{ij} = \lambda F_{ij} \tag{6.35}$$

и соответствующие ему аффинные связности

$$\begin{aligned} \underset{\psi}{\Lambda}{}^i_{jk} &= \Gamma^i_{jk} + G^{is}_{jk} \psi_s, \\ \underset{\overset{*}{\psi}}{\Lambda}{}^i_{jk} &= \Gamma^i_{jk} + G^{is}_{jk} \overset{*}{\psi}_s, \end{aligned} \tag{6.36}$$

инвариантные относительно конформных преобразований (6.35) тензора F_{ij}, где

$$\begin{aligned} \Gamma^i_{jk} &= \frac{1}{2} \overset{*}{F}{}^{ip} (F_{kpj} + F_{pjk} - F_{jkp}), \\ \psi_s &= \frac{2}{n+2} \overset{*}{F}{}^{ij} (\overset{\Gamma}{D}{}^*_s \overset{\Gamma}{D}{}^*_j \mu^a_i) m_a. \end{aligned} \tag{6.37}$$

5. Так как тензоры $F_{\alpha\beta i}$ и $F_{ij\alpha}$ при вышеуказанных преобразованиях преобразуются по формулам

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\alpha\beta i} &= \lambda F_{\alpha\beta i} + \lambda_i F_{\alpha\beta}, \\ \tilde{F}_{ij\alpha} &= \lambda F_{ij\alpha} + \lambda_\alpha F_{ij}, \end{aligned} \tag{6.38}$$

то, свертывая их соответственно с тензорами $\overset{*}{F}{}^{\beta\gamma}$ (пункт 3) и $\overset{*}{F}{}^{jk}$ (пункт 4), получим тензоры $C^\gamma_{\alpha i}$ и $C^k_{i\alpha}$, преобразующиеся при вышеуказанных преобразованиях по формулам

$$\begin{aligned} \tilde{C}^\gamma_{\alpha i} &= C^\gamma_{\alpha i} + \tilde{\lambda}_i \delta^\gamma_\alpha, \\ \tilde{C}^k_{i\alpha} &= C^k_{i\alpha} + \tilde{\lambda}_\alpha \delta^k_i. \end{aligned} \tag{6.39}$$

Из предыдущих равенств следует, что для ковекторных полей вида (6.33) и (6.37) существуют тензоры

$$\begin{aligned} N^k_{i\alpha} &= C^k_{i\alpha} + \delta^k_i \varphi_\alpha, \\ M^\gamma_{\alpha i} &= C^\gamma_{\alpha i} + \delta^\gamma_\alpha \psi_i, \end{aligned} \tag{6.40}$$

инвариантные относительно конформных преобразований соответствующих тензоров F_{ij} и $F_{\alpha\beta}$.

Итак, аффинная связность (6.34) и второй тензор (6.40) для случая $r=m+1$, а также аффинная связность (6.36) и первый тензор (6.40) для случая $r=n+1$ образуют обобщенные аффинные связности, определенные формами

$$\tilde{\omega}^i_j = \omega^i_j + \underset{\varphi}{\Lambda^i_{jk}}\omega^k + N^i_{j\alpha}\Theta^\alpha,$$

$$\tilde{\Theta}^\gamma_\alpha = \Theta^\gamma_\alpha + \underset{\psi}{\Lambda^\gamma_{\alpha\beta}}\Theta^\beta + M^\gamma_{\alpha i}\omega^i$$

и формами вида (2.27), инвариантные относительно конформных преобразований соответственно тензоров F_{ij} и $F_{\alpha\beta}$. Эти связности охватываются третьим продолжением подобъекта μ^a.

6. Если $r=m=1$, а n – любое целое число, то имеем одно обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Дифференциально-геометрический объект $(h_i,\ b_{ij},\ c_i,\ \mu)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \nabla h_i &= h_{ij}\omega^j, \\ \nabla b_{ij} - h_l\omega^l_{ij} &= b_{ijk}\omega^k, \\ \nabla C_i &= C_{ij}\omega^j, \\ d\mu &= \mu_i\omega^i. \end{aligned} \tag{6.41}$$

с частичным продолжением

$$\nabla h_{ij} - h_l\omega^l_{ij} = h_{ijk}\omega^k.$$

В случае, если $h_{ij} \neq b_{ij}$, то существует тензор

$$X_{ij} = h_{ij} - b_{ij},$$

удовлетворяющий системе дифференциальных уравнений

$$\nabla X_{ij} = X_{ijk}\omega^k.$$

Предполагая $\det \| X_{ij} \| \neq 0$, всегда можем определить объект аффинной связности

$$\Gamma^r_{ik} = \frac{1}{2}\overset{*}{X}{}^{jr}(X_{ijk} + X_{jki} - X_{kij}),$$

определяемый компонентами второго продолжения подобъекта $(h_i,\ b_{ij})$, причем тензор $\overset{*}{X}{}^{jr}$ является обратным для тензора X_{jr}.

В заключение выражаю глубокую благодарность В. И. Близникасу за постановку задачи и помощь при ее решении.

