IX LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1969

УДК–511

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ЭРДЁША–ТУРАНА

А. А. Юдин

Пусть на полуотрезке $[0,1)$ задано P чисел

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p.$$

Обозначим

$$R_P(t) = \sum_{\alpha_k \leqslant t} 1 - tP$$

и

$$\tilde{R} = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |R_P(t)|.$$

Далее, для некоторого целого k обозначим

$$S_k = \sum_{1}^{P} e^{2\pi i k \alpha_j}.$$

Нижеследующая теорема была установлена Эрдёшом – Тураном [1], которые дали ее доказательство на основе теории ортогональных многочленов, более элементарное доказательство было дано А. С. Файнлейбом [2]. В этой статье мы изложим новое доказательство этой теоремы.

Теорема. *Пусть N — любое натуральное число. Справедливо неравенство*:

$$\tilde{R} \leqslant \frac{6 \cdot 10^3}{N+1} P + 5 \sum_{k=1}^{N} l_k \frac{|S_k|}{k},$$

где

$$l_k = \left(1 - \frac{k}{N+1}\right) \min\left(1, \frac{P}{k\tilde{R}}\right).$$

Доказательство. **Лемма 1.** *Справедливо тождество*:

$$S_k = -2\pi i k \int_0^1 R_P(t)\, e^{2\pi i k t}\, dt.$$

В самом деле ясно, что

$$S_k = \int_0^1 e^{2\pi i k t}\, d\left(\sum_{\alpha_j \leqslant t} 1\right) = e^{2\pi i k t}\left(\sum_{\alpha_j \leqslant t} 1\right)\Bigg|_0^1 - 2\pi i k \int_0^1 \left(\sum_{\alpha_j \leqslant t} 1\right) e^{2\pi i k t} dt =$$

$$= P - 2\pi i k \int_0^1 \left(\sum_{\alpha_j \leqslant t} 1\right) e^{2\pi i k t}\, dt = -2\pi i k \int_0^1 \left(\sum_{\alpha_j \leqslant t} 1 - Pt\right) e^{2\pi i k t} dt,$$

то-есть, что

$$S_k = -2\pi ik \int_0^1 R_p(t)\, e^{2\pi ikt} dt.$$

Лемма 1 доказана.

В силу леммы 1

$$\left| \int_0^1 R_p(t)\, e^{2\pi ikt} dt \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{|S_k|}{k}.$$

Умножая это равенство на величины $|c_k|$, где c_k мы выберем позднее, и складывая по индексам $k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(N+1)$, получаем

$$\sum_{|k| \leqslant N+1}' \left| \int_0^1 R_p(t)\, c_k e^{2\pi ikt} dt \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(N+1)}^{N+1} |c_k| \frac{|S_k|}{k}. \tag{1}$$

Мы будем выбирать c_k так, что $|c_{-k}| = |c_k|$; ввиду $|S_k| = |S_{-k}|$ имеем

$$\sum_{|k| \leqslant N+1}' \left| \int_0^1 R_p(t) c_k e^{2\pi ikt} dt \right| \leqslant \frac{1}{\pi} \sum_1^{N+1} |c_k| \frac{|S_k|}{k}.$$

Отсюда мы получаем

$$\left| \int_0^1 R_p(t) \left(\sum_{|k| \leqslant N+1}' c_k e^{2\pi ikt} \right) dt \right| \leqslant \sum_{|k| \leqslant N+1}' \left| \int_0^1 R_p(t)\, c_k e^{2\pi ikt} dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N+1} |c_k| \frac{|S_k|}{k}. \tag{2}$$

Пусть $\psi(t)$ — некоторая вещественнозначная функция такая, что ее ряд Фурье

$$\psi(t) = a_0 + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' a_k e^{2\pi ikt}$$

