X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

1970

УДК–519.21

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А. Бикялис

1. Работа посвящена исследованию поведения многомерной характеристической функции на R^k и применению полученных неравенств для изучения строения остаточного члена в многомерных локальных предельных теоремах.

Если функция распределения $F(\mathbf{x})$ k-мерного случайного вектора ξ имеет плотность $g(\mathbf{x})$, то полученные С. М. Садиковой условия (некоторые ограничения на плотность $g(\mathbf{x})$) [1], достаточны для степенного убывания модуля характеристической функции $f(\mathbf{t})$ случайного вектора ξ при $\|\mathbf{t}\|\to\infty$; $\|\mathbf{t}\|$ – длина вектора $\mathbf{t}\in R^k$, R^k – евклидовое пространство. При этом, она решила задачу для распределений, сосредоточенных на некоторых поверхностях.

Здесь мы продолжим исследование в этом направлении, только при других условиях. Предположим, что случайный вектор ξ имеет конечные моменты второго порядка и невырожденную ковариационную матрицу V. Отдельно рассмотрим два случая: 1) ξ имеет плотность $g(x)$, ограниченную константой C; 2) ξ является решетчатым в R^k.

2. Обозначим: $\mathbf{t}V\mathbf{t}'$ – квадратичная форма, соответствующая V; $|A|$ – определитель матрицы A; $(\mathbf{t},\mathbf{x})$ – скалярное произведение векторов $\mathbf{t}$, $\mathbf{x}\in R^k$; $\mathbf{t}'$ – вектор столбец; V^{-1} – матрица, обратная матрице V; V' – транспонированная матрица, $P\{\ldots\}$ – вероятность указанного в скобках события.

Лемма 1. *Если ξ имеет плотность, ограниченную константой C, и невырожденную ковариационную матрицу, то*

$$|f(\mathbf{t})|\leqslant\exp\left\{-\frac{\pi^2}{27}\cdot\frac{(\mathbf{t}V\mathbf{t}')\,\left((k-1)!!\right)^2}{C^2|V|(8\pi)^k k^{k-1}\left(2\pi+\sqrt{k}\sqrt{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}\right)^2}\right\}. \qquad (1)$$

Замечание. При $k=1$ получаем известное одномерное неравенство (см. [2–4]).

Из формулы (10) работы [5] и формулы (1) немедленно вытекает

Теорема 1. *Если ξ удовлетворяет условиям леммы 1 и имеет конечные моменты s-того порядка ($s\geqslant3$), то для плотности $p_n(\mathbf{x})$ суммы*

$$\mathbf{S}_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{k}(\xi_j-M\xi_j)$$

независимых случайных векторов $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *с одним и тем же распределением случайного вектора* ξ *имеет место асимптотическое разложение*

$$\left| p_n(\mathbf{x}) - \sum_{j=0}^{s-3} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j P_j(-\varphi)(\mathbf{x}) \right| \leqslant \frac{2^{4(s-1)}\,\Gamma\left(\frac{s+k}{2}\right)\beta_s}{\pi^{\frac{k}{2}}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{|V|}\; n^{\frac{s-2}{2}}} +$$

$$+ Cn^{\frac{k}{2}} \exp\left\{ -\frac{\pi^2}{27} \cdot \frac{(n-2)\left((k-1)!!\right)^2}{C^2 |V| (8\pi)^k k^{k-1} \left(16\pi\beta_s^{\frac{1}{s-2}} + \sqrt{k}\right)^2} \right\}.$$

Здесь $M\xi_j$ *— вектор математических ожиданий случайного вектора* ξ_j, $P_j(-\varphi)(\mathbf{x})$ *— известные функции (см. [5]),*

$$\beta_s = \sup_{\|\mathbf{t}\|=1} \frac{M\,|(\xi_1 - M\xi_1,\ \mathbf{t})|^s}{\left(M(\xi_1 - M\xi_1,\ \mathbf{t})^2\right)^{\frac{s}{2}}}, \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u}\,du.$$

Доказательство леммы 1. Поскольку для $\mathbf{t}=\mathbf{0}$ утверждение леммы тривиально, ниже будем считать, что $\mathbf{t}\neq\mathbf{0}$.

