IX LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 4
1969

УДК–519.21

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

А. Алешкявичене

Пусть имеется последовательность

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots \tag{1}$$

независимых неотрицательных одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F(x)$. Не нарушая общности можем предполагать, что ξ_i не равны константе с вероятностью единица.

Обозначим

$$S_0=0, \quad S_m=\sum_{i=1}^{m}\xi_i, \quad m=1,\ 2,\ \ldots,$$

$$N_t=\max\{m: S_m<t\}, \quad t\in[0,\ \infty),$$

$$\mu_r=\int_0^\infty x^r\,dF(x), \quad \sigma^2=\mu_2-\mu_1^2, \quad \bar\sigma^2=\frac{\sigma^2}{\mu_1^3}, \quad f(z)=\int_{0-}^{\infty}e^{izx}\,dF(x),$$

$$F_t(x)=\mathbf{P}\left\{\frac{N_t-\mathbf{M}N_t}{\bar\sigma\sqrt{t}}<x\right\}, \quad \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

В. Феллером в работе [1] (см. также [3], [4]), исходя из соотношения

$$P\{S_m<t\}=\mathbf{P}\{N_t\geqslant m\}, \tag{2}$$

в частности, была доказана следующая теорема об асимптотической нормальности N_t при больших t. Если $\mu_2<\infty$, то

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{N_t-\frac{t}{\mu_1}}{\bar\sigma\sqrt{t}}<x\right\}=\Phi(x).$$

В работе [5] для решетчатого случая (т.е., когда случайные величины в (1) являются решетчатыми) показано, что если $\mu_2<\infty$, то

$$\mathbf{P}\{N_t=m\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi t\bar\sigma^2}}\,e^{-\frac{\left(m-\frac{t}{\mu_1}\right)^2}{2\bar\sigma^2 t}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

Далее, в работе [6] получены асимптотические разложения по степеням $\frac{1}{\sqrt{t}}$ для $F_t(x)$ и для вероятностей $P\{N_t=m\}$ в решетчатом случае. В настоящей заметке получены аналогичные асимптотические разложения в случае, когда

$$\overline{\lim_{z\to\infty}}\,|f(z)|<1. \tag{3}$$

Теорема 1. *Если случайные величины в последовательности* (1) *удовлетворяют условию* (3) *и, кроме того, имеют конечные моменты до порядка* r $(r\geqslant 3)$ *включительно, то*

$$\mathbf{P}\{N_t=m\}=\frac{1}{\bar\sigma\sqrt{t}}\left\{\varphi(x_{tm})+\right.$$
$$\left.+\sum_{\nu=1}^{r-2}P_\nu\Big(-\varphi(x_{tm})\Big)\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^\nu\right\}+o\left(\frac{1}{(\sqrt{t})^{r-1}}\right).$$

Здесь $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ — плотность нормального распределения,

$$x_{tm}=\frac{m-\mathbf{M}N_t}{\bar\sigma\sqrt{t}}$$

и $P_\nu(-u)$ — полиномы степени 3ν относительно u, коэффициенты которых зависят от первых $\nu+2$ моментов распределения $F(x)$, а $P_\nu\Big(-\varphi(x)\Big)$ вычисляются как $P_\nu(-u)$ с заменой u^s на

$$\varphi^{(s)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d^s}{dx^s}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Далее введем следующие функции (см., напр., [13])

$$S_1(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin 2\nu\pi x}{\nu\pi},$$

$$S_2(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos 2\nu\pi x}{2(\nu\pi)^2},$$

. . . .

$$S_{2k}(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos 2\nu\pi x}{2^{2k-1}(\nu\pi)^{2k}},$$

$$S_{2k+1}(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin 2\nu\pi x}{2^{2k}(\nu\pi)^{2k+1}}.$$

Все эти функции являются периодическими с периодом 1. Теперь мы можем сформулировать следующие теоремы.

Теорема 2. *Если случайные величины в последовательности* (1) *удовлетворяют условию* (3) *и имеют конечный третий момент, то равномерно по* x

$$F_t(x)=\Phi(x)+\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi t}}Q_1(x)+$$
$$+\frac{1}{\bar\sigma}S_1\Big((x+a_t)\bar\sigma\sqrt{t}\Big)e^{-\frac{x^2}{2}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right),$$

где

$$Q_1(x)=\frac{\mu_1^4+3(\mu_2-\mu_1^2)\mu_2-\mu_3\mu_1}{6\bar\sigma^3\mu_1^5}(1-x^2)$$

и

$$a_t=\frac{\mathbf{M}N_t}{\bar\sigma\sqrt{t}}.$$

Теорема 3. *Если случайные величины в последовательности* (1) *удовлетворяют условию* (3) *и имеют конечные моменты до порядка* r ($r \geqslant 3$) *включительно, то*

$$F_t(x) = \Phi(x) + \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\nu=1}^{r-2} \frac{Q_\nu(x)}{t^{\frac{\nu}{2}}} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{r-2} \frac{m_\nu}{(\sigma\sqrt{t})^\nu} S_\nu\left((x+a_t)\sigma\sqrt{t}\right) \frac{d^\nu}{dx^\nu}\left[\Phi(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\nu=1}^{r-2} \frac{Q_\nu(x)}{t^{\frac{\nu}{2}}}\right] + o\left(\frac{1}{t^{\frac{r-2}{2}}}\right).$$

Здесь $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} Q_\nu(x) = P_\nu(-\Phi)$, где $P_\nu(-u)$ вычисляются как и в теореме 1, и

$$m_\nu = \begin{cases} +1 & \text{для } \nu, \text{ имеющих вид } 4k+1,\ 4k+2, \\ -1 & \text{для } \nu, \text{ имеющих вид } 4k-1,\ 4k. \end{cases}$$

Доказательство теорем 1—3. Наряду с величинами ξ_l, $l=1, 2, \ldots$, рассмотрим величины $\bar{\xi}_l$, $l=1, 2, \ldots$, определенные следующим образом

$$\bar{\xi}_l = \begin{cases} \xi_l, & \text{если } \xi_l \leqslant c\sqrt{t}, \\ c\sqrt{t}, & \text{если } \xi_l > c\sqrt{t}, \end{cases}$$

где $c = \max\left(1, \frac{1}{\mu_1}\right)$, $[y]$ — целая часть числа y и t настолько большой, что и величины $\bar{\xi}_l$ удовлетворяют условию (3).