сходится абсолютно. Обозначим $\sigma_{N+1}(t)$ фейеровское среднее N-ой частной суммы Фурье функции $\psi(t)$. Положим

$$c_k = a_k \left(1 - \frac{k}{N+1} \right).$$

Тогда из формулы (2) получаем, что

$$\left| \int_0^1 R_p(t) \left(\psi(t) - c_0 + \left(\sigma_{N+1}(t) - \psi(t) \right) dt \right| \leqslant \right.$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi} \sum_1^{N+1} \frac{|S_k|}{k} \left(1 - \frac{k}{N+1} \right) |a_k| = \frac{1}{\pi} \sum_1^{N} \frac{|S_k|}{k} \left(1 - \frac{k}{N+1} \right) |a_k|.$$

Отсюда следует, что

$$\left| \int_0^1 R_p(t) \left(\psi(t) - c_0 \right) dt \right| \leqslant \frac{1}{\pi} \sum_1^{N} \frac{|S_k|}{k} \left(1 - \frac{k}{N+1} \right) |a_k| +$$

$$+ \left| \int_0^1 R_p(t) \left(\psi(t) - \sigma_{N+1}(t) \right) dt \right|. \tag{3}$$

Обозначим

$$\Omega=\int_0^1 R_P(t)\left(\psi(t)-\sigma_{N+1}(t)\right)dt.$$

За $\psi(t)$ возьмем Виноградовский стаканчик ([3], стр. 26( ) интервала (α, β). Известно, что

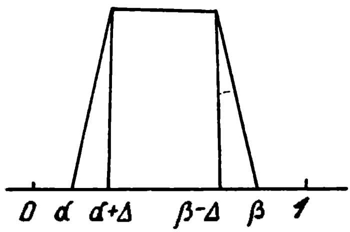

Рис.1

$$a_0=\beta-\alpha-\Delta$$

$$|a_k|\leqslant \min\left(2(\beta-\alpha), \frac{1}{k}\right).$$

Пусть

$$K_{N+1}(t)=\sum_{|t|\leqslant N+1}\left(1-\frac{|k|}{N+1}\right)e^{2\pi ikt}=\frac{1}{N+1}\cdot\left(\frac{\sin\pi(N+1)t}{\sin\pi t}\right)^2.$$

Тогда, как известно, из теории рядов Фурье

$$\sigma_{N+1}(t)=\int_0^1 \psi(\xi)K_{N+1}(\xi-t)\,d\xi.$$

Следовательно,

$$\Omega=\left|\int_0^1 R_P(t)\left(\psi(t)-\sigma_{N+1}(t)\right)dt\right|=\left|\int_0^1 R_P(t)\left(\psi(t)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int_0^1\psi(\xi)K_{N+1}(\xi-t)\,d\xi\right)dt\right|=\left|\int_0^1\int_0^1 R_P(t)\left(\psi(t)-\psi(\xi)\right)K_{N+1}\times\right.$$

$$\left.\times(\xi-t)\,d\xi\,dt\right|.$$

Здесь мы использовали соотношение, что для всякого t

$$\int_0^1 K_{N+1}(\xi-t)\,d\xi=1.$$

Разобьем единичный квадрат плоскости (ξ, t) $U^{(2)}$ на части. Через $\tilde{D}$ обозначим ту часть в $U^{(2)}$, для точек которой выполнено хотя бы одно из четырех неравенств

$$\alpha\leqslant t\leqslant\alpha+\Delta,\quad \beta\leqslant t\leqslant\beta-\Delta,$$

$$\alpha\leqslant\xi\leqslant\alpha+\Delta,\quad \beta\leqslant\xi\leqslant\beta-\Delta.$$

