IX LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 3
1969

УДК–513

О ПОВЕРХНОСТЯХ БИЛИНЕЙНО-МЕТРИЧЕСКОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Л. Стиклаките

Обобщенным билинейно-метрическим проективным пространством Π_n называется проективное пространство P_n с заданной невырожденной корреляцией, определенной тензором $H_{\alpha\beta}$ $(H_{\alpha\beta} \neq H_{\beta\alpha})$.

В работе [4] раньше рассматривались некоторые вопросы теории гиперповерхностей билинейно-метрического проективного пространства, а в этой статье строится теория нормализации m-ных поверхностей [пространства π_n.

§ 1. Поверхность билинейно-метрического проективного пространства

Инфинитезимальное перемещение репера $\{A_\alpha\}$ n-мерного проективного пространства P_n имеет вид:

$$\begin{gathered} dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta, \\ (\alpha, \beta, \gamma, \ldots = 0, 1, \ldots, n, \\ I, J, K, \ldots = 1, \ldots, n, \\ a, b, c, d, \ldots = 1, \ldots, m, \\ i, j, k, l, \ldots = m+1, \ldots, n), \end{gathered} \tag{1}$$

где ω_α^β линейные дифференциальные формы, удовлетворяющие структурным уравнениям проективного пространства:

$$D\omega_\alpha^\beta = [\omega_\alpha^\gamma, \ \omega_\gamma^\beta].$$

Корреляцию в проективном пространстве P_n определим тензором $H_{\alpha\beta}$, полагая:

$$H_{\alpha\beta} = (A_\alpha, \ A_\beta), \tag{2}$$

компоненты которого являются решениями следующих дифференциальных уравнений:

$$dH_{\alpha\beta} - H_{\gamma\beta}\,\omega_\alpha^\gamma - H_{\alpha\gamma}\,\omega_\beta^\gamma = 0. \tag{3}$$

Поверхность в билинейно-метрическом проективном пространстве задается дифференциальными уравнениями

$$\omega^I = \Lambda_a^I \vartheta^a, \tag{4}$$

где ϑ^a линейно независимые пфаффовые формы, имеющие структуру:

$$D\vartheta^a=[\vartheta^b,\ \vartheta^a_b],$$
$$D\vartheta^a_b-[\vartheta^c_b,\ \vartheta^a_c]=[\vartheta^c,\ \vartheta^a_{bc}],$$
$$D\vartheta^a_{bc}-[\vartheta^d_{bc},\ \vartheta^a_d]+[\vartheta^a_{dc},\ \vartheta^d_b]+[\vartheta^a_{bd},\ \vartheta^d_c]=[\vartheta^d,\ \vartheta^a_{bcd}], \tag{5}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

причем

$$\vartheta^a_{[bc]}=0,\quad \vartheta^a_{b[cd]}=0,\ \dots$$

Продолжение системы (4) дает:

$$d\Lambda^I_a-\Lambda^I_b\vartheta^b_a-\Lambda^I_a\omega^0_0+\Lambda^J_a\omega^I_J=\Lambda^I_{ab}\vartheta^b,$$
$$d\Lambda^I_{ab}-\Lambda^I_{ac}\vartheta^c_b-\Lambda^I_{cb}\vartheta^c_a+\Lambda^J_{ab}\omega^I_J-\Lambda^I_{ab}\omega^0_0-\Lambda^I_c\vartheta^c_{ab}-$$
$$-\Lambda^I_a\Lambda^J_b\omega^0_J-\Lambda^J_a\Lambda^I_b\omega^0_J=\Lambda^I_{abc}\vartheta^c, \tag{6}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

где

$$\Lambda^I_{[ab]}=0,\quad \Lambda^I_{a[bc]}=0,\ \dots$$

Точки A_0, $B_a=\Lambda^I_aA_I$ определяют касательную плоскость поверхности Π_m, проходящую через A_0. Если $H_{00}\neq 0$, то тензор

$$\hat H_{ab}=\hat H_{IJ}\Lambda^I_a\Lambda^J_b, \tag{7}$$

где

$$\hat H_{IJ}=H_{IJ}-\frac{H_{Io}H_{oJ}}{H_{oo}}\ , \tag{8}$$

будем называть метрическим тензором на поверхности π_m. Компоненты тензоров $\hat H_{ab}$ и $\hat H_{IJ}$ являются решениями следующих систем:

$$d\hat H_{IJ}-\hat H_{KJ}\omega^K_I-\hat H_{JK}\omega^K_I=\hat H_{IJ,a}\vartheta^a,$$
$$d\hat H_{ab}-\hat H_{cb}\vartheta^c_a-\hat H_{ac}\vartheta^c_b-2\hat H_{ab}\omega^o_o=\hat H_{abc}\vartheta^c, \tag{9}$$