Пусть

$$\bar{S}_m = \sum_{l=1}^{m} \bar{\xi}_l, \quad m = 1, 2, \ldots, \quad \bar{F}(x) = \mathbf{P}\{\bar{\xi}_l < x\}, \quad l = 1, 2, \ldots,$$

$$\bar{N}_t = \max\{m : \bar{S}_m < t\},$$

$$\bar{F}_t(x) = \mathbf{P}\left\{\frac{\bar{N}_t - \mathbf{M}N_t}{\sigma\sqrt{t}} < x\right\} \quad \text{и} \quad \bar{f}_t(z) = \mathbf{M}e^{iz\bar{N}_t}.$$

Тогда из (2) следует, что

$$|\mathbf{P}\{N_t < m\} - \mathbf{P}\{\bar{N}_t < m\}| = |\mathbf{P}\{S_m < t\} - \mathbf{P}\{\bar{S}_m < t\}|. \tag{4}$$

Далее, так как при всех x

$$|\mathbf{P}\{S_m < x\} - \mathbf{P}\{\bar{S}_m < x\}| < 2m \int_{\sqrt{t}}^{\infty} \mathbf{d}F(x), \tag{5}$$

а согласно асимптотическим выражениям моментов процессов N_t и $\bar{N}_t$ (см. [9], [11])*)

$$\left|\frac{\mathbf{M}N_t - \mathbf{M}\bar{N}_t}{\sigma\sqrt{t}}\right| = o\left(\frac{1}{t^{\frac{r-2}{2}}}\right) \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{\mathbf{D}\bar{N}_t}}{\sqrt{\mathbf{D}N_t}} = 1 + o\left(\frac{1}{t^{\frac{r-2}{2}}}\right), \tag{6}$$

*) Нетрудно доказать, что асимптотические формулы моментов и семиинвариантов процесса N_t, полученные В. Смитом [9], верны и в том случае, когда требование существования абсолютной компоненты распределения $F(x)$ заменено требованием (3).

то в силу (4)–(6)

$$\left|\mathbf{P}\left\{\frac{N_t-\mathbf{M}N_t}{\bar\sigma\sqrt{t}}<x\right\}-\mathbf{P}\left\{\frac{\bar N_t-\mathbf{M}N_t}{\bar\sigma\sqrt{t}}<x\right\}\right|=$$

$$=o\left(\frac{xe^{-\frac{x^2}{2}}}{t^{\frac{r-2}{2}}}\right)=o\left(\frac{1}{t^{\frac{r-2}{2}}}\right) \tag{7}$$

при всех положительных $m\leqslant 4\mu_1 t$ таких, что

$$m=\begin{cases}[x\sigma\sqrt{t}+\mathbf{M}N_t], & \text{если}\quad \{x\bar\sigma\sqrt{t}+\mathbf{M}N_t\}=0,\\ [x\bar\sigma\sqrt{t}+\mathbf{M}N_t]+1, & \text{если}\quad \{x\bar\sigma\sqrt{t}+\mathbf{M}N_t\}\neq 0.\end{cases}$$

Воспользовавшись центральной предельной теоремой с асимптотическими разложениями для независимых случайных величин (см., напр., [2]), получаем, что соотношение (7) верно и при $m>4\mu_1 t$.

Далее имеем

$$\mathbf{P}\{N_t=m\}=\mathbf{P}\{S_m<t\}-\mathbf{P}\{S_{m+1}<t\}.$$

И, так как при любом x

$$|\mathbf{P}\{S_m<x\}-\mathbf{P}\{\bar S_m<x\}-\mathbf{P}\{S_{m+1}<x\}+\mathbf{P}\{\bar S_{m+1}<x\}|\leqslant\int\limits_{\sqrt{t}}^{\infty}dF(x),$$

то в силу (4) и (6)

$$|\mathbf{P}\{N_t=m\}-\mathbf{P}\{\bar N_t=m\}|=o\left(\frac{1}{t^{\frac{r-1}{2}}}\right).$$

Следовательно, имея ввиду соотношения (7) и (8), вместо вероятностей $F_t(x)$ и $\mathbf{P}\{N_t=m\}$ можем рассматривать вероятности $\bar F_t(x)$ и $\mathbf{P}\{\bar N_t=m\}$.

В дальнейшем для доказательства теорем 1–3 будет нужна следующая лемма.

Лемма 1. *Если случайные величины в последовательности* (1) *удовлетворяют условию* (3) *и имеют конечные моменты до порядка* r ($r\geqslant 3$) *включительно, то для характеристической функции*

$$f_t(z)=\int\limits_{0-}^{\infty}e^{izx}\,d\bar F_t(x)$$

имеют место разложения:

$$f_t(z)=e^{-\frac{z^2}{2}}\left\{\left[1+\sum_{\nu=1}^{r-2}P_\nu(iz)\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^\nu\right]\left[1+\frac{\delta_1(t)}{(\sqrt{t})^{r-2}}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\delta(t)}{(\sqrt{t})^{r-2}}\left(|z|+|z|^{3(r-2)}\right)\right.$$

при $|z|\leqslant\sqrt{(r-2)\ln t}$ *и*

$$f_t(z)=e^{-\frac{z^2}{2}}\left\{\left[1+\sum_{\nu=1}^{r-2}P_\nu(iz)\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^\nu\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\delta(t)}{(\sqrt{t})^{r-2}}\left(|z|+|z|^{3(r-2)}\right)\right\}+\frac{\delta_1(t)}{t^{r-2}}$$

при

$$\sqrt{(r-2)\ln t} < |z| \leqslant \frac{1}{2\sigma}\, t^{-\frac{1}{4}} (\ln t)^{\frac{1}{4}}.$$

Здесь $P_\nu(iz)$, $\nu=1, \ldots, r-2$, – полиномы относительно iz степени 3ν с постоянными коэффициентами, зависящими только от первых $\nu+2$ моментов распределения $F(x)$, $\delta(t)$ и $\delta_1(t)$ – функции, стремящиеся к нулю при $t\to\infty$.

Доказательство леммы 1. Пусть $f(s)$ обозначает преобразование Лапласа–Стилтьеса функции $\bar{F}(x)$, т.е.

$$f(s) = \int_{0-}^{\infty} e^{-sx}\, d\bar{F}(x).$$

Если $Q(x) = 1 - \bar{F}(x)$, то ее преобразование Лапласа

$$q(s) = \int_{0-}^{\infty} e^{-sx} Q(x)\, dx = \frac{1-f(s)}{s}.$$

Тогда (см., напр., [14], I ч., гл. 3)

$$\psi(s;\, z) = \int_{0}^{\infty} e^{-st} f_t(z)\, dt = \frac{1-f(s)}{s\left(1-e^{iz} f(s)\right)} = \frac{q(s)}{1-e^{iz} f(s)}. \tag{9}$$

Пусть, далее, $s_t(z)$ является корнем уравнения

$$1 - e^{iz} f(s) = 0. \tag{10}$$

При $z=0$ уравнение (10) имеет корень $s_t(0)=0$. Далее, так как $f'\left(s_t(0)\right) \neq 0$, то $s_t(0)$ является простым корнем. Следовательно, мы можем воспользоваться свойствами неявных функций (см., напр., [15], стр. 95–102), согласно которым существует такое число $\Delta_t > 0$, что уравнение (10) определяет в интервале $[-\Delta_t, \Delta_t]$ однозначную, непрерывную и r-кратно дифференцируемую функцию $s_t = s_t(z)$, обращающую это уравнение в тождество и удовлетворяющую равенству $s_t(0)=0$. Вместо интервала $[-\Delta_t, \Delta_t]$ можно взять интервал, в котором

$$[1 - e^{iz} f(s)]'_s \neq 0.$$

Так как $f'_t(s) \neq 0$ для всех $s \in \{s : |\operatorname{Re} s| \leqslant \frac{\sqrt{\ln t}}{\sqrt{t}}\}$, то найдется такое число t_0, что при всех $t \geqslant t_0$ вместо интервала $[-\Delta_t, \Delta_t]$ можно взять интервал $[-\bar{\Delta}_t, \bar{\Delta}_t]$, где $\bar{\Delta}_t = \frac{1}{2\sigma}\, t^{-\frac{1}{4}} (\ln t)^{\frac{1}{4}}$. Тогда при всех $t \geqslant t_0$ и $|z| \leqslant \bar{\Delta}_t$ справедливо разложение

$$s_t(z) = s_t(0) + s'_t(0)\, z + s''_t(0)\, \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{s_t^{(r)}(0)}{r!}\, z^r + o\left(|z|^r\right). \tag{11}$$