Если $p(\mathbf{x})$ — плотность, соответствующая характеристической функции $|f(\mathbf{t})|^2$, то имеем

$$\frac{1}{2}\left(1 - |f(2\pi\mathbf{t})|^2\right) = \int_{R^k} \sin^2\pi(\mathbf{t},\ \mathbf{x})\,p(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

Пространство R^k разделим на три непересекающихся множества

$$A_1 = \{\mathbf{x} : \sin^2\pi(\mathbf{t},\ \mathbf{x}) \geqslant \varepsilon\}, \quad A_2 = \{\mathbf{x} : \sin^2\pi(\mathbf{t},\ \mathbf{x}) < \varepsilon,\ \mathbf{x}V^{-1}\mathbf{x}' \leqslant r^2\},$$

$$A_3 = \{\mathbf{x} : \sin^2\pi(\mathbf{t},\ \mathbf{x}) < \varepsilon,\ \mathbf{x}V^{-1}\mathbf{x}' > r^2\}.$$

Для некоторых ε и $r>0$ $(0<\varepsilon\leqslant 1$, ниже подберем $r^2=2k)$ получаем

$$\int_{A_1} \sin^2\pi(\mathbf{t},\ \mathbf{x})\,p(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \geqslant \varepsilon \int_{A_1} p(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

и

$$\int_{A_3} \sin^2\pi(\mathbf{t},\ \mathbf{x})\,p(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \leqslant \int_{\mathbf{x}V^{-1}\mathbf{x}'\geqslant r^2} p(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \leqslant \frac{1}{r^2}\int_{R^k} (\mathbf{x}V^{-1}\mathbf{x}')\,p(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} =$$

$$= \frac{2}{r^2}\sum_{i,j=1}^{k} \frac{|V_{ij}|}{|V|} M\xi_i\xi_j = \frac{2k}{r^2}.$$

Здесь $|V_{ij}|$ — адъюнкт в определителе $|V|$, соответствующий элементу $M\xi_i\xi_j$. Следовательно,

$$\frac{1}{2}\left(1 - |f(2\pi\mathbf{t})|^2\right) \geqslant \varepsilon \int_{A_1} p(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \geqslant \varepsilon\left(1 - \frac{2k}{r^2} - \int_{A_2} p(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\right). \tag{2}$$

Далее займемся оценкой интеграла

$$I = \int_{A_2} p(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

и подбором параметров ε и r. Так как

$$|\sin \pi (\mathbf{t}, \mathbf{x})| \geqslant 2 \Big((\mathbf{t}, \mathbf{x}) \Big),$$

где

$$\Big((\mathbf{t}, \mathbf{x}) \Big) = \min_{m=0, \pm 1, \pm 2, \dots} |(\mathbf{t}, \mathbf{x}) - m|,$$

то имеют место следующие соотношения:

$$A_2 \subset \left\{ \mathbf{x} : 2 \Big((\mathbf{t}, \mathbf{x}) \Big) < \sqrt{\varepsilon}, \ \mathbf{x} V^{-1} \mathbf{x}' \leqslant r^2 \right\} \subset$$

$$\subset \left\{ \mathbf{x} : |(\mathbf{t}, \mathbf{x}) - m| \leqslant \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}, \ m = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \dots, \ \mathbf{x} V^{-1} \mathbf{x}' \leqslant r^2 \right\}.$$

