IX LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1969

УДК–519.2

ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ КОМПОНЕНТ МАРКОВСКОЙ ЦЕПИ

О. А. Глонти

§ 1. Постановка задачи, основные результаты

1. На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ задана двумерная марковская цепь (θ_n, ξ_n), $n=0, \Delta, 2\Delta, \ldots, (\Delta>0)$, где $\theta_n=\theta_n(\omega)$ – ненаблюдаемая, а $\xi_n=\xi_n(\omega)$ – наблюдаемая компоненты. Обозначим $\bar{\theta}_l=\bar{\theta}_l(\xi_0, \ldots, \xi_n)$, $l\geqslant n$, $\bar{\xi}_l=\bar{\xi}_l(\xi_0, \ldots, \xi_n)$, $l\geqslant n$, оптимальные (в среднеквадратическом смысле) оценки по $\xi^n=(\xi_0, \ldots, \xi_n)$, $l\geqslant n$ (экстраполяции) ненаблюдаемой (θ_l) и наблюдаемой (ξ_l) компонент, соответственно. Хорошо известно, что эти оценки совпадают с условными математическими ожиданиями $\bar{\theta}_l(\xi^n)=\mathbf{M}(\theta_l \mid \mathscr{F}_{\xi^n})$, $\bar{\xi}_l(\xi^n)=\mathbf{M}(\xi_l \mid \mathscr{F}_{\xi^n})$, $l\geqslant n$, где $\mathscr{F}_{\xi^n}$ – σ-алгебра ω-множеств, порожденная случайной величиной $\xi^n=(\xi_0, \ldots, \xi_n)$.

Мы рассмотрим два случая эффективного решения задачи экстраполяции и получим рекуррентные соотношения для $\bar{\theta}_l$ и $\bar{\xi}_l$. Для случая диффузионных процессов (непрерывное время) соответствующие вопросы построения оптимальных оценок исследованы в работах [1]–[3]. Настоящая работа непосредственно примыкает к нашей работе [4], посвященной фильтрации и интерполяции компонент двумерной марковской цепи.

2. Обозначим

$$m(l, n)=\mathbf{M}(\theta_l \mid \mathscr{F}_{\xi^n}),\quad h(l, n)=\mathbf{M}(\xi_l \mid \mathscr{F}_{\xi^n}),\quad l\geqslant n$$

и предположим, что марковская цепь (θ_n, ξ_n) управляется системой разностных уравнений

$$\begin{aligned}\Delta\theta_n&=[a_0(n)+a_1(n)\theta_n+a_2(n)\xi_n]\Delta+b_1(\xi_n, n)\Delta w_1(n)+b_2(\xi_n, n)\Delta w_2(n)\\ \Delta\xi_n&=[A_0(n)+A_1(n)\theta_n+A_2(n)\xi_n]\Delta+\\ &+B_1(\xi_n, n)\Delta w_1(n)+B_2(\xi_n, n)\Delta w_2(n),\end{aligned}\tag{1}$$

где $w_1(n)$, $w_2(n)$ – независимые последовательности нормальных $N(0, n)$ случайных величин с независимыми между собой приращениями

$$\Delta w_i(n)=w_i(n+\Delta)-w_i(n),\quad i=1,2.$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если (θ_n, ξ_n) удовлетворяет системе* (1), *причем распределение θ_0 гауссовское с параметрами (m, γ), то тогда*

$$m(l, n)=\mathbf{M}(\theta_l \mid \mathscr{F}_{\xi^n}),\quad h(l, n)=\mathbf{M}(\xi_l \mid \mathscr{F}_{\xi^n}),\quad l\geqslant n$$

удовлетворяет по l следующим разностным уравнениям

$$\Delta_l \begin{pmatrix} m(l,\ n) \\ h(l,\ n) \end{pmatrix} = \alpha_0(l)\,\Delta + \alpha_1(l) \begin{pmatrix} m(l,\ n) \\ h(l,\ n) \end{pmatrix} \Delta$$

с начальными условиями

$$m(n,\ n) = m(n),$$

$$h(n,\ n) = \xi_n,$$

где

$$\alpha_0(l) = \begin{pmatrix} a_0(l) \\ A_0(l) \end{pmatrix}, \quad \alpha_1(l) = \begin{pmatrix} a_1(l) & a_2(l) \\ A_1(l) & A_2(l) \end{pmatrix}.$$

При фиксированном l справедливы разностные уравнения по n

$$\Delta_n \begin{pmatrix} m(l,\ n) \\ h(l,\ n) \end{pmatrix} = \Phi(l)\,\Phi^{-1}(n+\Delta) \begin{pmatrix} \dfrac{\gamma(n) A_1 (1 + a_1 \Delta) + b \circ B}{B \circ B + A_1^2 \gamma(n) \Delta} \\ 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \left(\Delta \xi_n - \left(A_0(n) + A_1(n)\ m(n) + A_2(n)\ \xi_n \right) \Delta \right)$$

с начальными условиями

$$\begin{pmatrix} m(l,\ 0) \\ h(l,\ 0) \end{pmatrix},$$

определяемыми из уравнения

$$\begin{pmatrix} m(l,\ 0) \\ h(l,\ 0) \end{pmatrix} = \Phi(l) \begin{pmatrix} m \\ \xi_0 \end{pmatrix} + \sum_{k=\Delta}^{l} \Phi(l)\,\Phi^{-1}(k)\ \alpha_0(k-\Delta)\,\Delta,$$

$$\begin{pmatrix} m(0,\ 0) \\ h(0,\ 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ \xi_0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $m(n) = \mathbf{M}\,(\theta_n \mid \mathscr{F}_\xi^n)$, $\gamma(n) = \mathbf{M}\left(\left(\theta_n - m(n)\right)^2 \middle| \mathscr{F}_\xi^n \right)$ находятся согласно теореме 1 работы [3], $B \circ B = B_1^2 + B_2^2$, $b \circ B = b_1 B_1 + b_2 B_2$, матрица $\Phi(k)$ находится из рекуррентного соотношения

$$\Phi(k+\Delta) = \Phi(k)\,[\alpha_1(k)\Delta + E],$$

$\Phi(0) = E$, где E — единичная матрица.