где

$$\hat H_{IJ,\,a}=\left[\frac{(H_{KO}+H_{OK})H_{IO}H_{OJ}}{H^2_{00}}-\frac{H_{IK}H_{OJ}+H_{JK}H_{IO}}{H_{00}}\right]\Lambda^K_a,$$
$$\hat H_{abc}=\hat H_{IJ,c}\Lambda^I_a\Lambda^J_b+\hat H_{IJ}\Lambda^I_{ac}\Lambda^J_b+\hat H_{IJ}\Lambda^I_a\Lambda^J_{bc}.$$

Продолжая систему (9) получим и

$$d\hat H_{abc}-\hat H_{abd}\vartheta^d_c-\hat H_{dbc}\vartheta^d_a-\hat H_{adc}\vartheta^d_b-2\hat H_{abc}\omega^o_o-$$
$$-\hat H_{db}\vartheta^d_{ac}-\hat H_{ad}\vartheta^d_{bc}-2\hat H_{ab}\Lambda^I_c\omega^o_I=\hat H_{abcd}\vartheta^d. \tag{10}$$

Если $\det\|\hat H_{IJ}\|\neq 0$, то величины $\hat H^{IJ}$, $\hat H^{ab}$, определенные равенствами

$$\hat H_{IJ}\hat H^{JK}=\delta^K_I,\quad \hat H_{JI}\hat H^{KJ}=\delta^K_I,\quad \hat H_{ab}\hat H^{cb}=\delta^c_a,\quad \hat H^{bc}\hat H^{bc}=\delta^c_a, \tag{11}$$

являются решениями систем:

$$d\hat H^{IJ}+\hat H^{KJ}\omega^I_K+\hat H^{JK}\omega^I_K=\hat H^{IJ}_a\vartheta^a,$$
$$d\hat H^{ab}+\hat H^{cb}\vartheta^a_c+\hat H^{ac}\vartheta^b_c+2\hat H^{ab}\omega^o_o=\hat H^{ab}_c\vartheta^c,$$

где

$$\hat{H}_a^{IJ} = -\hat{H}^{IP}\hat{H}^{QJ}\hat{H}_{PQa}, \quad \hat{H}_c^{ab} = -\hat{H}^{ad}\hat{H}^{gb}\hat{H}_{dgc}.$$

Поверхность называется нормализованной в смысле А. П. Нордена [3], если каждой точке A_0 поверхности Π_m отнесены: подпространство Π_{n-m}, проходящее через A_0 и не имеющее больше ни одной общей точки с касательной плоскостью (нормаль первого рода), и Π_{m-1}, лежащее в касательной плоскости поверхности, но не проходящее через A_0 (нормаль второго рода). Так как $H_{\alpha\beta} \neq \pm H_{\beta\alpha}$, то выделяются три различные нормализации.

В дальнейшем нам понадобиться следующее определение:

Матрица

$$\begin{Vmatrix} u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0n} \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{n0} & u_{n1} & & u_{nn} \end{Vmatrix}$$

допустима, если существует система аналитических точек $F_0, F_1, \ldots, F_n$, для которой эта матрица является матрицей Грамма, т. е. $(F_\alpha, F_\beta,) = u_{\alpha\beta}$.