Через D_1 обозначим множество точек, для координат которых выполнено неравенство

$$\alpha+\Delta<t<\beta-\Delta,\quad 0\leqslant\xi<\alpha.$$

Через D_2 обозначим множество точек, для координат которых выполнено неравенство

$$\beta<t\leqslant 1,\quad \alpha+\Delta<\xi<\beta-\Delta.$$

Через D_3 обозначим множество точек, для координат которых выполнено неравенство

$$\alpha+\Delta<t<\beta-\Delta,\quad \beta<\xi\leqslant 1.$$

Через D_4 обозначим множество точек, для координат которых справедливо неравенство

$$0\leqslant t<\alpha,\quad \alpha+\Delta<\xi<\beta-\Delta.$$

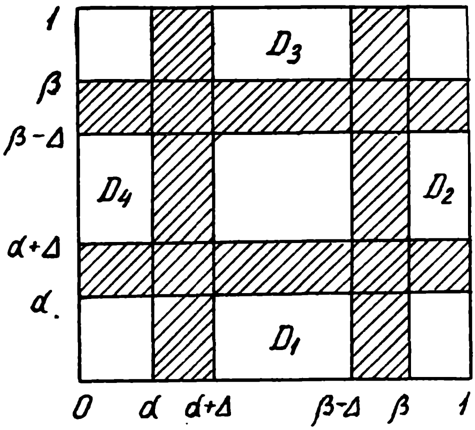

Рис. 2

Множества D_1, D_2, D_3, $\tilde{\tilde{D}}$ не пересекаются. Обозначим через $\tilde{\tilde{D}}$ дополнение до единичного квадрата множества

$$D_1\cup D_2\cup D_3\cup D_4\cup \tilde{D}.$$

На $\tilde{\tilde{D}}$ $\psi(t)-\psi(\xi)=0$; на каждом из множеств D_1, D_2, D_3, D_4 разность $\psi(t)-\psi(\xi)$ сохраняет постоянный знак и по модулю равна 1, на $\tilde{D}$ $|\psi(t)-\psi(\xi)|\leqslant 1$. В силу этого

$$\Omega\leqslant\sum_{1}^{4}\left|\int\limits_{D_i}\int R_P(t)\,K_{N+1}(\xi-t)\,d\xi\,dt\right|+\int\limits_{\tilde{D}}\int\left|R_P(t)\right|K_{N+1}(\xi-t)\,d\xi\,dt.$$

Оценка интегралов по D_1, D_2, D_3, D_4 производится аналогичным образом, поэтому проведем ее только для D_1. Мы имеем

$$\left|\int\limits_{D_1}\int R_P(t)\,K_{N+1}(\xi-t)\qquad\right|\leqslant\tilde{R}\int\limits_{0}^{\alpha}\int\limits_{\alpha+\Delta}^{\beta-\Delta}K_{N+1}(\xi-t)\,d\xi\,dt=$$

$$= \frac{\tilde{R}}{N+1} \int\limits_0^\alpha \int\limits_{\alpha+\Delta}^{\beta-\Delta} \frac{\left(\sin \pi (N+1)(\xi-t)\right)^2}{\left(\sin \pi (\xi-t)\right)^2} d\xi dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\tilde{R}}{N+1} \int\limits_0^\alpha \int\limits_{\alpha+\Delta}^{\beta-\Delta} \frac{1}{\sin^2 \pi (\xi-t)} d\xi dt \leqslant \frac{\tilde{R}}{4(N+1)} \int\limits_0^\alpha \int\limits_{\alpha+\Delta}^{\beta-\Delta} \frac{1}{(t-\xi)^2} d\xi dt,$$

где $(t-\xi)$ — расстояние от $t-\xi$ до ближайшего к нему целого числа

$$(t-\xi) = \begin{cases} 1-(t-\xi), & \xi \leqslant t-\frac{1}{2}, \\ t-\xi, & t-\frac{1}{2} \leqslant \xi \end{cases}$$

(первый случай может быть только при $t \geqslant \frac{1}{2}$). При $t \geqslant \frac{1}{2}$

$$\int\limits_0^\alpha \frac{d\xi}{(t-\xi)^2} = \int\limits_0^{t-\frac{1}{2}} \frac{d\xi}{(1-t+\xi)^2} + \int\limits_{t-\frac{1}{2}}^\alpha \frac{d\xi}{(t-\xi)^2} =$$

$$\frac{1}{1-t} - 2 + \frac{1}{t-\alpha} - \frac{1}{1-t} \leqslant \frac{1}{1-t} + \frac{1}{t-\alpha}$$

(если $\alpha \leqslant t-\frac{1}{2}$, то будет лишь интеграл

$$\int\limits_0^\alpha \frac{d\xi}{(1-t+\xi)^2} \leqslant \int\limits_0^{t-\frac{1}{2}} \frac{d\xi}{(1-t+\xi)^2}\Bigg).$$

Но, $1-t \geqslant \Delta$, $t-\alpha \geqslant \Delta$.