Матрицу V^{-1}, обратную невырожденной ковариационной матрице V, всегда можно записать в виде произведения двух матриц K и K' : $V^{-1} = KK'$. Теперь в интеграле I применяем предположение, что $p(\mathbf{x}) \leqslant C$, и после этого делаем замену переменных $\mathbf{y} = \mathbf{x}K$:

$$I \leqslant \frac{C}{|K|} \int d\mathbf{y} = Y_m, \tag{3}$$

$$\left\{ \mathbf{y} : |(\mathbf{t}, \mathbf{y}K^{-1}) - m| \leqslant \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}, \ m = 0, \ \pm 1, \ \dots, \ \|y\|^2 \leqslant r^2 \right\}.$$

Рассмотрим случай $m = 0$. В последнем интеграле с помощью ортогонального преобразования поворачиваем координатные оси так, чтобы гиперплоскость $\Big(\mathbf{y}, \mathbf{t}(K')^{-1}\Big) = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$ стала параллельной какой-нибудь координатной гиперплоскости в новой координатной системе $(x_1, x_2, \dots, x_k)$. Получаем

$$Y_0 = \frac{C}{|K|} \int\limits_{|x_j| \leqslant \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2\|\mathbf{t}(K')^{-1}\|}} dx_j \int \int\limits_{\|\mathbf{x}\| \leqslant r} dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_k =$$

$$= C_0 \int\limits_0^{\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2\|\mathbf{t}(K')^{-1}\|}} (r^2 - x_j^2)^{k-1} dx_j,$$

где $C_0 = \frac{C}{|K|} \cdot \frac{2(2\pi)^{\frac{k-1}{2}}}{(k-1)!!}$ для четных k и $C_0 = \frac{C}{|K|} \cdot \frac{2(2\pi)^{\frac{k}{2}}}{\pi(k-1)!!}$ для нечетных k. Нетрудно заметить, что

$$Y_0 \leqslant \frac{C}{|K|} \cdot \frac{\sqrt{2\varepsilon} (2\pi r^2)^{\frac{k-1}{2}}}{\|\mathbf{t}(K')^{-1}\| (k-1)!!} \quad \text{для всех } k. \tag{4}$$

По определению m имеем $|m| \leqslant \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} + |(\mathbf{t}, \mathbf{x})| + 1$. Здесь $0 < \varepsilon \leqslant 1$ и $\mathbf{x} V^{-1} \mathbf{x}' \leqslant r^2$, поэтому

$$|(\mathbf{t}, \mathbf{x}')| \leqslant \sqrt{(\mathbf{t} V \mathbf{t}')(\mathbf{x} V^{-1} \mathbf{x}')} \leqslant r \sqrt{\mathbf{t} V \mathbf{t}'} \tag{5}$$

и

$$|m| \leqslant r \sqrt{\mathbf{t} V \mathbf{t}'} + 2.$$

Пользуясь соотношениями (2–5) и замечая, что $|K|=\frac{1}{\sqrt{|V|}}$ и $\mathbf{t}V\mathbf{t}'\leqslant \leqslant \|\mathbf{t}(K')^{-1}\|\cdot\|K^{-1}\mathbf{t}'\|$, заключаем

$$I\leqslant \frac{C\sqrt{2\varepsilon|V|}\,(2\pi r^2)^{\frac{k-1}{2}}}{\sqrt{\pi}\,(k-1)!!}\left(r+\frac{2}{\sqrt{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}}\right). \tag{6}$$

Так как

$$\frac{C\sqrt{2|V|}\,(2\pi r^2)^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{\pi}\,k!!}\geqslant 1-\frac{2k}{r^2},$$

то при $r^2=4k$ в формуле (4) можно выбрать

$$\sqrt{\varepsilon}=\left(2-\frac{4k}{r^2}\right)\Bigg/\left(\frac{3C\sqrt{2|V|}\,(2\pi r^2)^{\frac{k-1}{2}}\left(2+\frac{2}{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}\right)}{\sqrt{\pi}\,(k-1)!!}\right)<1.$$

При таком выборе ε и r получаем утверждение леммы 1.