Для вычисления производных $s_t'(0)$, $s_t''(0)$, ..., $s_t^{(r)}(0)$ воспользуемся уравнениями

$$\begin{cases} f\left(s_t(z)\right)\equiv e^{-iz}, \\ s_t'(z)f'\left(s_t(z)\right)=-ie^{-iz}, \\ s_t''(z)f'\left(s_t(z)\right)+s_t'^2(z)f''\left(s_t(z)\right)=(-i)^2e^{-iz}, \\ s_t'''(z)f'\left(s_t(z)\right)+3s_t''(z)s_t'(z)f''\left(s_t(z)\right)+s_t'^3(z)f'''\left(s_t(z)\right)=(-i)^3e^{-iz}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Отсюда при $z=0$ получаем

$$s_t'(0)=-\frac{i}{f'(0)}=\frac{i}{m_1},$$

$$s_t''(0)=\frac{m_2-m_1^2}{m_1^3}i^2,\quad s_t'''(0)=\frac{m_1^4+3(m_2-m_1^2)m_2-m_3m_1}{m_1^5}i^3,\ \dots,$$

где

$$m_k=\int_0^\infty x^k d\bar{F}(x),\qquad k=1,\ \dots,\ r.$$

Следовательно,

$$s_t(z)=\frac{iz}{m_1}+\frac{m_2-m_1^2}{m_1^3}\frac{(iz)^2}{2!}+\frac{m_1^4+3(m_2-m_1^2)m_2-m_3m_1}{m_1^5}\frac{(iz)^3}{3!}+\dots+$$

$$+R_1(m_1,\ \dots,\ m_r)\frac{(iz)^r}{r!}+o\left((z)^r\right)=$$

$$=\frac{iz}{\mu_1}+\bar{\sigma}^2\frac{(iz)^2}{2!}+\frac{\mu_1^4+3(\mu_2-\mu_1^2)\mu_2-\mu_3\mu_1}{\mu_1^5}\frac{(iz)^3}{3!}+\dots+$$

$$+R_1(\mu_1,\ \dots,\ \mu_r)\frac{(iz)^r}{}+o\left(\frac{|z|}{(\sqrt{t})^{r-1}}+\frac{|z|^{r-1}}{\sqrt{t}}+|z|^r\right), \tag{12}$$

где $R_1(u_1,\ \dots,\ u_r)$ — рациональная функция от $u_1,\ u_2,\ \dots,\ u_r$. Далее, так как

$$1-e^{iz}f(s)=e^{iz}\left[f\left(s_t(z)-f(s)\right)\right]$$

и при $|z|\leqslant\Delta_t$ и достаточно больших t $f'\left(s_t(z)\right)\neq 0$, то при тех же z и t

$$\frac{1}{1-e^{iz}f(s)}=e^{-iz}\frac{1}{f'\left(s_t(z)\right)\left(s_t(z)-s\right)}+w(s;\ z), \tag{13}$$

где

$$w(s;\ z)=e^{-iz}\frac{f(s)-f\left(s_t(z)\right)-f'\left(s_t(z)\right)\left(s-s_t(z)\right)}{f'\left(s_t(z)\right)\left[f(s)-f\left(s_t(z)\right)\right]\left(s-s_t(z)\right)}=$$

$$=e^{-iz}\frac{\dfrac{f(s)-f\left(s_t(z)\right)-f'\left(s_t(z)\right)\left(s-s_t(z)\right)}{\left(s-s_t(z)\right)^2}}{f'\left(s_t(z)\right)\dfrac{f(s)-f\left(s_t(z)\right)}{s-s_t(z)}}=e^{-iz}\frac{q_2(s;\ z)}{f'\left(s_t(z)\right)q_1(s;\ z)},$$

$$q_1(s;\ z)=\frac{f(s)-f\left(s_t(z)\right)}{s-s_t(z)} \tag{14}$$

и

$$q_2(s;\ z)=\frac{f(s)-f\left(s_t(z)\right)-f'\left(s_t(z)\right)\left(s-s_t(z)\right)}{\left(s-s_t(z)\right)^2}.$$

Чтоб убедиться, что $w(s;\ z)$ является частным двух преобразований Лапласа от функций из класса L_1, воспользуемся следующей леммой.

Лемма 2. *Если функция распределения неотрицательной случайной величины $F(x)$ имеет конечных первых r моментов, то при $|z|\leqslant\bar{\Delta}_t$ существует такая функция ограниченного изменения $\bar{F}_r(x;\ z)$, что*

$$f(s)=\int_{0-}^{\infty}e^{-sx}\,d\bar{F}(x)=f\left(s_t(z)\right)+f'\left(s_t(z)\right)\left(s-s_t(z)\right)+$$
$$+\frac{1}{2!}f''\left(s_t(z)\right)\left(s-s_t(z)\right)^2+\ldots+\frac{f^{(r-1)}\left(s_t(z)\right)}{(r-1)!}\left(s-s_t(z)\right)^{r-1}+$$
$$+\frac{f^{(r)}\left(s_t(z)\right)}{r!}\left(s-s_t(z)\right)^r\int_{0-}^{\infty}e^{-sx}\,d\bar{F}_r(x;\ z)$$

и, кроме того,

$$\int_{0-}^{\infty}e^{-sx}\,d\bar{F}_r(x;\ z)$$

является преобразованием Лапласа функции из класса L_1.

Доказательство леммы 2. Имеем

$$f(s)=\int_{0-}^{\infty}e^{-sx}\,d\bar{F}(x)=f\left(s_t(z)\right)\int_{0-}^{\infty}e^{-\left(s-s_t(z)\right)x}\,dG(x;\ z),$$

где

$$G(x;\ z)=\frac{1}{f\left(s_t(z)\right)}\int_{0-}^{x}e^{-s_t(z)u}\,d\bar{F}(u). \tag{15}$$

Тогда

$$g(s;\ z)=\int_{0-}^{\infty}e^{-sx}\,dG(x;\ z)=1+f'\left(s_t(z)\right)s+$$
$$+\frac{f''\left(s_t(z)\right)}{2!}s^2+\ldots+\frac{f^{(r)}\left(s_t(z)\right)}{r!}s^k+o\left(|s|^k\right). \tag{16}$$

Определим новую функцию

$$G_1(x;\ z)=-\frac{f\left(s_t(z)\right)}{f'\left(s_t(z)\right)}\int_{0-}^{x}\left[1-G(u;\ z)\right]du$$