Значит,

$$\int\limits_0^\alpha \frac{d\xi}{(t-\xi)^2} \leqslant \frac{2}{\Delta}.$$

При $t \leqslant \frac{1}{2}$

$$\int\limits_0^\alpha \frac{d\xi}{(t-\xi)^2} < \int\limits_0^\alpha \frac{d\xi}{(t-\xi)^2} = \frac{1}{t-\alpha} - \frac{1}{t}.$$

Но, на D_1 $t-\alpha \geqslant \Delta$, и поэтому

$$\int\limits_0^\alpha \frac{d\xi}{(t-\xi)^2} \leqslant \frac{1}{\Delta}.$$

Отсюда

$$\frac{\tilde{R}}{4(N+1)} \int\limits_0^\alpha \int\limits_{\alpha+\Delta}^{\beta-\Delta} \frac{1}{(t-\xi)^2} d\xi dt \leqslant \frac{\tilde{R}}{2\Delta(N+1)} \int\limits_{\alpha+\Delta}^{\beta-\Delta} dt = \frac{\tilde{R}(\beta-\alpha-2\Delta)}{2\Delta(N+1)},$$

что нам дает

$$\left| \iint\limits_{D_1} R_P(t) K_{N+1}(\xi-t)\, d\xi dt \right| \leqslant \frac{\tilde{R}(\beta-\alpha-2\Delta)}{2\Delta(N+1)}. \tag{4}$$

Теперь оценим

$$\iint\limits_{\tilde{D}} |R_P(t)|\, K_{N+1}(\xi - t)\, d\xi dt.$$

Оценим это выражение лишь на одной полоске, на остальных оценка производится аналогично:

$$\left| \int\limits_{\alpha}^{\alpha+\Delta} \int\limits_{0}^{1} R_P(t) K_{N+1}(\xi - t)\, d\xi dt \right| \leqslant \tilde{R} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+\Delta} \int\limits_{0}^{1} K_{N+1}(\xi - t)\, d\xi dt =$$

$$= \tilde{R} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+\Delta} dt = \tilde{R}\Delta. \tag{5}$$

Подставляя оценки (4) и (5) в неравенство (3), получаем

$$\left| \int\limits_{0}^{1} R_P(t) \left(\psi(t) - c_0 \right) dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N} \frac{|S_k|}{k} \left(1 - \frac{k}{N+1} \right) |a_k| + 4\Delta\tilde{R} + 2\, \frac{\tilde{R}(\beta - \alpha - 2\Delta)}{\Delta(N+1)}. \tag{6}$$

Заметим, что

$$c_0 = a_0 = \beta - \alpha - 2\Delta + \Delta = \beta - \alpha - \Delta.$$

Обозначим $\eta = \alpha + \Delta$, $\beta - \alpha - 2\Delta = \tau$,

$$\tau = h\frac{\tilde{R}}{P}, \qquad \Delta = s\,\frac{\tilde{R}}{P}, \qquad \text{где } 0 < h < 1, \qquad 0 < s < \frac{h}{4}.$$