Вильнюсский Государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
11.VI.1969

Литература

1. В. И. Близникас, О геометрии нормальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений высшего порядка, Лит. матем. сб., VII, № 2 (1967), 231—248.
2. В. И. Близникас, О геометрии систем дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными, Лит. матем. сб., VII, № 2 (1967), 250—264.
3. В. И. Близникас, Аффинные связности, присоединенные к квазилинейной системе дифференциальных уравнений первого порядка с частными производными, Известия высших учебных заведений, Математика, 1968, № 1 (1968), 18—22.
4. A. Kriszten, Zur Geometrie der partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung, Math. Ann., 1965, 158, N 1, 35—45.
5. Г. Ф. Лаптев, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий, Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований, Тр. Моск. матем. о-ва, т. 2, 1953, 275—385.
6. А. Е. Либер, К теории поверхностей в аффинных и центрально-аффинных m-мерных пространствах, Труды семинара по векторному и тензорному анализу, Выпуск 13, Изд. Моск. унив., 1966, 410—446.
7. З. Ю. Лупейкис, О геометрии квазилинейных систем дифференциальных уравнений второго порядка, Третья Прибалтийская геометрическая конференция (Тезисы докладов), Паланга, 1968, 107—108.
8. З. Ю. Лупейкис, О геометрии квазилинейных систем дифференциальных уравнений второго порядка, Лит. мат. сб., IX, № 3 (1969), 535—566.

ANTROS EILĖS KVAZITIESINIŲ DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SISTEMŲ SU DALINĖMIS IŠVESTINĖMIS GEOMETRIJOS KLAUSIMU

Z. Lupeikis

(*Reziumė*)

Straipsnyje G. Laptevo metodu nagrinėjami antros eilės kvazitiesinių diferencialinių lygčių sistemų su dalinėmis išvestinėmis

$$h_i^{a\alpha\beta}\left(x^j,\ u^\gamma,\ \frac{\partial x^j}{\partial u^\gamma}\right)\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}+h^a\left(x^j,\ u^\gamma,\ \frac{\partial x^j}{\partial u^\gamma}\right)=0$$

$$(i,\ j,\ldots=1,\ 2,\ldots,\ n;\ \alpha,\ \beta,\ldots=1,\ 2,\ \ldots,m;\ a,\ b,\ \ldots=1,\ 2,\ \ldots,\ r) \qquad (1)$$

geometrijos klausimai, kai $r=1,\ n=\frac{m(m+1)}{2}$; $r=1,\ m<n<\binom{m+1}{2}$; $r=m;\ n=\frac{rm(m+1)}{2}$; $r=\frac{nm(m+1)}{2}+1$; $r=n$; $m<nr$.

Atskirai išnagrinėti aukščiau nurodytų atvejų geometrijos klausimai, kai funkcijos $h_i^{a\alpha\beta}$ priklauso tik nuo x^j, u^γ ir kai parametrų u^α transformacijų grupė yra afininė.

Diferencialinių lygčių (1) sistemos geometriją suprasime kaip pirmos eilės m-mačių paviršinių elementų erdvės $K_{n,m}^{(1)}\left(x^i,\ u^\alpha,\ \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\right)$ su fundamentaliniu diferencialiniu-geometriniu objektu $(h_i^{a\alpha\beta},\ h^a)$ geometriją.

Minėtiems atvejams surasti afininio ir tiesinio sąryšio objektai ir nustatyta tų objektų aprėpimo fundamentaliniu diferencialiniu-geometriniu objektu $(h_i^{a\alpha\beta},\ h^a)$ eilė.

ÜBER GEOMETRIE DES QUASILINEARISCHEN SYSTEMS DER PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG

Z. Lupeikis

(*Zusammenfassung*)

In dem vorliegenden Artikel wird mit Hilfe der Methode von G. Laptew die Geometrie des quasilinearischen Systems der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$h_i^{\alpha\beta}\left(x^i,\ u^\gamma,\ \frac{\partial x^j}{\partial u^\gamma}\right)\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}+h^a\left(x^j,\ u^\gamma,\ \frac{\partial x^j}{\partial u^\gamma}\right)=0$$

$$(i,\ j,\ldots=1,\ 2,\ldots,\ n;\ \alpha,\ \beta,\ldots=1,\ 2,\ \ \ m;\ a,\ b,\ldots=1,\ 2,\ldots,\ r)$$

behandelt, wenn $r=1,\ n=\frac{m(m+1)}{2}$; $r=1,\ m<n<\binom{m+1}{2}$; $r=m;\ n=\frac{rm(m+1)}{2}$; $r=\frac{nm(m+1)}{2}+1$; $r=n;\ m<nr$.

Speziell sind die obenerwähnten geometrischen Fälle behandelt worden, wenn die Funktionen $h_i^{\alpha\beta}$ nur von x^j und u^γ abhängen.

Für diese Fälle sind Linear- und Affinzusammenhangsobjekte festgestellt worden.