§ 2. Левосопряженная нормализация поверхности

Нормаль первого рода $^*\Pi_{n-m}$ поверхности Π_{n-m} определим точкой A_0 и точками K_i $(K_i \neq A_0)$:

$$K_i = K_i^0 A_0 + K_i^I A_I. \tag{12}$$

Из условия инвариантности нормали $^*u_{n-m}$:

$$\partial K_i = {}'\varphi_i^j K_j /_{\vartheta^a = 0},$$

где $'\varphi_i^j$ некоторые пфаффовые формы с структурой

$$D'\varphi_i^j - ['\varphi_i^k, \ '\varphi_k^j] = [\vartheta^a, \ '\varphi_{ia}^j],$$

следует, что функции K_i^0, K_i^I являются решениями следующих дифференциальных уравнений:

$$dK_i^0 + K_i^J\omega_J^0 - K_j^{0\prime}\varphi_i^j + K_i^0\omega_0^0 = K_{ia}^0\vartheta^a,$$

$$dK_i^I + K_i^J\omega_J^I - {}'\varphi_i^j K_j^I = K_{ia}^I\vartheta^a.$$

Нормаль$^*\Pi_{n-m}$ будем называть левой нормалью первого рода, если точки K_i связаны с точками касательной плоскости условиями левой сопряженности, т. е.

$$\begin{aligned} &(K_i, \ A_0) = 0, \\ &(K_i, \ B_a) = 0, \\ &(K_i, \ K_j) = A_{ij}, \end{aligned} \tag{13}$$

где A_{ij} компоненты невырожденного, несимметрического тензора, являющиеся решениями следующих дифференциальнях уравнений:

$$dA_{ij} - A_{ik}{}'\varphi_j^k - A_{kj}{}'\varphi_i^k = A_{ija}\vartheta^a. \tag{14}$$

Так как $H_{00}\neq 0$, то система (13) эквивалентна системе

$$
\begin{aligned}
&K_i^0 H_{00}+K_i^I H_{J0}=0,\\
&\hat{H}_{IJ}K_i^I\Lambda_a^J=0,\\
&\hat{H}_{IJ}K_i^I K_j^J=A_{ij},
\end{aligned}
\tag{15}
$$

откуда однозначно определим функции K_i^0 и K_i^I.

Так как левая нормаль второго рода $^*\Pi_{m-1}$ поверхности Π_m лежит в касательной плоскости точки A_0, но не проходит через эту точку, то прямые (A_0, B_a) пересекаются с нормалью второго рода в точках

$$E_a=B_a-\nu_a A_0, \tag{16}$$

которые будем называть опорными точками нормали второго рода. Из условия инвариантности этой нормали

$$\partial E_a=\Theta_a^b E_b,$$

где

$$\partial E_a=dE_a/_{\vartheta^a=0},$$

а

$$\Theta_a^b=\vartheta_a^b+\delta_a^b\,\omega_0^0$$

инвариантные линейные формы, следует, что компоненты объекта ν_a, называемого нормализатором, являются решениями дифференциальных уравнений;

$$d\nu_a-\nu_b\,\vartheta_a^b-\Lambda_a^I\,\omega_I^o=\nu_{ab}\,\vartheta^b. \tag{17}$$

Оказывается, что функции

$$\nu_a=\Lambda_{ab}^I\;{}^*\Lambda_I^b-\frac{1}{2}\,\hat{H}^{cb}\hat{H}_{cba}, \tag{18}$$

где

$${}^*\Lambda_I^b=\hat{H}^{bc}\hat{H}_{IJ}\Lambda_c^J,$$

удовлетворяют системе (17), т. е. образуют нормализатор.

Независимые между собой аналитические точки A_0, E_a, K_i примем за вершины нового репера в билинейно-метрическом проективном пространстве Π_n. Раскладывая в новом репере пфаффовые производные от этих точек, имеющие вид:

$$
\begin{aligned}
&B_a=\Lambda_a^I A_I,\\
&E_{ab}=(\Lambda_{ab}^I-\nu_a\Lambda_b^I)\,A_I-\nu_{ab}\,A_0,\\
&K_{ia}=K_{ia}^0\,A_0+(K_i^0\,\Lambda_a^I+K_{ia}^I)\,A_I,
\end{aligned}
$$

получим деривационные уравнения:

$$
\begin{aligned}
&B_a=E_a+\nu_a\,A_0,\\
&E_{ab}=\Gamma_{ab}^c\,E_c+\gamma_{ab}\,A_0+\gamma_{ab}^i\,K_i,\\
&K_{ia}=\gamma_{ia}^b\,E_b+\gamma_{ia}\,A_0+P_{ia}^j\,K_j,
\end{aligned}
\tag{19}
$$