Если ограничиться оценкой лишь $m(l,\ n) = \mathbf{M}\,(\theta_l \mid \mathscr{F}_\xi^n)$, $l \geqslant n$, то можно выделить еще один класс процессов, где возможно эффективное решение задачи экстраполяции.

Пусть марковская цепь $(\theta_n,\ \xi_n)$ управляется системой разностных уравнений

$$\Delta\theta_n = [a_0(n) + a_1(n)\,\theta_n]\Delta + b_1(\xi_n,\ n)\Delta w_1(n) + b_2(\xi_n,\ n)\Delta w_2(n), \tag{2}$$

$$\Delta\xi_n = [A_0(\xi_n,\ n) + A_1(\xi_n,\ n)\,\theta_n]\,\Delta + B_1(\xi_n,\ n)\,\Delta w_1(n) + B_2(\xi_n,\ n)\Delta w_2(n),$$

где θ_0 имеет нормальное распределение с параметрами $(m,\ \gamma)$. Тогда справедлива теорема.

Теорема 2. *Если двумерная марковская цепь* (θ_n, ξ_n) *удовлетворяет системе* (2), *то* $m(l, n) = \mathbf{M}(\theta_l \mid \mathscr{F}_{\xi_n})$, $l \geqslant n$ *подчиняется уравнению*

$$\Delta_l m(l, n) = [a_0(l) + a_1(l)\, m(l, n)]\Delta, \quad l > n \quad m(n, n) = m(n).$$

При фиксированном l *справедливо*

$$\Delta_n m(l, n) = \frac{\Phi(l)}{\Phi(n+\Delta)} \; \frac{A_1\gamma(n)(1 + a_1\Delta) + b \circ B}{B \circ B + A_1^2\gamma(n)\Delta} \left(\Delta\xi_n - \left(A_0 + A_1 m(n)\right)\Delta\right),$$

где

$$m(l, 0) = \Phi(l)\, m + \sum_{k=\Delta}^{l} \frac{\Phi(l)}{\Phi(k)}\, a_0(k-\Delta)\,\Delta,$$

$$m(0, 0) = m.$$

Здесь $\Phi(k)$ находится из рекуррентного соотношения

$$\Phi(k+\Delta) = \Phi(k)\,[a_1\Delta + 1],$$

$$\Phi(0) = 1.$$

Доказательства теорем 1 и 2 приводятся в § 3.

§ 2. Вспомогательные предложения

Лемма 1. *Пусть последовательность случайных величин* η_n, $n = 0, \Delta, 2\Delta, \ldots, (\Delta > 0)$ *допускает представление*

$$\Delta\eta_n = \eta_n\,[a(n)\,\Delta + b(n)\Delta\, w_1(n)] + [A(\eta_n, n)\Delta +$$

$$+ B(\eta_n, n)\Delta w_1(n) + G(\eta_n, n)\Delta w_2(n)], \tag{3}$$

где $w_1(n)$, $w_2(n)$ — *две последовательности гауссовских случайных величин* $N(0, n)$ *с независимыми между собой приращениями. Тогда*

$$\eta_n = \Phi(n)\,\eta_0 + \sum_{k=\Delta}^{n} \frac{\Phi(n)}{\Phi(k)}\,[A\Delta + B\Delta w_1(k-\Delta) + G\Delta w_2(k-\Delta)],$$

где $\Phi(k)$ *находится из рекуррентного соотношения*

$$\Phi(k+\Delta) = \Phi(k)\,[a(n)\Delta + b(n)\Delta w_1(n) + 1],$$

$$\Phi(0) = 1. \tag{4}$$

Доказательство. Используем метод, аналогичный методу вариации постоянных (см. [1]).

Рассмотрим сначала уравнение

$$\Delta\tilde{\eta}_n = \tilde{\eta}_n\,[a(n)\Delta + b(n)\Delta w_1(n)],$$

решение которого, как легко видеть, есть $\tilde{\eta}_n = c\Phi(n)$, $c = \tilde{\eta}_0$, где для $\Phi(n)$ имеем рекуррентное соотношение

$$\Phi(n+\Delta) = \Phi(n)\,[a(n)\Delta + b(n)\Delta w_1(n) + 1],$$

$$\Phi(0) = 1. \tag{5}$$

Теперь будем искать решение (3) в виде

$$\eta_n = c(n)\Phi(n), \tag{6}$$

где $c(n)$ допускает представление

$$\Delta c(n) = \alpha(\eta_n, n)\Delta + \beta(\eta_n, n)\Delta w_1(n) + \gamma(\eta_n, n)\Delta w_2(n). \tag{7}$$

Используя (5), (6), (7), получим

$$\eta_{n+\Delta} = c(n+\Delta)\Phi(n+\Delta) = \eta_n[a\Delta + b\Delta w_1 + 1] + $$
$$+ [\alpha\Delta + \beta\Delta w_1 + \gamma\Delta w_2]\Phi(n+\Delta)$$

или

$$\Delta\eta_n = \eta_n[a\Delta + b\Delta w_1(n)] + \Phi(n+\Delta]\alpha\Delta +$$
$$+ \Phi(n+\Delta)\beta\Delta w_1(n) + \Phi(n+\Delta)\gamma\Delta w_2(n). \tag{8}$$

Сравнивая (8) с (3), имеем

$$\alpha(\eta_n, n) = \frac{A(\eta_n, n)}{\Phi(n+\Delta)}, \quad \beta(\eta_n, n) = \frac{B(\eta_n, n)}{\Phi(n+\Delta)}, \quad \gamma(\eta_n, n) = \frac{G(\eta_n, n)}{\Phi(n+\Delta)}. \tag{9}$$

Из (7) с учетом (9) получим

$$\Delta c(n) = \frac{1}{\Phi(n+\Delta)}[A\Delta + B\Delta w_1 + G\Delta w_2]. \tag{10}$$

Умножая очевидное тождество

$$c(n) = c(0) + \sum_{k=\Delta}^{n}[c(k) - c(k-\Delta)]$$

на $\Phi(n)$ и используя соотношения (6) и (10), получим окончательный результат данной леммы.

