X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1970

УДК–519.55

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ ФАВАРА НА МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Я. Ф. Визель

Заметка посвящена решению поставленной А. И. Перовым задачи обобщения известной теоремы Фавара (см. [2]) об интеграле почти периодической функции на случай почти периодических функций нескольких переменных.

Будем рассматривать функции $f(x)$, определенные на конечномерном пространстве E_x и со значениями в конечномерном пространстве E_y. Функцию $f(x)$ назовем *почти периодической*, если существует последовательность

$$P_N(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k \exp\left(i\lambda_k(x)\right) \tag{1}$$

(где $a_k \in E_y$ и λ_k – функционал на E_x, то есть $\lambda_k \in E_\lambda = E_x^*$) такая, что

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{x\in E_x} \|f(x) - P_N(x)\| = 0.$$

Для таких функций определяется *ряд Фурье*

$$f(x) \sim \sum_n f\lambda_n \exp\left(i\lambda_n(x)\right), \quad \lambda_n \in E_\lambda, \quad f\lambda_n \in E_y. \tag{2}$$

Множество $\{\lambda_n\}$ называется *спектром* функции $f(x)$, а векторы $f\lambda_n$ – *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$. (Подробное изложение см. [2], [3].)

Назовем функцию $\Gamma_j(t)$ *j-мультипликатором* функции $f(x)$ с рядом Фурье (2), если ряд

$$\sum_n \Gamma_j(\lambda_n^j) f\lambda_n \exp\left(i\lambda_n(x)\right) \tag{3}$$

также является рядом Фурье некоторой почти периодической функции. (Здесь λ_n^j–j-я координата вектора $\lambda_n = (\lambda_n^1, \ldots, \lambda_n^m)$ $m = \dim E_\lambda$, $t \in R^1$.) Почти периодическую функцию, соответствующую ряду (3), будем обозначать $f_{\Gamma_j}(x)$.

Теорема 1. *Пусть* $\Gamma_j(t)$ *– непрерывно дифференцируемая функция, для которой конечны интегралы:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_j(t)|^2 dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d\Gamma_j(t)}{dt} \right|^2 dt.$$

Тогда функция $\Gamma_j(t)$ *j-мультипликатор.*

Доказательство аналогично тому, которое проведено С. Бохнером [1] для случая скалярных почти периодических функций.

Лемма. *Пусть $f(x)$ почти периодическая операторная функция со значениями в $L(E_x, E_y)$ и криволинейный интеграл второго рода от нее $\int^{x} f(\delta)\, d\delta$ не зависит от пути интегрирования. Пусть функция $f(x)$ имеет спектр, удовлетворяющий условию $\inf_n |\lambda_n^j| > M$ хотя бы для одной j-ой координаты векторов λ_n.*

Тогда $F(x)$ — почти периодическая функция.

Доказательство*. Условие независимости от пути интегрирования означает, что коэффициенты Фурье функции $f(x)$ удовлетворяют равенствам:

$$f\lambda_n = i\lambda_n \otimes a_n, \quad a_n \in E_y, \quad \lambda_n \in E_\lambda. \tag{4}$$

Покажем, что ряд $\sum_n a_n \exp\left(i\lambda_n(x)\right)$ есть ряд Фурье некоторой почти периодической функции. Возьмем вектор $h = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{j}, 0, \ldots, 0)$ $h \in E_x$. $f(x)$ при каждом фиксированном x есть линейный оператор на E_x, поэтому

$$f(x)(h) \sim \sum_n \lambda_n^j a_n \exp\left(i\lambda_n(x)\right) \tag{5}$$

Рассмотрим функцию скалярного аргумента t, которая при $|t| \geqslant M$ равна $\frac{1}{t}$, а при $|t| < M$ продолжена так, чтобы выполнялись условия теоремы 1. Тогда эта функция является j-мультипликатором. Обозначим ее через $V_j(t)$. В результате применения к ряду (5) мы получим ряд

$$\sum_n a_n \exp\left(i\lambda_n(x)\right). \tag{6}$$

Этот ряд является рядом Фурье некоторой почти периодической функции.

Лемма доказана. Другое доказательство этой леммы см. в [3].