Деля неравенство (6) на τ, мы получаем

$$\left| \frac{1}{\tau} \int\limits_{\eta}^{\eta+\tau} R_P(t)\, dt + \frac{1}{\tau} \int\limits_{\eta-\Delta}^{\eta} R_P(t)\, \psi(t)\, dt + \frac{1}{\tau} \int\limits_{\eta+\tau}^{\eta+\tau+\Delta} R_P(t)\, \psi(t)\, dt - \right.$$

$$\left. - \left(1 + \frac{\Delta}{\tau} \right) \int\limits_{0}^{1} R_P(t)\, dt \right| \leqslant \frac{4\Delta R^{3}}{\tau} + \frac{1}{\pi} \sum_{1}^{N} \frac{|S_k|}{k} \left(1 - \frac{k}{N+1} \right) \frac{|a_k|}{\tau} + \frac{2P}{s(N+1)}.$$

Так как на $[\eta - \Delta, \eta]$ и на $[\eta + \tau, \eta + \tau + \Delta]$ $0 \leqslant \psi(t) \leqslant 1$, то

$$\left| \frac{1}{\tau} \int\limits_{\eta-\tau}^{\eta} R_P(t)\, \psi(t)\, dt \right| \leqslant \frac{\tilde{R}\Delta}{\tau}, \qquad \left| \int\limits_{\eta+\tau}^{\eta+\tau+\Delta} R_P(t)\, \psi(t)\, dt \right| \leqslant \frac{\tilde{R}\Delta}{\tau}.$$

Выходит, что

$$\left| \frac{1}{\tau} \int\limits_{\eta}^{\eta+\tau} R_P(t)\, dt + \frac{2\Theta s\tilde{R}}{h} - \left(1 + \frac{\Delta}{\tau} \right) \int\limits_{0}^{1} R_P(t)\, dt \right| - 4\, \frac{\Delta\tilde{R}}{\tau} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi} \sum_{1}^{N} \frac{|S_k|}{k} \left(1 - \frac{k}{N+1} \right) \frac{|a_k|}{\tau} + \frac{2P}{s(N+1)}, \qquad |\Theta| \leqslant 1$$

или

$$\left| \frac{1}{\tau} \int\limits_{\eta}^{\eta+\tau} R_P(t)\,dt + \frac{2\Theta s}{h}\,\tilde{R} - \left(1+\frac{s}{h}\right) \int\limits_0^1 R_P(t)\,dt \right| - 4\,\frac{s}{h}\,\tilde{R} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi} \sum_{1}^{N} \frac{|S_k|}{k}\left(1-\frac{k}{N+1}\right)\frac{|a_k|}{\tau} + \frac{2P}{s(N+1)}.$$

Так как

$$\left| \int\limits_0^1 R_P(t)\,dt \right| \leqslant \tilde{R},$$

то

$$\left| \frac{1}{\tau} \int\limits_{\eta}^{\eta+\tau} R_P(t)\,dt - \int\limits_0^1 R_P(t)\,dt \right| - \frac{7s}{h}\,\tilde{R} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi} \sum_{1}^{N+1} \frac{|S_k|}{k}\left(1-\frac{k}{N+1}\right)\frac{|a_k|}{\tau} + \frac{2P}{s(N+1)}.$$

Ввиду оценок коэффициентов Фурье стаканчиков И. М. Виноградова, имеем

$$\frac{|a_k|}{\tau} \leqslant \min\left(2\,\frac{h\frac{\tilde{R}}{P}+2s\frac{\tilde{R}}{P}}{h\frac{\tilde{R}}{P}}\,\frac{P}{h\tilde{R}k}\right) = \min\left(3,\ \frac{P}{h\tilde{R}k}\right),$$

и, значит,

$$\left| \frac{1}{\tau} \int\limits_{\eta}^{\eta+\tau} R_P(t)\,dt - \int\limits_0^1 R_P(t)\,dt \right| - \frac{7s}{h}\,\tilde{R} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N} \frac{|S_k|}{k}\left(1-\frac{k}{N+1}\right)\min\left(3,\ \frac{P}{h\tilde{R}k}\right) + \frac{2P}{s(N+1)}. \tag{7}$$

Наша задача состоит в том, чтобы, пользуясь произволом в выборе η, оценить снизу выражение, стоящее в правой части формулы (7), которое от η не зависит.