Замечание. Если $[a(n)\Delta + b(n)\Delta w_1(n) + 1] > 0$, то имеет место представление

$$\eta_n = \eta_0 e^{\varphi_n} + e^{\varphi_n}\sum_{k=\Delta}^{n} e^{-\varphi_k}[A\Delta + B\Delta w_1(k-\Delta) + G\Delta w_2(k-\Delta)],$$

где φ_n находится из рекуррентного соотношения

$$\Delta\varphi_n = \ln[a(n)\Delta + b(n)\Delta w_1(n) + 1], \quad \varphi_0 = 0.$$

Лемма 2. *Если последовательность случайных величин* ξ_n, $n=0, \Delta, 2\Delta, \ldots, (\Delta>0)$ *допускает представление*

$$\Delta\xi_n = A(\theta_n, \xi_n, n)\Delta + B_1(\xi_n, n)\Delta w_1(n) + B_2(\xi_n, n)\Delta w_2(n), \tag{11}$$

то тогда

$$\Delta\xi_n = A(\theta_n, \xi_n, n)\Delta + \sqrt{B_1^2(\xi_n, n) + B_2^2(\xi_n, n)}\,\Delta w(n), \tag{12}$$

где $w(n)$ — *последовательность гауссовских случайных величин* $N(0, n)$ *с независимыми приращениями.*

Доказательство. Лемма непосредственно следует из следующего построения

$$\Delta w(n) = \frac{B_1(\xi_n, n)\Delta w_1(n) + B_2(\xi_n, n)\Delta w_2(n)}{\sqrt{B_1^2(\xi_n, n) + B_2^2(\xi_n, n)}}.$$

Лемма 3. *Если последовательность случайных величин* ξ_n, $n=0, \Delta, 2\Delta, \ldots$ $(\Delta>0)$ *допускает представление*

$$\Delta\xi_n=[A_0(\xi_n, n)+A_1(\xi_n, n)\theta_n]\Delta+$$
$$+B_1(\xi_n, n)\Delta w_1(n)+B_2(\xi_n, n)\Delta w_2(n), \tag{13}$$

то тогда

$$\Delta\xi_n=[A_0(\xi_n, n)+A_1(\xi_n, n)m(n)]\Delta+\sqrt{B\circ B+A_1^2\gamma(n)\Delta}\,\Delta\bar{w}(n), \tag{14}$$

где

$$m(n)=\mathbf{M}(\theta_n \mid \mathscr{F}_{\xi^n}), \quad \gamma(n)=\mathbf{M}\left(\left(\theta_n-m(n)\right)^2 \mid \mathscr{F}_{\xi^n}\right),$$

$B\circ B=B_1^2+B_2^2$, *а* $\bar{w}(n)$ — *последовательность гауссовских случайных величин* $N(0, n)$ *с независимыми приращениями.*

Доказательство. Из (13), согласно лемме 2, имеем

$$\Delta\xi_n=[A_0+A_1\theta_n]\Delta+\sqrt{B\circ B}\Delta w(n). \tag{15}$$

Построим $\Delta\bar{w}(n)$ следующим образом:

$$\Delta\bar{w}(n)=\frac{A_1(\theta_n-m(n))\Delta+\sqrt{B\circ B}\,\Delta w(n)}{\sqrt{B\circ B+A_1^2\gamma(n)\Delta}}. \tag{16}$$

Из (16) и (15) непосредственно следует (14). Поэтому остается доказать, что $\bar{w}(n)$ нормальная последовательность с независимыми приращениями.

Так как по теореме 1 [4] $p(\theta_n \mid \mathscr{F}_{\xi^n})$ нормальна $N\left(m(n), \gamma(n)\right)$, то из (16) легко видеть, что $p(\Delta\bar{w}(n) \mid \mathscr{F}_{\xi^n})$ также нормальна $N(0, \Delta)$.

Теперь докажем, что $\bar{w}(n)$ процесс с независимыми приращениями. Пусть $m>n+\Delta$. Тогда, очевидно, достаточно показать, что

$$\mathbf{M}\{[\Delta\bar{w}(n)]^\alpha[\Delta\bar{w}(m)]^\beta\}=\mathbf{M}[\Delta\bar{w}(n)]^\alpha\,\mathbf{M}[\Delta\bar{w}(m)]^\beta. \tag{17}$$

Действительно, если только распределения

$$p\left(\Delta\bar{w}(n), \Delta\bar{w}(m)\right), \quad p\left(\Delta\bar{w}(n)\right), \quad p\left(\Delta\bar{w}(m)\right)$$

однозначно определяются своими моментами, то тогда из (17) следует

$$P\left(\Delta\bar{w}(n), \Delta\bar{w}(m)\right)=p\left(\Delta\bar{w}(n)\right)p\left(\Delta\bar{w}(m)\right).$$

Вследствие того, что $p\left(\Delta\bar{w}(n)\right)$ и $p\left(\Delta\bar{w}(m)\right)$ — нормальные плотности, они однозначно определяются своими моментами (см. [5]). На основании критерия Волда, Крамера (см. [5]) следует, что двумерная плотность

$$p\left(\Delta\bar{w}(n), \Delta\bar{w}(m)\right)$$

также однозначно определяется своими моментами. Поэтому из (17) следует независимость приращений вида $\bar{w}(j)-\bar{w}(j-\Delta)$, а так как

$$\bar{w}(l)-\bar{w}(k)=\sum_{j=k+\Delta}^{l}[\bar{w}(j)-\bar{w}(j-\Delta)],$$

то из (17) следует независимость приращений процесса с дискретным временем $\bar{w}(n)$.