с преобразованием Лапласа – Стилтьеса

$$g_1(s;\ z)=\int_{0-}^{\infty}e^{-sx}\,dG_1(x;\ z)=-\frac{f\left(s_t(z)\right)}{f'\left(s_t(z)\right)\cdot s}\left[1-g(s;\ z)\right]=$$
$$=1+\frac{f''\left(s_t(z)\right)}{2!\,f'\left(s_t(z)\right)}s+\ldots+\frac{f^{(r)}\left(s_t(z)\right)}{r!\,f'\left(s_t(z)\right)}s^{r-1}+o\left(|s|^{r-1}\right).$$

Отсюда

$$g(s;\ z)=1+\frac{f'\left(s_t(z)\right)}{f\left(s_t(z)\right)}\, s\, g_1(s;\ z). \tag{17}$$

Пусть далее

$$G_2(x;\ z)=-\frac{2f'\left(s_t(z)\right)}{f''\left(s_t(z)\right)}\int\limits_{0-}^{x} 1-G_1(x;\ z)]\,dx.$$

Тогда

$$g_2(s;\ z)=\int\limits_{0-}^{\infty} e^{-sx}\,dG_2(x;\ z)=-\frac{2f'\left(s_t(z)\right)}{f''\left(s_t(z)\right)\cdot s}\,[1-g_1(s;\ z)]=$$

$$=1+\frac{2f'''\left(s_t(z)\right)}{3!\,f''\left(s_t(z)\right)}\,s+\frac{2f^{(4)}\left(s_t(z)\right)}{4!\,f''\left(s_t(z)\right)}\,s^2+\ldots+$$

$$+\frac{2f^{(r)}\left(s_t(z)\right)}{r!\,f''\left(s_t(z)\right)}\,s^{r-2}+o\left(|s|^{r-2}\right). \tag{18}$$

И в силу (17) и (18)

$$g(s;\ z)=1+\frac{f'\left(s_t(z)\right)}{f\left(s_t(z)\right)}\,s+\frac{f''\left(s_t(z)\right)}{2f\left(s_t(z)\right)}\,s^2 g_2(s;\ z).$$

Аналогично можем построить функции $G_3(x;\ z)$, $G_4(x;\ z)$, $\ldots$, $G_r(x;\ z)$ с преобразованиями Лапласа–Стилтьеса $g_3(s;\ z)$, $g_4(s;\ z)$, $\ldots$, $g_r(s;\ z)$ соответственно. Тогда будем иметь

$$g(s;\ z)=1+\frac{f'\left(s_t(z)\right)}{f\left(s_t(z)\right)}\,s+\frac{f''\left(s_t(z)\right)}{2!\,f\left(s_t(z)\right)}\,s^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(r)}\left(s_t(z)\right)}{r!\,f\left(s_t(z)\right)}\,s^r g_r(s;\ z) \tag{19}$$

и согласно (16) и (19)

$$f(s)=f\left(s_t(z)\right)\int\limits_{0-}^{\infty} e^{-\left(s-s_t(z)\right)x}\,dG(x;\ z)=$$

$$=f\left(s_t(z)\right)+f'\left(s_t(z)\right)\left(s-s_t(z)\right)+\frac{1}{2!}\,f'\left(s_t(z)\right)\left(s-s_t(z)\right)^2+\ldots+$$

$$+\frac{1}{r!}\,f^{(r)}\left(s_t(z)\right)\left(s-s_t(z)\right)^r\int\limits_{0-}^{\infty} e^{-\left(s-s_t(z)\right)x}\,dG_r(x;\ z). \tag{20}$$

Обозначим

$$F_{(k)}(x;\ z)=\int\limits_{0-}^{x} e^{s(z)u}\,dG_k(u;\ z),\qquad k=1,\ \ldots,\ r.$$

Тогда равенство (20) можем переписать следующим образом

$$f(s)=f\left(s_t(z)\right)+f'\left(s_t(z)\right)\left(s-s_t(z)\right)+\ldots+$$
$$+\frac{1}{(r-1)!}f^{(r-1)}\left(s_t(z)\right)\left(s-s_t(z)\right)^{r-1}+$$
$$+\frac{1}{r!}f^{(r)}\left(s_t(z)\right)\left(s-s_t(z)\right)\int\limits_{0-}^{\infty}e^{-sx}dF_{(r)}(x;\ z),$$

где функция $F_r(x; z)$ удовлетворяет всем указанным в лемме условиям. Лемма 2 доказана.

Из леммы 2 сразу следует, что $w(s; z)$ является отношением двух преобразований Лапласа от функций из класса L_1.

Лемма 3. *При всех* $|z|\leqslant\bar{\Delta}_t$ *и* $\operatorname{Re}s>0$ *функция* $w(s; z)$ *является преобразованием Лапласа—Стилтьеса от функции ограниченного изменения* $W(t; z)$.

Доказательство леммы 3 можно найти в работе [10].

Лемма 4. *Если* $\mu_r<\infty$, *то функции* $w_s^{(l)}(s; z)$, $l=1, \ldots, r-2$, *при всех* $|z|\leqslant\bar{\Delta}_t$ *и* $\operatorname{Re}s>0$ *являются преобразованиями Лапласа—Стилтьеса от функций ограниченного изменения.*

Доказательство леммы 4. Введем вспомогательную функцию

$$\varphi_A(u)=\begin{cases}1, & |u|<A,\\ 2-\frac{|u|}{A}, & A\leqslant|u|<2A,\\ 0, & |u|\geqslant 2A,\end{cases}$$

определенную для всех действительных u. Тогда

$$w^{(l)}(-iu;\ z)=w_1^{(l)}(u;\ z)+w_2^{(l)}(u;\ z),$$

где

$$w_1^{(l)}(u;\ z)=\varphi_A(u)\,w(s;\ z)_{s=-iu}^{(l)}\quad \text{и}\quad w_2^{(l)}(u;\ z)=[1-\varphi_A(u)]\,w(s;\ z)_{s=-iu}^{(l)}.$$

Сначала покажем, что при конечном постоянном A обе функции $w_1^{(l)}(u; z)$ и $w_2^{(l)}(u; z)$ будут преобразованиями Фурье—Стилтьеса функций ограниченного изменения. Имеем, что

$$w^{(l)}(-iu;\ z)=e^{-iz}\left[\frac{q_2(s;\ z)}{q_1(s;\ z)}\right]_{s=-iu}^{(l)}=$$
$$=e^{-iz}\,\frac{R\left(q_2(-iu;\ z),\ q_2',\ \ldots,\ q_2^{(l)},\ q_1,\ q_1',\ \ldots,\ q_1^{(l)}\right)}{q_1^{l+1}(-iu;\ z)},\tag{21}$$

где $R(q_2, q_2', \ldots, q_2^{(l)}, q_1, q_1', \ldots, q_1^{(l)})$ является линейной комбинацией с числовыми коэффициентами конечного числа членов вида

$$q_2^{(n_1)}(-iu;\ z)\ldots q_2^{(n_k)}(-iu;\ z)\,q_1^{(m_1)}(-iu;\ z)\ldots q_1^{(m_j)}(-iu;\ z),\tag{22}$$

в которых число множителей равно $k+j=l+1$, $0\leqslant n_p\leqslant l$, $0\leqslant m_p\leqslant l$ и $n_1+\ldots+n_k+m_1+\ldots+m_j=l$.