Нам удобнее вместо расположения точек на полуотрезке $[0, 1)$ располагать точки на отрезке $[0, 1]$. Наряду с расположением точек $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, которое обозначим через $\mathfrak{M}_P$, рассмотрим расположение $\overline{\mathfrak{M}}_P$, образованное точками

$$1-\alpha_1, \ldots, 1-\alpha P.$$

Если через $R_P(t)$ обозначим изучаемую нами функцию для расположения $\mathfrak{M}_P$, а через $\bar{R}_P(t)$ – функцию для расположения $\overline{\mathfrak{M}}_P$, то справедливо функциональное уравнение

$$\bar{R}_P(t) = -R_P(1-t)$$

(с заменой непрерывности слева на непрерывность справа). Согласно этому замечанию мы всегда можем ограничиться расположениями, у которых

$$\int\limits_0^1 R_P(t)\,dt \geqslant 0;$$

если это не так, то вместо расположения $\mathfrak{M}_P$ перейдем к расположению $\overline{\mathfrak{M}}_P$, для которого величины $\tilde{R}$, $|s_k|$ остаются теми же, а интеграл

$$\int_0^1 R_P(t)\,dt$$

меняет знак. Итак,

$$\int_0^1 R_P(t)\,dt \geqslant 0.$$

Разберем два случая. Первый случай — легкий — это случай, когда среди значений $R_P(t_i)$, для которых $|R_P(t_i)| = \tilde{R}$ есть отрицательные, пусть $R_p(t_0) = -\tilde{R}$. Возьмем за $\eta = t_0 - \tau$. Мы имеем

$$\frac{1}{\tau}\int_{t_0-\tau}^{t_0} R_P(t)\,dt \leqslant \frac{1}{\tau}\int_{t_0-\tau}^{t_0}\left(P(t_0-t)-\tilde{R}\right)dt = -\tilde{R}+\frac{P\tau}{2} = -\tilde{R}\left(1-\frac{h}{2}\right)<0.$$

Таким образом,

$$\left|\int_0^1 R_P(t)\,dt - \frac{1}{\tau}\int_{t_0-\tau}^{t_0} R_P(t)\,dt\right| = \int_0^1 R_P(t)\,dt - \frac{1}{\tau}\int_{t_0-\tau}^{t_0} R_P(t)\,dt \geqslant \tilde{R}\left(1-\frac{h}{2}\right).$$

Мы имеем

$$\tilde{R}\left(1-\frac{h}{2}-\frac{7s}{h}\right) \leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{1}^{N}\frac{|S_k|}{k}\left(1-\frac{k}{N+1}\right)\min\left(3, \frac{P}{h\tilde{R}k}\right)+\frac{2P}{s(N+1)}.$$

Возмем

$$h=\frac{1}{3}, \quad s=\frac{1}{126}.$$

$$\tilde{R} \leqslant \frac{9}{2\pi}\sum_{1}^{N+1}\frac{|S_k|}{k}e_k + \frac{378P}{N+1}.$$

В этом случае теорема доказана.

Второй случай более трудный: это случай, когда для всех значений t_i, где модуль $R_p(t)$ достигает своего максимума $R_p(t_i) > 0$. Пусть $R_p(t_0) = \tilde{R}$. Возьмем за η значение t_0, а за $\tau = \frac{1}{2}\frac{\tilde{R}}{P}$, т.е. $h = \frac{1}{2}$. Ясно, что

$$\frac{1}{\tau}\int_{t_0}^{t_0+\tau} R_P(t)\,dt \geqslant \frac{1}{\tau}\int_{t_0}^{t_0+\tau}\left(\tilde{R}-(t-t_0)P\right)dt = \tilde{R}\left(1-\frac{h}{2}\right)>0.$$