Заметив предварительно, что θ_m при фиксированном ξ^m не зависит от θ_n $(n<m-\Delta)$ и что плотность $p\left(\Delta\bar{w}(n)|\xi^n\right)$ нормальна, докажем (17)

$$\begin{aligned}
&\mathbf{M}\{[\Delta\bar{w}(n)]^\alpha[\Delta\bar{w}(m)]^\beta\}=\mathbf{M}\left\{\mathbf{M}\{[\Delta\bar{w}(n)]^\alpha\cdot[\Delta\bar{w}(m)]^\beta\mid\theta_n,\ \xi^m\}\right\}=\\
&=\mathbf{M}\left\{[\Delta\bar{w}(n)]^\alpha\,\mathbf{M}\{[\Delta\bar{w}(m)]^\beta\mid\theta_n,\ \xi^m\}\right\}=\\
&=\mathbf{M}\left\{[\Delta\bar{w}(n)]^\alpha\,\mathbf{M}\{[\Delta\bar{w}(m)]^\beta\mid\xi^m\}\right\}=\\
&=\mathbf{M}\{[\Delta\bar{w}(m)]^\beta\mid\xi^m\}\,\mathbf{M}[\Delta\bar{w}(n)]^\alpha=\mathbf{M}[\Delta\bar{w}(m)]^\beta\,\mathbf{M}[\Delta\bar{w}(n)]^\alpha.
\end{aligned}$$

§ 3. Доказательство теорем 1 и 2

1. Доказательство теоремы 1. Если двумерная марковская цепь (θ_n, ξ_n) управляется системой разностных уравнений

$$\begin{aligned}
&\Delta\theta_n=[a_0(\xi_n,n)+a_1(\xi_n,n)\,\theta_n]\Delta+\\
&+b_1(\xi_n,n)\Delta w_1(n)+b_2(\xi_n,n)\Delta w_2(n),\\
&\Delta\xi_n=[A_0(\xi_n,n)+A_1(\xi_n,n)\,\theta_n]\Delta+\\
&+B_1(\xi_n,n)\Delta w_1(n)+B_2(\xi_n,n)\Delta w_2(n),
\end{aligned}\tag{18}$$

а априорная плотность распределения

$$\pi_\theta(0)=\frac{\partial\mathbf{P}(\theta_0\leqslant\theta\mid\xi_0)}{\partial\theta}$$

нормальна с параметрами (m,γ), то, как показано в теореме 1 [4], апостериорная плотность

$$\pi_\theta(n)=\frac{\partial\mathbf{P}(\theta_n\leqslant\theta\mid\xi^n)}{\partial\theta}$$

также нормальна, параметры $m(n)=\mathbf{M}(\theta_n|\,\xi^n)$ и $\gamma(n)=\mathbf{M}\left[\left(\theta_n-m(n)\right)^2\mid\xi^n\right]$ определяются из следующих рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned}
&\Delta m(n)=\left(a_0+a_1m(n)\right)\Delta+\frac{b\circ B+\gamma(n)A_1(1+a_1\Delta)}{B\circ B+A_1^2\gamma(n)\Delta}\times\\
&\times\left(\Delta\xi_n-\left(A_0+A_1m(n)\right)\Delta\right),\\
&\Delta\gamma(n)=\gamma(n)(2a_1+a_1^2\Delta)\Delta+(b\circ b)\Delta-\\
&-\frac{[b\circ B+\gamma(n)A_1(1+a_1\Delta)]^2\Delta}{B\circ B+A_1^2\gamma(n)\Delta}.
\end{aligned}\tag{19}$$

Пусть $l\geqslant n$, тогда нетрудно проверить, что

$$m(l)=m(n)+\sum_{k=n+\Delta}^{l}[m(k)-m(k-\Delta)].\tag{20}$$

Из (19) и (20) следует

$$m(l)=m(n)+\sum_{k=n+\Delta}^{l}[a_0+a_1 m(k-\Delta)]\Delta+$$

$$+\frac{b\circ B+\gamma(k-\Delta)A_1(1+a_1\Delta)}{B\circ B+A_1^2\gamma(k-\Delta)\Delta}\left[\Delta\xi_{k-\Delta}-\left(A_0+A_1 m(k-\Delta)\right)\Delta\right]. \tag{21}$$

Аналогично из (18) легко получается соотношение

$$\xi(l)=\xi_n+\sum_{k=n+\Delta}^{l}[(A_0+A_1\theta_{k-\Delta})\Delta+B_1\Delta w_1(k-\Delta)+$$

$$+B_2\Delta w_2(k-\Delta)]. \tag{22}$$

Используя лемму 3, вместо (21) и (22) получаем новые соотношения

$$m(l)=m(n)+\sum_{k=n+\Delta}^{l}[a_0+a_1 m(k-\Delta)]\Delta+$$

$$+\sum_{k=n+\Delta}^{l}\frac{b\circ B+\gamma(k-\Delta)A_1(1+a_1\Delta)}{\sqrt{B\circ B+A_1^2\gamma(k-\Delta)\Delta}}\Delta\overline{w}(k-\Delta), \tag{23}$$

$$\xi_l=\xi_n+\sum_{k=n+\Delta}^{l}[A_0+A_1 m(k-\Delta]\Delta+$$

$$+\sum_{k=n+\Delta}^{l}\sqrt{B\circ B+A_1^2\gamma(k-\Delta)\Delta}\,\Delta\overline{w}(k-\Delta). \tag{24}$$