Далее нетрудно видеть, что в знаменателе выражения

$$q_2^{(l)}(s;\ z)\,|_{s=-iu}=\left[\frac{f(s)-f\left(s_t(z)\right)-f'\left(s_t(z)\right)\left(s-s_t(z)\right)}{\left(s-s_t(z)\right)^2}\right]_{s=-iu}^{(l)},$$
$$l=1,\ 2,\ \ldots,\ r-2,\tag{23}$$

будет стоять $[s-s_t(z)]^{l+2}$, а в числителе — конечная сумма слагаемых вида

$$f(s)-f\left(s_t(z)\right)-f'\left(s_t(z)\right)\left(s-s_t(z)\right)-$$
$$-\frac{1}{2!}f''\left(s_t(z)\right)\left(s-s_t(z)\right)^2-\ldots-\frac{1}{(l+1)!}f^{(l+1)}\left(s_t(z)\right)\left(s-s_t(z)\right)^{l+1},$$
$$\Big[f'(s)-f'\left(s_t(z)\right)-f''\left(s_t(z)\right)\left(s-s_t(z)\right)-$$
$$-\frac{1}{2!}f'''\left(s_t(z)\right)\left(s-s_t(z)\right)^2-\ldots-$$
$$-\frac{1}{l!}f^{(l+1)}\left(s_t(z)\right)\left(s-s_t(z)\right)^l\Big]\left(s-s_t(z)\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Big[f^{(l)}(s)-f^{(l)}\left(s_t(z)\right)-f^{(l-1)}\left(s_t(z)\right)\left(s-s_t(z)\right)\Big]\left(s-s_t(z)\right)^l. \tag{24}$$

Аналогично, в знаменателе выражения

$$q_1^{(l)}(s;\ z)\,|_{s=-iu}=\left[\frac{f(s)-f\left(s_t(z)\right)}{s-s_t(z)}\right]^{(l)}_{s=-iu},\quad l=1,\ 2,\ \ldots,\ r-2, \tag{25}$$

будет стоять $[s-s_t(z)]^{l+1}$, а в числителе — конечная сумма слагаемых вида

$$f(s)-f\left(s_t(z)\right)-f'\left(s_t(z)\right)\left(s-s_t(z)\right)-\ldots-\frac{1}{l!}f^{(l)}\left(s_t(z)\right)\left(s-s_t(z)\right)^l,$$
$$\Big[f'(s)-f'\left(s_t(z)\right)-f''\left(s_t(z)\right)\left(s-s_t(z)\right)-\ldots-$$
$$-\frac{1}{(l-1)!}f^{(l)}\left(s_t(z)\right)\left(s-s_t(z)\right)^{l-1}\Big]\left(s-s_t(z)\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Big[f^{(l)}(s)-f^{(l)}\left(s_t(z)\right)\Big]\left(s-s_t(z)\right)^l. \tag{26}$$

Теперь, вспомнив лемму 2 и то, что $\varphi_A(u)$ является преобразованием Фурье функции из класса L_1, можем утверждать, что $w_1^{(k)}(-iu;\ z)$ является отношением двух функций, каждая из которых является преобразованием Фурье от функции из класса L_1. Кроме того, знаменатель этого отношения нигде не обращается в нуль, а числитель обращается в нуль вне конечной области. Опираясь на известную теорему Винера (см. [7], стр. 207), мы можем утверждать, что при $|z|\leqslant\bar{\Delta}_t$, $\operatorname{Re}s>0$ и достаточно больших t $w_1^{(l)}(u;\ z)$ является преобразованием Фурье функции из L_1, а следовательно, и преобразованием Фурье—Стилтьеса функции ограниченного изменения.

Далее, так как члены вида (22) состоят из $l+1$ множителей, то выражение вида

$$[-iu-s_t(z)]^{l+1}q_2^{(n_1)}(-iu;\ z)\ldots q_2^{(n_i)}(-iu;\ z)\,q_1^{(m_1)}(-iu;\ z)\ldots$$
$$\ldots q_1^{(m_j)}(-iu;\ z), \tag{27}$$

можно разделить на $l+1$ множителей, которые можно записать следующим образом

$$[-iu-s_t(z)]\,q_v^{(n_p)}(-iu;\ z)=$$
$$=\frac{f(-iu)-f\left(s_t(z)\right)-f'\left(s_t(z)\right)\left(s-s_t(z)\right)-\ldots-f^{(n_p+v-2)}\left(s_t(z)\right)\left(s-s_t(z)\right)^{n_p}}{[-iu-s_t(z)]^{n_p+1}}-$$
$$-f^{(n_p+v-1)}\left(s_t(z)\right),\qquad 0\leqslant n_p\leqslant l,\quad v=1,\ 2. \tag{28}$$

Согласно лемме 2, первое слагаемое правой части равенства (28) является преобразованием Лапласа функции из класса L_1. Далее, так как выражение

$$\left\{ 1 - e^{iz} f(-iu) \left[1 - \varphi_{\frac{A}{2}}(u) \right] \right\}^{-1}$$

является преобразованием Лапласа – Стилтьеса функции ограниченного изменения (см. [10], доказательство теоремы), то функция

$$\frac{[1-\varphi_A(u)]\,(-e^{iz})^{l+1}}{\left\{ 1 - e^{iz} f(-iu) \left[1 - \varphi_{\frac{A}{2}}(u) \right] \right\}^{l+1}} \tag{29}$$

тоже будет преобразованием Фурье – Стилтьеса функции ограниченного изменения. Но тогда из (21), (22), (27) – (29) следует, что и $w_2^{(l)}(u;\ z)$ является преобразованием Фурье – Стилтьеса от функции ограниченного изменения.

Сопоставляя этот результат с аналогичным результатом для $w_1^{(l)}(u;\ z)$, видим, что можно написать

$$w^{(l)}(-iu;\ z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}\, dW_{(l)}(t;\ z), \tag{30}$$

где $W_{(l)}(t;\ z)$ – функция ограниченного изменения. Соотношение (30) можно переписать в виде

$$\int_{-\infty}^{0} e^{iut}\, dW_{(l)}(t;\ z) = -\int_{0}^{\infty} e^{-iut}\, dW_{(l)}(t;\ z) + w^{(l)}(-iu;\ z).$$

Далее заметим, что знаменатель функции $w^{(l)}(s;\ z)$ не обращается в нуль при $\mathrm{Re}\, s > 0$, и выражение $|\, w^{(l)}(s;\ z)\, |$ является ограниченным при $\mathrm{Re}\, s \geqslant 0$. Таким образом, функция от s

$$-\int_{0}^{\infty} e^{-st}\, dW_{(l)}(t;\ z) + w^{(l)}(s;\ z)$$

будет аналитической и ограниченной в правой полуплоскости с границей по мнимой оси. Аналогично функция от s

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-st}\, dW_{(l)}(t;\ z)$$

будет аналитической и ограниченной в левой полуплоскости и непрерывной в замкнутой полуплоскости с границей по мнимой оси. Кроме того, на мнимой оси эти две функции совпадают. Таким образом, эти две функции являются частями одной и той же аналитической функции (см. [17], стр. 180), которая оказывается целой и ограниченной. Следовательно, она сводится к постоянной, а поскольку

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-st}\, dW_{(l)}(t;\ z) \to 0, \quad \text{когда} \quad s \to -\infty,$$

то эта постоянная может быть только нулем. Таким образом,

$$w^{(l)}(s;\ z)=\int\limits_0^\infty e^{-st}\,dW_{(l)}(t;\ z),$$

где $W_{(l)}(t;\ z)$ — функция ограниченного изменения. Лемма 4 доказана.