где

$$\Gamma^c_{ab} = \Lambda^I_{ab} {}^*\Lambda^c_I - \nu_a \delta^c_b,$$

$$\gamma_{ab} = \frac{(\Lambda^I_{ab} - \nu_a \Lambda^I_b)(H_{I0} - {}^*\Lambda^c_I \Lambda^J_c H_{J0})}{H_{00}} + {}^*\Lambda^c_I \Lambda^I_{ab} \nu_c - \nu_a \nu_b - \nu_{ab},$$

$$\gamma^i_{ac} = A^{ij} \hat{H}_{JI} K^J_j \Lambda^I_{ab},$$

$$\gamma^b_{ia} = \delta^b_a K^0_i + {}^*\Lambda^J_I K^I_{ia},$$

$$\gamma_{ia} = K^0_{ia} + \frac{(K^0_i \Lambda^I_a + K^0_{ia})[H_{I0} - {}^*\Lambda^c_I(\Lambda^K_c H_{K0} - \nu_c H_{00})]}{H_{00}},$$

$$P^j_{ia} = A^{jl} \hat{H}_{IJ} K^I_l K^J_{ia},$$

а

$$A_{ij} A^{jk} = \delta^k_i, \quad A_{ji} A^{kj} = \delta^k_i, \quad {}^*\Lambda^a_I \Lambda^I_c = \delta^a_c.$$

Величины γ_{ab}, γ^i_{ab}, γ^b_{ia}, γ_{ia} на поверхности образуют тензоры, а с другой стороны, системы величин

$$\bar{\Gamma}^c_{ab} = \Lambda^I_{ab} {}^*\Lambda^c_I - \nu_a \delta^c_b - \nu_b \delta^c_a,$$

$$P^j_{ia} = A^{jl} \hat{H}_{IJ} K^I_l K^J_{ia} \tag{20}$$

объекты аффинной связности, которые будем называть объектами левой аффинной связности.

Пфаффовые формы левой аффинной связности, имеющие вид:

$${}^*\psi^a = \vartheta^a,$$

$${}^*\psi^b_a = \vartheta^b_a + \bar{\Gamma}^b_{ac} \vartheta^c,$$

$${}^*\psi^j_i = {}'\varphi^j_i + P^j_{ia} \vartheta^a,$$

связаны структурными уравнениями

$$D\,{}^*\psi^a = [{}^*\psi^b, \ {}^*\psi^a_b],$$

$$D\,{}^*\psi^b_a - [{}^*\psi^c_a, \ {}^*\psi^b_c] = {}^*R^b_{acd}[{}^*\psi^c, \ {}^*\psi^d],$$

$$D\,{}^*\psi^j_i - [{}^*\psi^k_i, \ {}^*\psi^j_k] = {}^*R^j_{icd}[{}^*\psi^c, \ {}^*\psi^d],$$

где величины

$${}^*R^b_{acd} = -\bar{\Gamma}^b_{a[cd]} - \bar{\Gamma}^l_{a[c} \bar{\Gamma}^b_{|l|d]},$$

$${}^*R^j_{icd} = -P^j_{i[cd]} - P^k_{i[c} P^j_{|k|d]} \tag{21}$$

являются компонентами тензоров левой кривизны.

Если через ${}^*D_a A_0$, ${}^*D_b E_a$, ${}^*D_a K_i$ обозначим смешанные ковариантные производные от вершин репера относительно левой связности, то левые деривационные уравнения сможем представить в таком виде:

$${}^*D_a A_0 = E_a + \nu_a A_0,$$

$${}^*D_b E_a = \nu_b E_a + \gamma_{ab} A_0 + \gamma^i_{ab} K_i, \tag{22}$$

$${}^*D_a K_i = \gamma^c_{ia} E_c + \gamma_{ia} A_0.$$

При помощи повторного смешанного ковариантного дифференцирования и альтернации по индексам дифференцирования, а также с учетом соотношений:

$$
\begin{aligned}
&{}^*D_{[b}{}^*D_{a]}A_0={}^*S^c_{ba}{}^*D_cA_0,\\
&{}^*D_{[c}{}^*D_{b]}E_a={}^*R^d_{abc}E_d+{}^*S^d_{bc}{}^*D_dE_a,\\
&{}^*D_{[b}{}^*D_{a]}K_i={}^*R^j_{iab}K_j+{}^*S^c_{ab}{}^*D_cK_i,
\end{aligned}
\tag{23}
$$