Поскольку $m(l,n)=\mathbf{M}(\theta_l\mid\xi^n)=\mathbf{M}(m(l)\mid\xi^n)$, то из (23) и (24) можно получить замкнутую систему уравнений для $m(l,n)$, $h(l,n)$ только в том случае, когда в (18)

$$a_0(\xi,n)=a_0(n)+a_2(n)\xi,\quad A_0(\xi,n)=A_0(n)+A_2(n)\xi,$$

$$a_1(\xi,n)=a_1(n),\quad A_1(\xi,n)=A_1(n), \tag{25}$$

т.е. для процесса (θ_n,ξ_n), управляемого системой разностных уравнений (1). Действительно, при предположениях (25), беря условное математическое ожидание $\mathbf{M}(\cdot\mid\xi^n)$ от обеих частей (23) и (24), получим

$$m(l,n)=m(n)+\sum_{k=n+\Delta}^{l}[a_0+a_1 m(k-\Delta,n)+a_2 h(k-\Delta,n)]\Delta, \tag{26}$$

$$h(l,n)=\xi_n+\sum_{k=n+\Delta}^{l}[A_0+A_1 m(k-\Delta,n)+A_2 h(k-\Delta,n)]\Delta. \tag{27}$$

Из (26) и (27) находим разностные уравнения по l

$$\Delta_l m(l,n)=[a_0(l)+a_1(l)m(l,n)+a_2(l)h(l,n)]\Delta,$$

$$\Delta_l h(l,n)=[A_0(l)+A_1(l)m(l,n)+A_2(l)h(l,n)]\Delta$$

с начальными условиями

$$m(n, n)=m(n), \quad h(n, n)=\xi_n.$$

Итак, первая часть теоремы доказана.

Зафиксируем теперь l и найдем разностное уравнение для $m(l, n)$ и $h(l, n)$ по n.

Введем следующие обозначения:

$$\eta_n=\begin{pmatrix} m(n) \\ \xi_n \end{pmatrix}, \quad \alpha_0(n)=\begin{pmatrix} a_0(n) \\ A_0(n) \end{pmatrix},$$

$$\alpha_1(n)=\begin{pmatrix} a_1(n) & a_2(n) \\ A_1(n) & A_2(n) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{w}(n)=\begin{pmatrix} \sum\limits_{k=\Delta}^{n} \dfrac{b\circ B+\gamma(k-\Delta)A_1(1+a_1\Delta)}{\sqrt{B\circ B+A_1^2\gamma(k-\Delta)\Delta}}\,\Delta\bar{w}(k-\Delta) \\ \sum\limits_{k=\Delta}^{n} \sqrt{B\circ B+A_1^2\gamma(k-\Delta)\Delta}\,\Delta\bar{w}(k-\Delta) \end{pmatrix},$$

$$k(l, n)=\begin{pmatrix} m(l, n) \\ h(l, n) \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Тогда вместо (23) и (24) с учетом (25) имеем

$$\Delta\eta_l=[\alpha_0(l)+\alpha_1(l)\eta_l]\Delta+\Delta\tilde{w}(l) \tag{29}$$

и в силу многомерного аналога леммы 1

$$\eta_l=\Phi(l)\eta_0+\sum_{k=\Delta}^{l}\Phi(l)\Phi^{-1}(k)[\alpha_0(k-\Delta)\Delta+\Delta\tilde{w}(k-\Delta)], \tag{30}$$

где матрица $\Phi(k)$ находится из рекуррентного соотношения

$$\Phi(k+\Delta)=\Phi(k)[\alpha_1(k)\Delta+E], \quad \Phi(0)=E,$$

где E — единичная матрица.

Беря условное математическое ожидание $\mathbf{M}(\cdot\mid\xi^n)$, $n\leqslant l$ от обеих частей (30), получим

$$k(l, n)=\Phi(l)\eta_0+\sum_{k=\Delta}^{l}\Phi(l)\Phi^{-1}(k)\alpha_0(k-\Delta)\Delta+$$

$$+\sum_{k=\Delta}^{n}\Phi(l)\Phi^{-1}(k)\tilde{w}(k-\Delta). \tag{31}$$

Отсюда

$$k(l, 0)=\Phi(l)\eta_0+\sum_{k=\Delta}^{l}\Phi(l)\Phi^{-1}(k)\alpha_0(k-\Delta)\Delta. \tag{32}$$

Поэтому

$$k(l, n)=k(l, 0)+\sum_{k=\Delta}^{l}\Phi(l)\Phi^{-1}(k)\Delta\tilde{w}(k-\Delta). \tag{33}$$

Из (33) получим

$$\Delta_n k(l, n) = \Phi(l)\Phi^{-1}(n+\Delta)\Delta\tilde{w}(n)$$

или с учетом (28)

$$\Delta_n \begin{pmatrix} m(l, n) \\ h(l, n) \end{pmatrix} = \Phi(l)\,\Phi^{-1}(n+\Delta)\left(\frac{b\circ B+\gamma(n)\,A_1(1+a_1\Delta)}{B\circ B+A_1^2\gamma(n)\,\Delta}\right)\times$$

$$\times\left(\Delta\xi_n - \left(A_0(n)+A_1(n)\,m(n)+A_2(n)\,\xi_n\right)\Delta\right) \tag{34}$$

с начальным условием

$$\begin{pmatrix} m(0, l) \\ h(0, l) \end{pmatrix} = k(l, 0),$$

которое в свою очередь определяется из (32) с

$$\begin{pmatrix} m(0, 0) \\ h(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ \xi_0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1 полностью доказана.