Величину γ определим с помощью равенства

$$\int_0^1 R_P(t)\,dt = \gamma\tilde{R}, \qquad 0 \leqslant \gamma < 1.$$

Мы имеем

$$\left|\frac{1}{\tau}\int_{t_0}^{t_0+\tau} R_P(t)\,dt - \int_0^1 R_P(t)\,dt\right| - \frac{7s}{h}\tilde{R} \geqslant \tilde{R}\left(1-\frac{h}{2}-\gamma-\frac{7s}{h}\right) = \tilde{R}\omega_1.$$

Теперь выберем за t_0 точку $1-\tau$. Если

$$\frac{1}{\tau}\int_{1-\tau}^{1} R_P(t)\,dt \leqslant 0,$$

то

$$\left|\int_{0}^{1} R_P(t)\,dt-\frac{1}{\tau}\int_{1-\tau}^{1} R_P(t)\,dt\right| \geqslant \gamma\tilde{R}.$$

Если

$$\frac{1}{\tau}\int_{1-\tau}^{1} R_P(t)\,dt > 0,$$

то так как $R_P(1)=0$ и $R_P(t)\leqslant P(1-t)$, то

$$\frac{1}{\tau}\int_{1-\tau}^{1} R_P(t)\,dt \leqslant \frac{h}{2}$$

и

$$\left|\int_{0}^{1} R_P(t)\,dt-\frac{1}{\tau}\int_{1-\tau}^{1} R_P(t)\,dt\right| \geqslant \gamma\tilde{R}-\frac{h}{2}\geqslant \tilde{R}\left(\gamma-\frac{h}{2}\right).$$

В обоих случаях

$$\left|\frac{1}{\tau}\int_{1-\tau}^{1} R_P(t)\,dt-\int_{0}^{1} R_P(t)\,dt\right|-\frac{7s}{h}\tilde{R}\geqslant \tilde{R}\left(\gamma-\frac{h}{2}-\frac{7s}{h}\right)=\tilde{R}\omega_2.$$

Мы имеем

$$\omega_1+\omega_2=1-h-\frac{14s}{h}.$$

Следовательно, беря

$$\frac{s}{h}=\frac{1}{150}\ \left(h=\frac{1}{2}\right),$$

мы получаем, что

$$\omega_1+\omega_2\geqslant\frac{61}{150},$$

и, значит,

$$\max(\omega_1,\ \omega_2)\geqslant\frac{61}{300}\geqslant\frac{1}{5}.$$

Итак, во втором случае

$$\frac{\tilde{R}}{5}\leqslant\frac{3}{\pi}\sum_{1}^{N+1}\frac{|S_k|}{k}l_k+\frac{1200}{N+1}P$$

или

$$\tilde{R}\leqslant 5\sum_{1}^{N+1}\frac{|S_k|}{k}l_k+\frac{6\cdot 10^3 P}{N+1}.$$

И в этом случае теорема доказана.

При доказательстве теоремы мы не стремились получить наиболее хорошие константы, они могут быть сделаны значительно меньше, что требует громоздких элементарных выкладок.

Владимирский педагогический институт

Поступило в редакцию 26.VIII.1968

Литература

1. P. Erdös, P. Turan, On the problem in the theory of uniform distribution, I, II Indagationes math., 10, 370—378.
2. А. С. Файнлейб, Обобщение неравенства Эссеена и его приложение в вероятностной теории чисел, Изв. АН СССР, серия мат.
3. И. М. Виноградов, Метод тригонометрических сумм в теории чисел, Избранные труды, М., 1952.

ERDIOŠO—TURANO TEOREMOS NAUJAS ĮRODYMAS

A. Judinas

(Reziumė)

Erdiošas ir Turanas įrodė vieną iš stipresnių Veilio kriterijaus tolygiam pasiskirstymui kokybinių formų. Šiame straipsnyje pateiktas elementarus Erdiošo—Turano teoremos įrodymas.

NEW PROOF OF ERDÖS—TURAN'S THEOREM

A. Yudin

(Summary)

Erdös and Turan proved one of the strongest quantitative forms of Weyl's criterion of uniformly distribution. In this article we give elementary proof of Erdös—Turan's theorem.