3. Теперь рассмотрим аналогичную задачу, когда ξ имеет k-мерное решетчатое распределение, заданное на решетке

$$\{\mathbf{a}+\mathbf{v}H';\ \ \mathbf{v}_i=0,\ \pm1,\ \pm2,\qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ k\},$$

где $\mathbf{a}$ – некоторый вектор, а H – невырожденная матрица, с максимальным шагом распределения $h=|H|$.

Обозначим: $\eta=\xi-\xi$ – случайный вектор с характеристической функцией $|f(\mathbf{t})|^2$, $\mathbf{m}$ – вектор с целочисленными координатами, g – целое положительное число

$$I\left(-\frac{1}{2},\ +\frac{1}{2}\right)=\left\{(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k):-\frac{1}{2}\leqslant x_1\leqslant\frac{1}{2},\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\leqslant x_2\leqslant\frac{1}{2},\qquad -\frac{1}{2}\leqslant x_k\leqslant\frac{1}{2}\right\},$$
$$I(-\pi,+\pi)\,H^{-1}=\{(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_k)\,H^{-1}:-\pi\leqslant t_1\leqslant\pi,$$
$$-\pi\leqslant t_2\leqslant\pi,\qquad -\pi\leqslant t_k\leqslant\pi\};$$

$A|$ – определитель.

Лемма 2. *Если ξ имеет конечные моменты второго порядка, то для каждого $t\in I(-\pi,\ +\pi)\,H^{-1}\setminus\{\mathbf{t}:\mathbf{t}V\mathbf{t}'\leqslant d\}$*

$$|f(\mathbf{t})|\leqslant\exp\left\{-\min_{\mathbf{m}/g}\frac{1}{g^2}\sum_{\frac{g}{2}<r\leqslant\frac{g}{2}} r^2P\left\{\left(\mathbf{m},\ \eta(H')^{-1}\right)=\right.\right.$$
$$\left.\left.=r\,(\mathrm{mod}\,g),\ \|\eta(H')^{-1}\|\leqslant\frac{1}{2\sqrt{k}\,d^{\frac{1}{k}}}\right\}\right\}. \tag{7}$$

Минимум берем по всем векторам

$$\frac{\mathbf{m}}{g}=\left(\frac{m_1}{g},\ \frac{m_2}{g},\qquad \frac{m_k}{g}\right)\in I(-\pi,\ +\pi)\,H^{-1}\setminus\{\mathbf{t}:\mathbf{t}V\mathbf{t}'\leqslant d\}$$

с несократимыми координатами $(m_i,\ g)=1$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ k$. При этом $1\leqslant g\leqslant 1/d$, d – некоторое число.

Замечание. При $k=1$ получаем одномерный аналог неравенства (7) (см. [6]).

Доказательство леммы 2. В равенстве

$$|f(\Theta)|^2=\sum_{\nu}\cos(\nu H',\ \Theta)P\{\eta=\nu H'\}$$

делаем замену переменных $\Theta=2\pi\mathbf{t}H^{-1}$ и получаем

$$|f(2\pi\mathbf{t}H^{-1})|^2=\sum_{\nu}\cos 2\pi(\mathbf{t},\ \nu)P\{\eta=\nu H'\}$$

и

$$\frac{1}{2}\left(1-|f(2\pi\mathbf{t}H^{-1})|^2\right)=\sum_{\nu}\sin^2\pi(\mathbf{t},\ \nu)P\{\eta=\nu H'\}.$$

Пусть $\left((\mathbf{t},\nu)\right)$ обозначает расстояние скалярного произведения $(\mathbf{t},\ \nu)$ до ближайшего целого числа, тогда

$$|\sin\pi(\mathbf{t},\ \nu)|\geqslant 2\left((\mathbf{t},\ \nu)\right)=2\left(\left(\frac{\mathbf{m}}{g},\ \nu\right)+\left(\mathbf{t}-\frac{\mathbf{m}}{g},\ \nu\right)\right).$$