Теперь опять вернемся к выражению $\psi(s;\ z)$. Согласно (9) и (14) имеем

$$\psi(s;\ z)=\frac{q(s)}{1-e^{iz}f(s)}=q(s)\left[\frac{e^{-iz}}{f'\left(s_t(z)\right)\left(s_t(z)-s\right)}+w(s;\ z)\right]=$$

$$=\frac{e^{-iz}q\left(s_t(z)\right)}{f'\left(s_t(z)\right)\left(s_t(z)-s\right)}+\left[q(s)-q\left(s_t(z)\right)\right]\frac{e^{-iz}}{f'\left(s_t(z)\right)\left(s_t(z)-s\right)}+$$

$$+q(s)\,w(s;\ z). \tag{31}$$

Далее, так как $\frac{1}{\mu_1}Q(x)$ является плотностью функции распределения неотрицательной случайной величины, имеющей первые $r-1$ конечные моменты (см. [8], лемма 3), то по лемме 2 (см. еще формулы (23)–(26)) функция

$$\frac{q(s)-q\left(s_t(z)\right)}{s-s_t(z)}$$

и ее $r-2$ первых производных

$$\left[\frac{q(s)-q\left(s_t(z)\right)}{s-s_t(z)}\right]^{(l)},\qquad l=1,\ \ldots,\ r-2,$$

являются преобразованиями Лапласа равномерно по t и z ($|z|\leqslant\bar\Delta_t$) ограниченных функций из класса L_1. Отсюда, согласно (31), получаем, что при $|z|\leqslant\bar\Delta_t$ $\psi(s;\ z)$ является преобразованием Лапласа по t от функции

$$\bar f_t(z)=-e^{-iz}e^{s_t(z)t}\,\frac{q\left(s_t(z)\right)}{f'\left(s_t(z)\right)}+\lambda(t;\ z), \tag{32}$$

где $\lambda(t;z)$ — равномерно относительно t и z ограниченная функция из класса L_1. Воспользовавшись свойством, что

$$(-1)^l\left[\frac{q(s)-q\left(s_t(z)\right)}{s-s_t(z)}\cdot\frac{e^{-iz}}{f'\left(s_t(z)\right)}+q(s)\,w(s;\ z)\right]_s^{(l)},\qquad l=1,\ \ldots,\ r-2,$$

являются преобразованием Лапласа по t от $t^{l-2}\lambda(t;\ z)$ и что $t^{r-2}\lambda(t;\ z)$ принадлежит классу L_1, окончательно получаем, что при $t\to\infty$ и всех $|z|\leqslant\bar\Delta_t$

$$\bar f_t(z)=-e^{-iz}e^{s_t(z)t}\,\frac{q\left(s_t(z)\right)}{f'\left(s_t(z)\right)}+o\left(\frac{1}{t^{r-2}}\right). \tag{33}$$

Тогда при $|z|\leqslant\bar\Delta_t\sigma_s'\sqrt{t}$

$$f_t(z)=-e^{-iz\frac{MN_t}{\sigma\sqrt{t}}}\,\bar f_t\left(\frac{z}{\sigma\sqrt{t}}\right)=$$

$$=-\exp\left\{-iz\frac{MN_t}{\sigma\sqrt{t}}-\frac{iz}{\sigma\sqrt{t}}+s_t(z)\,t\right\}\frac{q\left(s_t\left(\frac{z}{\sigma\sqrt{t}}\right)\right)}{f'\left(s_t\left(\frac{z}{\sigma\sqrt{t}}\right)\right)}+o\left(\frac{1}{t^{r-2}}\right). \tag{34}$$

Далее имеем, что

$$\mathbf{M}N_t=\frac{t}{\mu_1}+\left(\frac{\mu_2}{2\mu_1^2}-1\right)+o\left(\frac{1}{t^{r-1}}\right) \tag{35}$$

(см. [9], [11]),

$$-\exp\left\{-\frac{\mu_2}{2\mu_1^2}\frac{iz}{\bar{\sigma}\sqrt{t}}\right\}\frac{q\left(s_t\left(\frac{z}{\bar{\sigma}\sqrt{t}}\right)\right)}{f'\left(s_t\left(\frac{z}{\bar{\sigma}\sqrt{t}}\right)\right)}=$$

$$=\left[1-\frac{1}{2}\frac{\mu_2}{\mu_1^2}\frac{iz}{\bar{\sigma}\sqrt{t}}+\ldots+\frac{1}{r!}\left(-\frac{1}{2}\frac{\mu_2}{\mu_1^2}\frac{iz}{\bar{\sigma}\sqrt{t}}\right)^{r-2}+\right.$$

$$\left.+o\left(\left|\frac{z}{\sqrt{t}}\right|^{r-2}\right)\right]\left[1+\frac{1}{2}\frac{m_2}{m_1^2}\frac{iz}{\bar{\sigma}\sqrt{t}}-\right.$$

$$-\frac{4m_3m_1+3m_2^2+3m_2m_1}{6m_1^4}\left(\frac{iz}{\bar{\sigma}\sqrt{t}}\right)^2+\ldots+$$

$$\left.+\frac{1}{(r-2)!}\left[\frac{q(s_t(z))}{f'(s_t(z))}\right]_{z=0}^{(r-2)}\left(\frac{iz}{\bar{\sigma}\sqrt{t}}\right)^{r-2}+o\left(\frac{|z|^{r-2}}{(\sqrt{t})^{r-2}}\right)\right]=$$

$$=1-\frac{16\mu_3\mu_1+15\mu_2^2+12\mu_2\mu_1}{24\mu_1^4\bar{\sigma}^2}\left(\frac{iz}{\sqrt{t}}\right)^2+$$

$$+\sum_{\nu=3}^{r-2}\alpha_\nu\frac{(iz)^\nu}{(\sqrt{t})^\nu}+o\left(\frac{|z|^{r-2}}{(\sqrt{t})^{r-2}}+\frac{|z|}{(\sqrt{t})^{r-1}}\right), \tag{36}$$

и, согласно (12),

$$\exp\left\{-\frac{iz}{\bar{\sigma}\sqrt{t}}\frac{t}{\mu_1}+\frac{z^2}{2}+s\left(\frac{z}{\bar{\sigma}\sqrt{t}}\right)t\right\}=$$

$$=1+\frac{\mu_1^4+3(\mu_2-\mu_1^2)\mu_2-\mu_3\mu_1}{3\bar{\sigma}^3\mu_1^5}\frac{(iz)^3}{\sqrt{t}}+$$

$$+t\sum_{\nu=4}^{r}\beta_\nu\frac{(iz)^\nu}{(\sqrt{t})^\nu}+o\left(\frac{|z|}{(\sqrt{t})^{r-2}}+\frac{|z|^{3(r-2)}}{(\sqrt{t})^{r-2}}\right), \tag{37}$$