Теорема 2. *Пусть $f(x)$ — почти периодическая операторная функция со значениями в $L(E_x, E_y)$ и криволинейный интеграл второго рода $\int^{x} f(\delta)\, d\delta$ не зависит от пути интегрирования. Пусть спектр $f(x)$ удовлетворяет условию: $\|\lambda_n\| \geqslant M > 0$.*

Тогда $F(x)$ почти периодическая функция.

Доказательство. В силу того, что $\|\lambda_n\| \geqslant M$ существует такое число $M_1 > 0$, что $\inf_n \max_j |\lambda_n^j| \geqslant M_1$. Рассмотрим набор функций $\Gamma_j(t)$, определенных следующим образом: $\Gamma_j(t)$ равна 1 при $|t| \leqslant M_1 - \varepsilon$, $\Gamma_j(t)$ равна нулю при $|t| \geqslant M_1$ и на промежутке $[M_1 - \varepsilon, M_1]$ $\Gamma_j(t)$ продолжается таким образом, чтобы выполнялись условия теоремы 1 ($j = 1, \ldots, m$). Функции $\Gamma_j(t)$ j — мультипликаторы, поэтому функция $f_{1-\Gamma_1}(x) = f(x) - f_{\Gamma_1}(x)$ почти периодична.

---

* Эквивалентность (4) и условия независимости от пути интегрирования доказаны А. И. Перовым.

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно показать, что интегралы

$$\int^{x} f_{\Gamma_1}(\delta)\, d\delta \tag{7}$$

$$\int^{x} f_{1-\Gamma_1}(\delta)\, d\delta \tag{8}$$

почти периодичны. Так как функция $f_{1-\Gamma_1}(x)$ удовлетворяет условиям леммы, то интеграл (8) почти периодичен. Покажем теперь, что интеграл (7) также почти периодичен.

С помощью мультипликатора $\Gamma_2(t)$ представим $f_{\Gamma_1}(x)$ как сумму почти периодических функций: $f_{\Gamma_1}(x) = f_{\Gamma_1\Gamma_2}(x) + f_{\Gamma_1(1-\Gamma_2)}(x)$. Повторяя рассуждения, проведенные для $f(x)$, мы получим, что задача свелась к доказательству почти периодичности интеграла $\int^{x} f_{\Gamma_1\Gamma_2}(\delta)\, d\delta$. Продолжая этот процесс, но с использованием мультипликаторов $\Gamma_3(t)$, $\Gamma_4(t)$, $\ldots$, $\Gamma_m(t)$, мы получим, что задача сведена к доказательству почти периодичности интеграла от функции

$$f_{\Gamma_1 \ldots \Gamma_m}(x) \sim \sum_{\{n} \prod_{j=1}^{m} \Gamma_j(\lambda_n^j) f_{\lambda_n} \exp\left(i\lambda_n(x)\right).$$

Из определения числа M_1 и функций $\Gamma_j(t)$ следует, что

$$\prod_{j=1}^{m} \Gamma_j(\lambda_n^j) = 0.$$

Теорема доказана.

Воронеж

Поступило в редакцию
18.XI.1968

Литература

1. S. Bochner, Über gewisse Differential- und allgemeinere Gleichungen, deren Lösungen fastperiodisch sind. II. Teil. Der Beschränktheitssatz, Math. Annalen, 103, 1930, 588–597.
2. Б. М. Левитан, Почти периодические функции, Гостехиздат, М., 1953.
3. А. И. Перов и Т. К. Кацаран, Теоремы Фавара и Бора–Нойгебауэра для многомерных дифференциальных уравнений, Известия высших учебных заведений, № 5, 1968.

APIE VIENĄ FAVARO TEOREMOS APIBENDRINIMĄ DAUGIAMAČIUI ATVEJUI

J. Vizelis

(*Reziumė*

Darbe apibendrinama beveik periodinių daugelio kintamųjų funkcijų neapibrėžtinio integralo Favaro teorema.

ON SOME GENERALIZATION OF FAVARD THEOREM FOR MULTIDIMENSIONAL CASE

Ya. Vizel

(*Summary*)

The work contains some generation of Favard theorem on indefinite integral of an almos t periodic function for the case of many variables.