Доказательство теоремы 2 приводить не будем, так как оно аналогично доказательству теоремы 1.

2. Рассмотрим в качестве иллюстрации к теоремам 1 и 2 два примера.

Пример 1. Пусть (θ_n, ξ_n) управляется системой

$$\Delta\xi_n = -(1-\rho)\,\xi_n + (1-\rho)\,\theta + \sigma\sqrt{1-\rho^2}\,w_n, \tag{35}$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n \equiv \theta\ (\omega),$$

σ^2 и ρ — постоянные, $|\rho|<1$ (см. пример 4 [4]). Сравнивая (35) с (1), имеем

$$\Delta=1,\ A_0(n)=0,\ A_1(n)=1-\rho,\ A_2(n)=-(1-\rho),$$

$$B_1=\sigma\sqrt{1-\rho^2},\ B_2=0,\ a_0=a_1=a_2=b_1=b_2=0.$$

Тогда, согласно теореме 1,

$$\Delta_l \begin{pmatrix} m(l, n) \\ h(l, n) \end{pmatrix} = (1-\rho)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m(l, n) \\ h(l, n) \end{pmatrix}$$

или

$$\Delta_l \begin{pmatrix} m(l, n) \\ h(l, n) \end{pmatrix} = (1-\rho)\begin{pmatrix} 0 \\ m(l, n)-h(l, n) \end{pmatrix}.$$

Отсюда для $h(l, n)$ имеем рекуррентное соотношение

$$h(l+1, n) = m(l, n)\,(1-\rho) + \rho h(l, n), \tag{36}$$

$$h(n, n) = \xi_n,$$

а для $m(l, n)$

$$\Delta_l m(l, n) = 0 \text{ или}$$

$$m(l+1, n) = m(l, n) = m(n),\quad (l \geqslant n),$$

т.е. оценка экстраполяции ненаблюдаемой компоненты совпадает с оценкой фильтрации, что естественно, так как $\theta_{n+1}=\theta_n\equiv\theta(\omega)$. Поэтому (36) можно переписать в виде

$$h(l+1, n)=(1-\rho)m(n)+\rho h(l, n),$$
$$h(n, n)=\xi_n.$$

Теперь, фиксируя l, получим

$$\Delta_n\begin{pmatrix}m(l,n)\\ h(l,n)\end{pmatrix}=\Phi(l)\,\Phi^{-1}(n+1)\begin{pmatrix}\dfrac{\gamma(n)(1-\rho)}{\sigma^2(1-\rho^2)+(1-\rho)^2\gamma(n)}\\ 1\end{pmatrix}\times$$
$$\times\left(\Delta\xi_n-(1-\rho)\,m(n)+(1-\rho)\,\xi_n\right)$$

с начальным условием

$$\begin{pmatrix}m(l, 0)\\ h(l, 0)\end{pmatrix}=\Phi(l)\begin{pmatrix}m\\ \xi_0\end{pmatrix},$$

где $\Phi(l)$ определяется из рекуррентного соотношения

$$\Phi(l)=\Phi(l-1)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1-\rho & \rho\end{pmatrix},$$

а $m(n)$ и $\gamma(n)$ найдены в примере 4 [4].

Пример 2. Пусть двумерная марковская цепь (θ_n, ξ_n) управляется системой

$$\Delta\theta_n=-\theta_n\Delta+\Delta w(n),$$
$$\Delta\xi_n=-\theta_n\xi_n^3\Delta+\Delta w(n). \tag{37}$$

Сравнивая (37) с (2), имеем

$$a_0=0,\ a_1=-1,\ b_1=1,\ b_2=0,\ A_0=0,\ A_1=-\xi_n^3,\ B_1=1,\ B_2=0.$$

Из теоремы 2 получим

$$\Delta_l m(l, n)=-m(l, n)\Delta,\quad l>n,$$
$$m(n, n)=m(n).$$

При фиксированном l справедливо

$$\Delta_n m(l, n)=\frac{\Phi(l)}{\Phi(n+\Delta)}\ \frac{-\xi_n^3\gamma(n)(1-\Delta)+1}{\xi_n^6\gamma(n)\Delta}\left(\Delta\xi_n+\xi_n^3 m(n)\,\Delta\right)$$

с начальным условием

$$m(l, 0)=\Phi(l)m,$$
$$m(0, 0)=m,$$

где $\Phi(l)$ определяется из рекуррентного соотношения $\Phi(l+\Delta)=\Phi(l)(1-\Delta)$, $\Phi(0)=1$, а $m(n)$ и $\gamma(n)$ — из теоремы 1 [4].

Интересен случай $\Delta=1$. Тогда $\Phi(l+1)=\Phi(l)=0$, $\Phi(0)=1$,

$$\Delta_n m(l, n)=0,$$
$$m(l, 0),\quad m(0, 0)=m.$$

§ 4. Экстраполяция компонент многомерной марковской цепи

Приведем многомерные аналоги теорем 1 и 2.