где α_ν, $\nu=3,\ldots,r-2$, – постоянные, зависящие только от $\mu_1,\ldots,\mu_{\nu+1}$, а β_ν, $\nu=4,\ldots,r$, – постоянные, зависящие от $\mu_1,\ldots,\mu_\nu$. Из (34)–(37) получаем, что при всех $|z|\leqslant\bar{\Delta}_t\bar{\sigma}\sqrt{t}$

$$f_t(z)=e^{-\frac{z^2}{2}}\left[1+\sum_{\nu=1}^{r-2}P_\nu(iz)\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^\nu+\right.$$

$$\left.+o\left(\frac{|z|}{(\sqrt{t})^{r-2}}+\frac{|z|^{3(r-2)}}{(\sqrt{t})^{r-2}}\right)\right]+o\left(\frac{1}{t^{r-2}}\right), \tag{38}$$

где

$$P_1(iz)=\frac{\mu_1^4+3(\mu_2-\mu_1^2)\mu_2-\mu_3\mu_1}{6\bar{\sigma}^3\mu_1^5}(iz)^3,$$

а $P_\nu(iz)$, $\nu=3, \ldots, r-2$, — полиномы степени 3ν относительно iz с постоянными коэффициентами, зависящими только от $\mu_1, \ldots, \mu_{\nu+2}$. Из (38) следует, что при $|z| \leqslant \sqrt{(r-2)\ln t}$

$$f_t(z)=e^{-\frac{z^2}{2}}\left\{\left[1+\sum_{\nu=1}^{r-2} P_\nu(iz)\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^\nu\right]\left[1+o\left(\frac{1}{(\sqrt{t})^{r-2}}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+o\left(\frac{|z|+|z|^{3(r-2)}}{(\sqrt{t})^{r-2}}\right)\right\}. \qquad (39)$$

Из (38) и (39) получаем утверждение леммы 1.

Приступим к доказательству теоремы 1. Пусть

$$x_{tm}=\frac{m-\mathbf{M}N_t}{\bar{\sigma}\sqrt{t}}.$$

Тогда из

$$\bar{f}_t(z)=\sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\bar{N}_t=m\}\,e^{izm}$$

получаем, что

$$2\pi \mathbf{P}\{\bar{N}_t=m\}=\int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}_t(z)\,e^{-izm}\,dz=\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iz(x_{tm}\bar{\sigma}\sqrt{t}+\mathbf{M}N_t)}\,\bar{f}_t(z)\,dz$$

или

$$2\pi\bar{\sigma}\sqrt{t}\,\mathbf{P}\{\bar{N}_t=m\}=\int_{-\pi\bar{\sigma}\sqrt{t}}^{\pi\bar{\sigma}\sqrt{t}} e^{-izx_{tm}}\,f_t(z)\,dz.$$

Далее имеем

$$2\pi\bar{\sigma}\sqrt{t}\,\mathbf{P}\{\bar{N}_t=m\}=I_1+I_2+I_3, \qquad (40)$$

где

$$I_1=\int_{-\bar{\Delta}_t\bar{\sigma}\sqrt{t}}^{\bar{\Delta}_t\bar{\sigma}\sqrt{t}}\left\{f_t(z)-e^{-\frac{z^2}{2}}\left[1+\sum_{\nu=1}^{r-2}\frac{P_\nu(iz)}{t^{\frac{\nu}{2}}}\right]\right\}e^{-izx_{tm}}\,dz,$$

$$I_2=\int_{-T_t}^{T_t} e^{-\frac{z^2}{2}}\left[1+\sum_{\nu=1}^{r-2}\frac{P_\nu(iz)}{t^{\frac{\nu}{2}}}\right]e^{-izx_{tm}}\,dz,$$

$$I_3=\int_{T_t\leqslant|z|\leqslant\pi\bar{\sigma}\sqrt{t}} f_t(z)\,e^{-izx_{tm}}\,dz$$

и $T_t=\bar{\Delta}_t\bar{\sigma}\sqrt{t}$.

Воспользовавшись леммой 1, находим, что

$$I_1=o\left(\frac{1}{t^{\frac{r-2}{2}}}\right). \qquad (41)$$

Далее

$$I_2=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\left[1+\sum_{\nu=1}^{r-2}\frac{P_\nu(iz)}{t^{\frac{\nu}{2}}}\right]e^{-izx_{tm}}\,dz+o\left(\frac{1}{t^{\frac{r-2}{2}}}\right)=$$
$$=\sqrt{2\pi}\left[e^{-\frac{x_{tm}^2}{2}}+\sum_{\nu=1}^{r-2}\frac{P_\nu(-\varphi(x_{tm}))}{t^{\frac{\nu}{2}}}\right]+o\left(\frac{1}{t^{\frac{r-2}{2}}}\right). \qquad (42)$$

Осталось оценить интеграл I_3. Чтоб оценить $\bar{f}_t(z)$ для $z\in(\bar{\Delta}_t, \pi]$, вернемся к выражению

$$\psi(s;\ z)=\frac{1-f(s)}{s\left(1-e^{iz}f(s)\right)}$$

и покажем, что оно является преобразованием Лапласа от функции $\lambda_1(t;\ z)$, где $\lambda_1(t;\ z)$ — функция ограниченного изменения и $\lambda_1(t;\ z)=o\left(t^{-(r-1)}\right)$ при $t\to\infty$. Имеем

$$\frac{1-f(s)}{1-e^{iz}f(s)}=\frac{\frac{1-f(s)}{s}\cdot\frac{s}{(1+s)^2}}{[1-e^{iz}]\cdot\frac{1}{(1+s)^2}+e^{iz}\,\frac{1-f(s)}{s}\cdot\frac{s}{(1+s)^2}},$$

где $\frac{s}{(1+s)^2}$ является преобразованием Лапласа от функции $(1-t)e^{-t}$, а $\frac{1}{(1+s)^2}$ — преобразованием Лапласа от te^{-t}. Следовательно,

$$\frac{1-f(-iu)}{1-e^{-iz}f(-iu)}=\frac{\frac{1-f(-iu)}{-iu}\cdot\frac{-iu}{(1-iu)^2}\cdot\varphi_A(u)}{\left\{[1-e^{iz}]\,\frac{1}{(1-iu)^2}+e^{iz}\,\frac{1-f(-iu)}{-iu}\cdot\frac{-iu}{(1-iu)^2}\right\}\varphi_{2A}(u)}+$$

$$+[1-\varphi_A(u)]\,\frac{1-f(-iu)}{1-e^{iz}f(-iu)\left[1-\varphi_{\frac{A}{2}}(u)\right]}=\varkappa_1(-iu;\ z)+\varkappa_2(-iu;\ z),\qquad(43)$$

где через $\varkappa_1(-iu;\ z)$ и $\varkappa_2(-iu;\ z)$ обозначены соответственно первое и второе слагаемые правой части равенства (43). В доказательстве леммы 4 видели, что $\varkappa_2(-iu;\ z)$ при любом z является преобразованием Фурье—Стилтьеса от функции ограниченного изменения. Далее, $\varkappa_1(-iu;\ z)$ является отношением двух функций, каждая из которых является преобразованием Фурье от функции из класса L_1 и обращается в нуль только в точках, лежащих внутри области, в которой обращается в нуль функция, стоящая в числителе. Мы можем теперь сослаться на теорию Винера (см. [12], леммы 6_{10}, 6_{16}, 6_{18}) и утверждать, что $\varkappa_1(-iu;\ z)$ является преобразованием Фурье функции из класса L_1.