где ${}^*S^c_{ab}$ – тензор левого кручения, получим условия совместности левых деривационных уравнений:

$$
\begin{aligned}
&{}^*S^c_{ab}=0,\ \gamma^i_{[ab]}=0,\ {}^*D_{[b}\nu_{a]}+\gamma_{[ab]}=0,\\
&{}^*R^d_{abc}=\gamma_{a[b}\delta^d_{c]}-\gamma_{[bc]}\delta^d_a+\gamma^i_{a[b}\gamma^d_{|i|c]},\\
&{}^*D_{[c}\gamma_{|a|b]}+\gamma^i_{a[b}\gamma_{|i|c]}=0,\\
&{}^*D_{[c}\gamma^i_{|a|b]}+\nu_{[b}\gamma^i_{|a|c]}=0,\\
&{}^*D_{[b}\gamma^c_{|i|a]}+\gamma^c_{i[a}\nu_{b]}+\delta_{i[a}\delta^c_{b]}=0,\\
&{}^*D_{[b}\gamma_{|i|a]}+\gamma_{i[a}\nu_{b]}+\gamma^c_{i[a}\gamma_{|c|b]}=0,\\
&{}^*R^j_{iab}=\gamma^c_{i[a}\gamma^j_{|c|b]}.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Компоненты тензора $\hat{H}_{ab}$ строятся из компонент псевдотензора

$$
\begin{aligned}
&h_{uv}\ (u,v,\ldots=0,1,\ldots,m):\\
&h_{00}=H_{00},\\
&h_{0a}=(A_0,E_a),\\
&h_{a0}=(E_a,A_0),\\
&h_{ab}=(E_a,E_b),
\end{aligned}
$$

таким образом:

$$
\hat{H}_{ab}=h_{ab}-\frac{h_{a0}h_{0b}}{h_{00}}\ .
\tag{25}
$$

Величины

$$
\begin{aligned}
&k_i=(A_0,K_i),\\
&k_{ai}=(E_a,K_i),
\end{aligned}
\tag{26}
$$

в случае левосопряженной нормализации, не равны нулю. k_i мы будем называть основным левым ковектором, а k_{ai} – основным левым тензором поверхности.

Неголономные смешанные ковариантные производные от величин h_{uv}, k_i, k_{ai} относительно левой аффинной связности имеют такой вид:

$$
\begin{aligned}
&{}^*D_ah_{00}=h_{a0}+h_{0a}+2\nu_ah_{00},\\
&{}^*D_ah_{0b}=h_{ab}+2\nu_ah_{0b}+\gamma_{ba}h_{00}+\gamma^j_{ba}k_j,\\
&{}^*D_ch_{ab}=2\nu_ch_{ab}+\gamma_{ac}h_{0b}+\gamma_{bc}h_{a0}+\gamma^i_{bc}k_{ai},\\
&{}^*D_ak_i=k_{ai}+\nu_ak_i+\gamma^b_{ia}h_{0b}+\gamma_{ia}h_{00},\\
&{}^*D_ak_{bi}=\nu_ak_{bi}+\gamma_{ba}k_i+\gamma^j_{ba}A_{ji}+\gamma^c_{ia}h_{bc}+\gamma_{ia}h_{b0}.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Из уравнений (18) и (20) следует:

$$\nu_a = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{2}\hat{H}^{cb}\hat{H}_{cba} - \bar{\Gamma}^b_{ab}\right), \tag{28}$$

а из (25) и (27) видим, что $\hat{H}_{ab}$ и ковариантные производные от h_{uv}, k_i, k_{ai} выражаются через величины h_{uv}, k_i, k_{ai}, γ_{ab}, γ^i_{ab}, γ^b_{ia}, γ_{ia} и A_{ij}. Отсюда следует теорема.