Как известно (см. [7], стр. 24), для каждого

$$\mathbf{t}\in I\left(-\frac{1}{2},\ +\frac{1}{2}\right)\setminus\left\{\frac{\mathbf{t}H}{2\pi}:\mathbf{t}V\mathbf{t}'\leqslant d\right\}$$

можно найти вектор $\frac{\mathbf{m}}{g}$ с $1\leqslant g\leqslant 1/d$ такой, чтобы было

$$\max_{1\leqslant l\leqslant k}\left|t_l-\frac{m_l}{g}\right|\leqslant 1\Big/\left(gd^{\frac{1}{k}}\right).$$

Вытекает, что при $\|\nu\|\leqslant\left(2\sqrt{k}\,d^{\frac{1}{k}}\right)^{-1}$

$$\left|\left(\mathbf{t}-\frac{\mathbf{m}}{g},\ \nu\right)\right|\leqslant\frac{\|\nu\|\sqrt{k}}{gd^{\frac{1}{k}}}\leqslant\frac{1}{2g}.$$

$\|\nu\|$ — длина вектора с целочисленными координатами. Получаем

$$\frac{1}{2}\left(1-|f(2\pi\mathbf{t}H^{-1})|^2\right)\geqslant\sum_{\|\nu\|\leqslant\left(2\sqrt{k}\,d^{\frac{1}{k}}\right)^{-1}}\sin^2\pi(\mathbf{t},\ \nu)P\{\eta=\nu H'\}\geqslant$$

$$\geqslant 4\sum_{\frac{q}{2}<r\leqslant\frac{q}{2}}\ \sum_{\substack{(\mathbf{m},\ \nu)\equiv r\ (\mathrm{mod}\ g)\\ \|\nu\|\leqslant\left(2\sqrt{k}\,d^{\frac{1}{k}}\right)^{-1}}}\left(\frac{r}{g}+\left(\mathbf{t}-\frac{\mathbf{m}}{g},\ \nu\right)\right)^2P\{\eta=\nu H'\}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{4}{g^2}\sum_{\frac{q}{2}<r\leqslant\frac{q}{2}}\ \sum_{\substack{(\mathbf{m},\ \nu)\equiv r\ (\mathrm{mod}\ g)\\ \|\nu\|\leqslant\left(2\sqrt{k}\,d^{\frac{1}{k}}\right)^{-1}}}r^2P\{\eta=\nu H'\}=$$

$$=\frac{1}{g^2}\sum_{\frac{q}{2}<r\leqslant\frac{q}{2}}r^2P\left\{\eta=\nu H':(\mathbf{m},\ \nu)\equiv r\,(\mathrm{mod}\,g),\ \|\nu\|=\left(2\sqrt{k}\,d^{\frac{1}{k}}\right)^{-1}\right\}.\quad(8)$$

Последние соотношения имеют место для заданного $\mathbf{t}$ и для выбранных $\mathbf{m}$ и g ($\mathbf{m}$ и g зависят от $\mathbf{t}$). В (8) берем минимум по указанным $\frac{\mathbf{m}}{g}$ и в праве утверждать, что (7) имеет место для всех $\mathbf{t}\in I(-\pi, +\pi)H^{-1}\setminus\{\mathbf{t}: \mathbf{t}V\mathbf{t}'\leqslant d\}$. Лемма 2 доказана.

Докажем аналог теоремы 1 для решетчатых случайных векторов.