Далее, дословно повторяя рассуждения леммы 4, получаем, что при всех $z\in(\bar{\Delta}_t, \pi]$

$$\frac{1-f(s)}{1-e^{iz}f(s)}=\int_0^\infty e^{-st}\,d\lambda_1(t;\ z),$$

где $\lambda_1(t;\ z)$ — функция ограниченного изменения, стремящаяся к нулю при $t\to\infty$. Следовательно,

$$\psi(s;\ z)=\int_0^\infty e^{-st}\lambda_1(t;\ z)\,dt.\qquad(44)$$

Теперь, вспомнив, что $\psi_s^{(r-1)}(s;\ z)$ является преобразованием Лапласа от $t^{r-1}\lambda_1(t;\ z)$, применим к $\psi_s^{(r-1)}(s;\ z)$ следующую теорему (см. [16], стр. 38).

Теорема. *Условие*

$$\sup_{\sigma>\gamma}\int_{-\infty}^{\infty}|f^*(\sigma+i\tau)|^2\,d\tau<\infty\qquad(45)$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \gamma$ *функция* $f^*(s)$ *была трансформацией Лапласа от функции* $f(t)$, *для которой*

$$\int_0^\infty |f(t)|^2 e^{-2\gamma t}\, dt < \infty.$$

При всех $z \in [\bar{\Delta}_t, \pi]$ и фиксированном t аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$ функция $\psi_s^{(r-1)}(s;\, z)$ удовлетворяет условию (45) при $\gamma = 0$. Следовательно,

$$\int_0^\infty |t^{r-1} \lambda_1(t;\, z)|^2 < \infty.$$

Отсюда, вспоминая, что $\lambda_1(t;\, z)$ является функцией ограниченного изменения, получаем, что при достаточно больших t и $z \in (\bar{\Delta}_t, \pi)]$

$$|\lambda_1(t;\, z)| = o\left(\frac{1}{t^{r-1}}\right). \tag{46}$$

Согласно (9), (44) и (46) окончательно имеем

$$I_3 = o\left(\frac{1}{t^{\frac{r-2}{2}}}\right). \tag{47}$$

С другой стороны, из соотношений (40)—(42) и (47) следует утверждение теоремы 1.

Теоремы 2 и 3 доказываются с помощью леммы 1 и оценки для $|f_t(z)|$ в интервале $z \in (\bar{\Delta}_t, \pi]$ совершенно так же, как соответствующие предложения для независимых случайных величин (см., напр., [2]).

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
18.IV.1969

Литература

1. W. Feller, Fluctuation theory of recurrent events, Trans. Amer. Math. Soc., 67 (1949), 98—119.
2. Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1949.
3. L. Takacs, On a probability theorem arising in the theory of counters, Proc. Camb. Phil. Soc., 52 (1956), 488—498.
4. W. L. Smith, Renewal theory and its ramifications, J. Roy. Stat. Soc., Ser. B., 20, 2 (1958), 243—302.
5. А. Алешкявичене, Локальная предельная теорема для рекуррентных событий, Лит. матем. сб., V, № 3 (1965), 5—12.
6. А. Алешкявичене, Асимптотическое разложение для распределения числа появлений рекуррентного события, Лит. матем. сб., VI, № 1 (1966), 5—14; Письмо в редакцию, Лит. матем. сб., VII, № 1 (1967), 363.
7. D. B. Widder, The Laplase Transform, Princeton University Press.
8. W. L. Smith, Asymptotic Renewal Theorems, Proc. Roy. Soc. Edinb., A., 64 (1954), 9—48.
9. W. L. Smith, On the cumulants of renewal processes, Biometrica, 46, 1—2 (1959), 1—29.
10. А. Алешкявичене, Центральная предельная теорема для сумм процессов восстановления, Лит. матем. сб., VIII, № 4 (1968), 617—631.

11. А. Алешкявичене, Вычисление моментов и семиинвариантов дискретного процесса восстановления, Лит. матем. сб., IX, № 3 (1969), 441—454.
12. Н. Винер, Интеграл Фурье и некоторые его приложения, Физматгиз, Москва, 1963.
13. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, Независимые и стационарно связанные величины, Москва, 1965.
14. Д. Р. Кокс, В. Л. Смит, Теория восстановлений, Москва, 1967.
15. И. Г. Араманович, Р. С. Гутер, Л. А. Люстерник и др. Математический анализ, дифференцирование и интегрирование, Москва, 1961.
16. В. А. Диткин и А. П. Прудников. Интегральные преобразования и операционное исчисление, Москва, 1961.
17. Е. Титчмарш, Теория функций, М.—Л., 1951.

ATSTATYMO PROCESŲ ASIMPTOTINIAI IŠDĖSTYMAI

A. Aleškevičienė

(*Reziumė*)

Sakykime, turime seką ξ_l, $l=1, 2, \ldots$, nepriklausomų neneigiamų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių su pasiskirstymo funkcija $F(x)$ ir tenkinančių sąlygą

$$\overline{\lim_{z\to\infty}}\left|\int\limits_{0-}^{\infty} e^{izx}\,dF(x)\right|<1.$$

Toliau žymėsime

$$\mu_r=\int\limits_0^\infty x^r\,dF(x),\quad \sigma^2=\mu_2-\mu_1^2,\quad S_0=0,\quad S_m=\sum_{l=1}^m \xi_l,\quad m=1, 2, \ldots,$$

$$N_t=\max\{m : S_m<t\},\quad t\in[0,\ \infty).$$

Šiame darbe gauti funkcijų $F_t(x)=\mathbf{P}\left\{\frac{N_t-\mathbf{M}N_t}{\sigma\sqrt{t}}<x\mu_1^{\frac{3}{2}}\right\}$ ir $\mathbf{P}\{N_t=m\}$ asimptotiniai išdėstymai $\frac{1}{\sqrt{t}}$ laipsniais.

ASYMPTOTIC EXPANSIONS FOR RENEWAL PROCESSES

A. Aleškevičienė

(*Summary*)

Let ξ_l, $l=1, 2, \ldots$, be a sequence of independent nonnegative equally distributed random variables with distribution function $F(x)$ satisfying the condition

$$\overline{\lim_{z\to\infty}}\left|\int\limits_{0-}^{\infty} e^{izx}\,dF(x)\right|<1.$$

Let denote

$$\mu_r=\int\limits_0^\infty x^r\,dF(x),\quad \sigma^2=\mu_2-\mu_1^2,\quad S_0=0,\quad S_m=\sum_{l=1}^m \xi_l,\quad m=1, 2, \ldots,$$

$$N_t=\max\{m : S_m<t\},\quad t\in[0,\ \infty).$$

The asymptotic expansions in powers of $\frac{1}{\sqrt{t}}$ for the functions

$$F_t(x)=\mathbf{P}\left\{\frac{N_t-\mathbf{M}N_t}{\sigma\sqrt{t}}<\mu_1^{\frac{3}{2}}x\right\}$$

and $\mathbf{P}\{N_t=m\}$ are obtained.