Теорема 1. *Если в некоторой области точки A_0 m-мерного дифференцируемого многообразия заданы тензоры γ_{ab}, γ^i_{ab}, γ^b_{ia}, γ_{ia}, A_{ij}, k_{ai}, псевдотензор h_{uv}, ковектор k_i и обьекты аффинной связности $\bar{\Gamma}^c_{ab}$, P^j_{ia} без кручения, связаны уравнениями* (24), (25), (27), (28), *то эти величины в n-мернот билинейно-метрическом проективном пространстве определяют m-мерную поверхность с точностью до проективного преобразования тогда и только тогда, когда матрица*

$$\left\| \begin{matrix} h_{00} & h_{01} & \dots & h_{0m} & k_{m+1} & \dots & k_n \\ h_{10} & h_{11} & \dots & h_{1m} & k_{1m+1} & \dots & k_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{m0} & h_{m1} & \dots & h_{mm} & k_{mm+1} & \dots & k_{mn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A_{m+1\,m+1} & \dots & A_{m+1\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A_{nm+1} & \dots & A_{nn} \end{matrix} \right\|$$

допустима.

§ 3. Сопряженная нормализация поверхности

Нормаль первого рода Π_{n-m} определим точками A_0 и M_i:

$$M_i = M^0_i A_0 + M^I_i A_I, \tag{29}$$

где M^0_i, M^I_i — неизвестные функции, удовлетворяющие следующим дифференциальным уравнениям:

$$dM^0_i + M^0_i\omega^0_0 - M^0_j\varphi^j_i + M^I_i\omega^0_I = M^0_{ia}\vartheta^a,$$

$$dM^I_i - M^I_j\varphi^j_i + M^J_i\omega^I_J = M^I_{ia}\vartheta^a,$$

а φ^j_i-пфаффовые формы, связанные структурными уравнениями:

$$D\varphi^j_i - [\varphi^k_i,\ \varphi^j_k] = [\vartheta^a,\ \varphi^j_{ia}].$$

Точки M_i связаны с точками касательной плоскости условиями сопряженности:

$$M^0_i G_{00} + M^I_i G_{0I} = 0,$$

$$\hat{G}_{IJ} M^I_i \Lambda^J_a = 0, \tag{30}$$

$$\hat{G}_{IJ} D^I_i M^J_j = B_{ij},$$

где

$$G_{\alpha\beta} = H_{(\alpha\beta)},\quad \hat{G}_{IJ} = G_{IJ} - \frac{G_{I0}G_{0J}}{G_{00}},$$

а B_{ij} — компоненты невырожденного тензора, удовлетворяющего системе уравнений:

$$dB_{ij}-B_{kj}\varphi_i^k-B_{ik}\varphi_j^k=B_{ija}\vartheta^a.$$

Так как $G_{00}\neq 0$, то из системы (30) однозначно определяются функции M_i^0, M_i^J.

Нормаль второго рода определим опорными точками

$$F_a=B_a-m_aA_0, \tag{31}$$

где

$$m_a=\Lambda^I_{ab}\Lambda^b_I-\frac{1}{2}\hat{G}^{cb}\hat{G}_{cba}, \tag{32}$$

а

$$\hat{G}_{ab}=\hat{G}_{IJ}\Lambda^I_a\Lambda^J_b,\ \hat{G}_{ab}\hat{G}^{ac}=\delta^c_b,\ \hat{G}_{ab}\hat{G}^{cb}=\delta^c_a,\ \Lambda^b_I=\hat{G}_{IJ}\hat{G}^{bc}\Lambda^J_c,$$

и $\hat{G}_{bca}$ — пфаффовая производная от $\hat{G}_{bc}$, т. е. m_a является нормализатором, так как компоненты этого объекта удовлетворяют дифференциальным уравнениям (17).

В пространстве Π_n имеем $(n+1)$-ну независимую точку, которые примем за вершины нового сопровождающего репера $\{A_0, F_a, M_i\}$ поверхности. Разложение

$$\begin{aligned}
&B_a=F_a+m_aA_0,\\
&F_{ab}=G^c_{ab}F_c+g_{ab}A_0+g^i_{ab}M_i,\\
&M_{ia}=g^c_{ia}F_c+g_{ia}A_0+Q^j_{ia}M_j,
\end{aligned}\tag{33}$$