Теорема 2. *Пусть ξ имеет решетчатое распределение с максимальным шагом распределения $h=|H|$ и имеет конечные моменты s-того порядка ($s\geqslant 3$), тогда для суммы $Z_n=\xi_1+\xi_2+\quad+\xi_n$ независимых случайных векторов $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ с одним и тем же распределением как и ξ имеет место неравенство*

$$\left|\frac{n^{\frac{k}{2}}}{|H|}P\{\mathbf{Z}_n=\mathbf{a}n+\mathbf{m}H'\}-\sum_{\nu=0}^{s-3}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\nu}P_{\nu}(-\varphi)\left(\frac{\mathbf{a}n+\mathbf{m}H'}{\sqrt{n}}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2^{4(s-3)}\beta_s\Gamma\left(\frac{s+k}{2}\right)}{\pi^{\frac{k}{2}}\sqrt{|V|}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)n^{\frac{s-2}{2}}}+n^{\frac{k}{2}}\exp\left\{-(n-2)\min_{\mathbf{m}/g}\frac{1}{g^2}\sum_{\frac{g}{2}<r\leqslant\frac{g}{2}}r^2P\left\{\left(\mathbf{m},\eta(H')^{-1}\right)\equiv\right.\right.$$

$$\left.\left.\equiv r\,(\mathrm{mod}\,g),\ \|\eta(H')^{-1}\|\leqslant\frac{\left(64\beta_s^{\frac{2}{s-2}}\right)^{\frac{1}{k}}}{2\sqrt{k}}\right\}\right\}. \tag{9}$$

Минимум по $\mathbf{m}/g$ берем, как указано в лемме 2.

Замечание. При $s=4$ формула (9) $\left(\text{с остаточным членом } O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ впервые получена К.-Г. Эссееном в [8].

Доказательство теоремы 2. Поскольку

$$\int\limits_{I(-\pi,\,+\pi)H^{-1}}e^{i(\mathbf{t},\,(\mathbf{v}-\mathbf{m})H')}d\mathbf{t}=\begin{cases}\frac{(2\pi)^k}{|H|} & \text{при}\quad \mathbf{v}=\mathbf{m},\\ 0 & \text{при}\quad \mathbf{v}\neq\mathbf{m},\end{cases}$$

то из равенства

$$f^n(\mathbf{t})=\sum_{\mathbf{v}}e^{i(\mathbf{t},\,\mathbf{a}n+\mathbf{v}H')}P\{\mathbf{Z}_n=\mathbf{a}n+\mathbf{v}H'\}$$

вытекает

$$P\{\mathbf{Z}_n=\mathbf{a}n+\mathbf{m}H'\}=\frac{|H|}{(2\pi)^k}\int\limits_{I(-\pi,\,+\pi)H^{-1}}f^n(\mathbf{t})e^{-i(\mathbf{t},\,\mathbf{a}n+\mathbf{v}H')}d\mathbf{t}. \tag{10}$$

Формулу (10) впервые получил К.-Г. Эссеен в [8]. Имеем

$$\sum_{\nu=0}^{s-3}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)P_{\nu}(-\varphi)\left(\frac{\mathbf{a}n+\mathbf{m}H'}{\sqrt{n}}\right)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{R^k}\sum_{j=0}^{s-3}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^jP_j(i\mathbf{t})e^{-i\left(\frac{\mathbf{a}n+\mathbf{v}H'}{\sqrt{n}},\,\mathbf{t}\right)-\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{2}}d\mathbf{t}.$$

Оценим разность

$$Y=\frac{n^{\frac{k}{2}}}{|H|}P\{\mathbf{Z}_n=\mathbf{a}n+\mathbf{m}H'\}-\sum_{\nu=0}^{s-3}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\nu}P_{\nu}(-\varphi)\left(\frac{\mathbf{a}n+\mathbf{m}H'}{\sqrt{n}}\right)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{\left\{\mathbf{t}:(M|(\xi,\,\mathbf{t})|^s/\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{1}{s-2}}\leqslant\frac{\sqrt{n}}{8}\right\}}\left[f^n\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{\nu=0}^{s-3}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\nu}P_{\nu}(i\mathbf{t})e^{-\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{2}}\right]e^{-i(\mathbf{t},\,\mathbf{a}n+\mathbf{m}H')}d\mathbf{t}-$$