Теорема 3. Пусть марковская цепь

$$(\Theta_n,\ \xi_n)=\Big(\big(\theta_1(n),\ \ldots,\ \theta_k(n)\big),\ \big(\xi_1(n),\ \ldots,\ \xi_l(n)\big)\Big),\quad n=0,\ \Delta,\ 2\Delta,\ \ldots,$$

$$(\Delta>0),\ k,\ l<\infty,$$

допускает представление в виде системы разностных уравнений

$$\begin{aligned}
&\Delta\theta_n=[a_0(n)+a_1(n)\,\theta_n+a_2(n)\,\xi_n]\Delta+\\
&+b_1(\xi_n,\ n)\,\Delta w_1(n)+b_2(\xi_n,\ n)\,\Delta w_2(n),\\
&\Delta\xi_n=[A_0(n)+A_1(n)\,\theta_n+A_2(n)\,\xi_n]\Delta+\\
&+B_1(\xi_n,\ n)\,\Delta w_1(n)+B_2(\xi_n,\ n)\,\Delta w_2(n),
\end{aligned}\tag{38}$$

где $a_0=(a_{01},\ \ldots,\ a_{0k})$, $A_0=(A_{01},\ \ldots,\ A_{0l})$ — вектор-функции a_1, A_1, a_2, A_2 — матрицы порядка $k\times k$, $l\times k$, $k\times l$, $l\times l$, соответственно, b_1, b_2, B_1, B_2 имеют соответственно порядок $k\times k$, $l\times k$, $k\times l$, $l\times l$, $w_1(n)=\big(w_{11}(n),\ \ldots,\ w_{1k}(n)\big)$, $w_2(n)=\big(w_{21}(n),\ \ldots,\ w_{2l}(n)\big)$ — k и l-мерные гауссовские последовательности с независимыми приращениями и с независимыми компонентами, у которых

$$\mathbf{M}w_{pq}(n)=0,\quad \mathbf{M}\,[w_{pq}(n)-w_{pq}(s)]^2=n-s,\quad n>s;$$

$$p=1,\ \ 1\leqslant q\leqslant k;\ \ p=2,\ \ 1\leqslant q\leqslant l.$$

Предполагается, что случайный вектор θ_0 является нормальным с параметрами m_0 и Γ_0. Тогда вектор условных математических ожиданий $m(l,\ n)=\mathbf{M}(\theta_l\mid\mathscr{F}_n^{\xi})$ и $h(l,\ n)=\mathbf{M}(\xi_l\mid\mathscr{F}_n^{\xi})$, $l\geqslant n$ определяется из рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned}
&\Delta_l m(l,\ n)=[a_0(l)+a_1(l)m(l,\ n)+a_2(l)h(l,\ n)]\Delta,\\
&\Delta_l h(l,\ n)=[A_0(l)+A_1(l)m(l,\ n)+A_2(l)h(l,\ n)]\Delta
\end{aligned}\tag{39}$$

с начальными условиями $m(n,\ n)=m(n)$, $h(n,\ n)=\xi_n$.

При фиксированном l справедливы разностные уравнения по n

$$\Delta_n\begin{pmatrix}m(l,\ n)\\ h(l,\ n)\end{pmatrix}=$$

$$=\Phi(l)\,\Phi^{-1}(n+\Delta)\begin{pmatrix}[(E_1+a_1\Delta)\,\Gamma_nA_1^*+(b\circ B)]\,[(B\circ B)+A_1\,\Gamma_n\,A_1^*\,\Delta]^{-1}\\ E_2\end{pmatrix}\times$$

$$\times\Big(\Delta\xi_n-\big(A_0(n)+A_1(n)\,m(n)+A_2(n)\,\xi_n\big)\,\Delta\Big)$$

с начальным условием

$$\begin{pmatrix}m(l,\ 0)\\ h(l,\ 0)\end{pmatrix},$$

определяемым из (39) при $n=0$ с

$$\begin{pmatrix} m(0,\ 0) \\ h(0,\ 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ \xi_0 \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$(b\circ b)=b_1 b_1^*+b_2 b_2^*,\quad (b\circ B)=b_1 B_1^*+b_2 B_2^*,\quad (B\circ B)=B_1 B_1^*+B_2 B_2^*,$$

C^* – матрица, сопряженная с C, E_1, E_2 – единичные матрицы порядка $l\times l$ и $k\times k$.

$\Phi\ (l)$ находится из рекуррентного соотношения

$$\Phi\ (l+\Delta)=\Phi\ (l)\ [\alpha_1\ (l)\Delta+E_3],\quad \Phi\ (0)=E_3,$$

где

$$\alpha_1\ (l) = \begin{pmatrix} a_1\ (l) & a_2\ (l) \\ A_1\ (l) & A_2\ (l) \end{pmatrix};$$

E_3 – единичная матрица порядка $(l+k)\times(l+k)$. Здесь вектор $m\ (n)= =\mathbf{M}\ [\theta_n \mid \mathscr{F}_{\xi n}]$ и матрица ковариации $\Gamma_n=\mathbf{M}\left[\left(\theta_n-m\ (n)\right)\left(\theta_n-m\ (n)\right)^*\middle|\mathscr{F}_{\xi^n}\right]$, согласно теореме работы [4], определяются из уравнений

$$\Delta m\ (n)=\left(a_0\ (n)+a_1\ (n)\ m\ (n)+a_2\ (n)\ \xi_n\right)\Delta+$$

$$+\left[(E_1+a_1\Delta)\ \Gamma_n\ A_1^*+(b\circ B)\right]\left[(B\circ B)+A_1\ \Gamma_n\ A_1^*\ \Delta\right]^{-1}\times$$

$$\times\left[\Delta\xi_n-\left(A_0\ (n)+A_1\ (n)\ m\ (n)+A_2\ (n)\ \xi_n\right)\Delta\right],$$

$$\frac{\Delta\Gamma_n}{\Delta}=(b\circ b)+a_1\ \Gamma_n\, a_1^*\ \Delta+a_1\ \Gamma_n+\Gamma_n\ a_1^*-$$

$$-\left[(E_1+a_1\Delta)\ \Gamma_n\ A_1^*+(b\circ B)\right]\left[(B\circ B)+A_1\ \Gamma_n\ A_1^*\ \Delta\right]^{-1}\times$$