$$-\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{\left\{\mathbf{t}:(M|(\xi,\,\mathbf{t})|^s/\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{1}{s-2}}\leqslant\frac{\sqrt{n}}{8}\right\}}\sum_{\nu=0}^{s-3}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\nu}P_{\nu}(i\mathbf{t})e^{-i(\mathbf{t},\,\mathbf{a}n+\mathbf{m}H')-\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{2}}d\mathbf{t}+$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{I\left(-\frac{\pi}{(\sqrt{n})^{-1}},+\frac{\pi}{(\sqrt{n})^{-1}}\right)H^{-1}\setminus\left\{\mathbf{t}:\mathbf{t}V\mathbf{t}'\leqslant\frac{n}{64\beta_s^{\frac{2}{s-2}}}\right\}}\times$$

$$\times f^n\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)e^{-i(\mathbf{t},\,\mathbf{a}n+\mathbf{m}H')}d\mathbf{t}=I_1+I_2+I_3.$$

Интегралы I_1 и I_2 оценены в работе [5]:

$$|I_1|\leqslant\frac{2^{\frac{5s}{2}}\beta_s\Gamma\left(\frac{s+k}{2}\right)}{\pi^{\frac{k}{2}}\sqrt{|V|}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)n^{\frac{s-2}{2}}}$$

и

$$|I_2|\leqslant\frac{2^{4(s-1)}\beta_s\Gamma\left(\frac{s+k}{2}\right)}{(s+k-2)\sqrt{|V|}\,\pi^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)n^{\frac{s-2}{2}}}.$$

По лемме 2 получаем следующую оценку интеграла I_3:

$$|I_3|\leqslant n^{\frac{k}{2}}\sup|f(\mathbf{t})|^{n-2},$$

$$\mathbf{t}\in I(-\pi,\ +\pi)H^{-1}\setminus\left\{\mathbf{t}:\mathbf{t}V\mathbf{t}'\leqslant 1\Big/\left(64\,\beta_s^{\frac{2}{s-2}}\right)\right\}.$$

Теорема 2 доказана.

Вильнюсский Государственный университет
им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
3.IV.1969

Литература

1. С. М. Садикова, Некоторые неравенства для характеристических функций, Теор. вер. и ее прим., **XI**, вып. 3 (1966), 500–506.
2. Ю. В. Прохоров, Об одной локальной теореме, Пред. теор. теории вероятностей, Ташкент, 1963, 75–80.
3. П. Сурвила, О локальной предельной теореме для плотностей, Лит. матем. сб., **III**, № 1 (1963), 225–236.
4. В. Статулявичус, Предельные теоремы для плотностей и асимтотические разложения для распределений сумм независимых случайных величин, Теор. вер. и ее прим., **X**, вып. 4 (1965), 645–659.
5. А. Бикялис, Асимптотические разложения для плотностей и распределений сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов, Лит. матем. сб., **VIII**, № 3 (1968), 405–422.
6. А. Миталаускас, В. Статулявичус, Локальные предельные теоремы и асимптотические разложения для сумм независимых решетчатых случайных величин, Лит. матем. сб., **VI**, № 4 (1966), 569–583.
7. Дж. В. С. Касселс, Введение в теорию диофантовых приближений, ИЛ, Москва, 1961.
8. C.-G. Esseen, Fourier analysis of distribution functions, A mathematical study of the Laplace–Gaussian law, Acta Math., 77 (1945), 1–125.

NELYGYBĖS DAUGIAMATĖMS CHARAKTERINGOMS FUNKCIJOMS

A. Bikelis

(*Reziumė*)

Straipsnyje yra gautos daugiamatėms charakteringoms funkcijoms dvi nelygybės, kurios pritaikytos liekamųjų narių įvertinimams lokalinėse ribinėse teoremose.

TWO INEQUALITIES FOR THE MULTIVARIATE CHARACTERISTIC

A. Bikelis

(*Summary*)

In this paper two new inequalities for the multivariate characteristic functions are obtained. Also these inequalities are used for the estimation of the remainder terms in the local limit theorems.