$$\times\left[(E_1+a_1\Delta)\ \Gamma_n\ A_1^*+(b\circ B)\right]^*.$$

Теорема 4. *Пусть марковская цепь* $(\theta_n,\ \xi_n)$, $n=0,\ \Delta,\ 2\Delta,\ \ldots\ (\Delta>0)$, $\theta_n=\left(\theta_1\ (n),\ \ldots,\ \theta_k\ (n)\right)$, $\xi_n=\left(\xi_1\ (n),\ \ldots,\ \xi_l\ (n)\right)$ *управляется системой разностных уравнений*

$$\Delta\theta_n=[a_0\ (n)+a_1\ (n)\ \theta_n]\ \Delta+b_1\ (\xi_n,\ n)\ \Delta w_1\ (n)+b_2\ (\xi_n,\ n)\ \Delta w_2\ (n),$$

$$\Delta\xi_n=[A_0\ (\xi_n,\ n)+A_1\ (\xi_n,\ n)\ \theta_n]\ \Delta+B_1\ (\xi_n,\ n)\ \Delta w_1\ (n)+$$

$$+B_2\ (\xi_n,\ n)\Delta w_2\ (n).$$

Предполагается, что случайный вектор θ_0 является нормальным с параметрами $(m_0,\ \Gamma_0)$. Тогда вектор условных математических ожиданий $m\ (l,\ n)= =\mathbf{M}\ (\theta_l \mid \mathscr{F}_{\xi^n})$ при фиксированном n определяется из рекуррентного соотношения

$$\Delta_l\, m\ (l,\ n)=[a_0\ (l)+a_1\ (l)\ m\ (l,\ n)]\ \Delta,\quad l\geqslant n \tag{40}$$

с начальным условием $m\ (n,\ n)=m\ (n)$.

При фиксированном l, $m(l, n)$ удовлетворяет разностным уравнениям по n

$$\Delta_n m(l, n) = \Phi(l)\, \Phi^{-1}(n+\Delta)\Big[(E_1 + a_1 \Delta)\, \Gamma_n A_1^* + (b \circ B)\Big] \times$$

$$\times \Big[(B \circ B) + A_1 \Gamma_n A_1^* \Delta\Big]^{-1} \Big(\Delta\xi_n - \big(A_0(\xi_n, n) + A_1(\xi_n, n)\, m(n)\big)\, \Delta\Big)$$

с начальным условием $m(l, 0)$, определяемым из (40) при $n=0$ и $m(0, 0) = m_0$.

Здесь $\Phi(l)$ определяется из матричного рекуррентного соотношения

$$\Phi(l+\Delta) = \Phi(l)\,[a_1 \Delta + E_1],$$

$$\Phi(0) = E_1,$$

а вектор средних $m(n)$ и матрица ковариации Γ_n определяются из уравнений (см. [4])

$$\Delta m(n) = \big(a_0(n) + a_1(n)\, m(n)\big)\, \Delta +$$

$$+ \Big[(E_1 + a_1 \Delta)\, \Gamma_n A_1^* + (b \circ B)\Big] \Big[(B \circ B) + A_1 \Gamma_n A_1^* \Delta\Big]^{-1} \times$$

$$\times \Big[\Delta\xi_n - \big(A_0(\xi_n, n) + A_1(\xi_n, n)\, m(n)\big)\, \Delta\Big],$$

$$\frac{\Delta\Gamma_n}{\Delta} = (b \circ b) + a_1 \Gamma_n a_1^* \Delta + a_1 \Gamma_n + \Gamma_n a_1^* -$$

$$- \Big[(E_1 + a_1 \Delta)\, \Gamma_n A_1^* + (b \circ B)\Big] \Big[(B \circ B) + A_1 \Gamma_n A_1^* \Delta\Big]^{-1} \times$$

$$- \Big[(E_1 + a_1 \Delta)\, \Gamma_n A_1^* + (b \circ B)\Big]^* .$$

Доказательства теорем 3 и 4 мы приводить не будем, так как они совершенно аналогичны доказательствам теорем 1 и 2.

В заключение пользуюсь случаем выразить глубокую признательность А. Н. Ширяеву за постановку задачи и постоянную помощь, а также Р. Ш. Липцеру за полезные советы и замечания.

Институт прикладной математики
Тбилисского Государственного университета

Поступило в редакцию
16.XI.1968

Литература

1. А. Н. Ширяев, Докторская диссертация, МИАН, 1967, М.
2. А. Н. Ширяев, Исследования по статистическому последовательному анализу (автореферат докторской диссертации), Математические заметки, III, 6 (1968), М., 739–754.
3. Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, Экстраполяция многомерных марковских процессов по неполным данным, Теория вероятностей и ее применения, XIII, 1 (1968), М., 17–38.
4. О. А. Глонти, Последовательная фильтрация и интерполяция компонент марковской цепи, Лит. матем. сб., IX, № 2 (1969), 263–279.
5. М. Дж. Кендалл, А. Стьюарт, Теория распределения, Изд. „Наука", 1966, М., стр. 160.

MARKOVO GRANDINĖS KOMPONENČIŲ EKSTRAPOLIACIJA

O. Glontis

(*Reziumė*)

Straipsnyje nagrinėjamos dvi specialios diskretinės schemos. Sąlyginėms matematinėms viltims gautos rekurentinės priklausomybės, kuriomis nusakomas optimalus kvadrato vidurkio prasme ekstrapoliacijos įvertinimas.

EXTRAPOLATION OF COMPONENTS OF MARKOV CHAINS

O. Glonti

(*Summary*)

In this paper we consider two special discrete schemes and obtain the recurrent relation for conditional expectations which define the optimal mean square estimations of extrapolation.