где

$$G^c_{ab}=\Lambda^I_{ab}\Lambda^c_I-m_a\delta^c_b,$$

$$g_{ab}=\frac{(\Lambda^I_{ab}-m_a\Lambda^I_b)(G_{I0}-\Lambda^c_I\Lambda^J_cG_{J0})}{G_{00}}+\Lambda^c_I\Lambda^I_{ab}m_c-m_am_b-m_{ab},$$

$$g^i_{ab}=B^{ij}\hat{G}_{IJ}\Lambda^I_{ab}M^J_j,$$

$$g^c_{ia}=\delta^c_aM^0_i+\Lambda^c_IM^I_{ia},$$

$$g_{ia}=M^0_{ia}+\frac{(M^0_i\Lambda^I_a+M^I_{ia})[G_{I0}-\Lambda^c_I(\Lambda^K_cG_{K0}-m_cG_{00})]}{G_{00}},$$

$$Q^j_{ia}=B^{jk}\hat{G}_{IJ}M^I_kM^J_{ia},\ B_{ij}B^{jk}=\delta^k_i,$$

пфаффовых производных от вершин нового репера B_a, F_{ab}, M_{ia} через вершины репера $\{A_0, F_a, M_i\}$ являются деривационными уравнениями поверхности. Оказывается, что

$$Q^j_{ia}=B^{jk}\hat{G}_{IJ}M^I_kM^J_{ia}$$

и

$$\bar{G}^c_{ab}=G^c_{ab}-\delta^c_am_b \tag{34}$$

образуют объекты аффинной связности, а остальные коэффициенты разложения — тензоры. Условия совместности деривационных уравнений имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&S^c_{ab}=0,\ g^i_{[ab]}=0,\ D_{[b}m_{a]}+g_{[ab]}=0,\\
&R^d_{abc}=g_{a[b}\delta^d_{c]}-g_{[bc]}\delta^d_a+g^i_{a[b}g^d_{|i|c]},\\
&D_{[c}g_{|a|b]}+g^i_{a[b}g_{|i|c]}=0,\\
&D_{[c}g^i_{|a|b]}+m_{[b}g^i_{|a|c]}=0,\\
&D_{[b}g^c_{|i|a]}+g^c_{i[a}m_{b]}+g_{i[a}\delta^c_{b]}=0,\\
&D_{[b}g_{|i|a]}+g_{i[a}m_{b]}+g^c_{i[a}g_{|c|b]}=0,\\
&R^j_{iab}=g^c_{i[a}g^j_{|c|b]},
\end{aligned}
\tag{35}
$$

где R^d_{abc}, R^i_{jab} — тензоры кривизны аффинной связности $\bar{G}^c_{ab}$, Q^j_{ia}, а S^c_{ab} — тензор кручения.

Так как в общем случае

$$
H_{\alpha\beta}=G_{\alpha\beta}+H_{[\alpha\beta]},
\tag{36}
$$

то величины, определенные формулами

$$
\begin{aligned}
&t_i=(A_a,\ M_i)=-(M_i,\ A_0),\\
&t_{ai}=(F_a,\ M_i)=-(M_i,\ F_a),
\end{aligned}
\tag{37}
$$

не равны нулю и являются тензорами. Тензор t_i будем называть основным ковектором, а t_{ai} — основным тензором поверхности.

Метрический тензор $\hat{G}_{ab}$ на поверхности можно выразить через компоненты псевдотензора z_{uv}, где

$$
\begin{aligned}
&z_{00}=G_{00},\\
&z_{a0}=z_{0a}=(A_0,\ F_a),\\
&z_{ab}=(F_a,\ F_b),
\end{aligned}
$$

следующим образом:

$$
\hat{G}_{ab}=z_{ab}-\frac{z_{a0}\,z_{0b}}{z_{00}}\ .
\tag{38}
$$

Неголономные смешанные производные от величины z_{uv}, t_i, t_{ai} имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&D_a z_{00}=2z_{00}m_a+z_{a0}+z_{0a},\\
&D_b z_{a0}=2z_{a0}m_b+g_{ab}z_{00}+g^i_{ab}t_i+z_{ab},\\
&D_c z_{ab}=2z_{ab}m_c+g_{ac}z_{0b}-g^i_{ac}t_{bi}+g_{bc}z_{a0}+g^i_{bc}t_{ai},\\
&D_a t_i=t_{ai}+m_a t_i+g^b_{ia}z_{0b}+g_{ia}z_{00},\\
&D_c t_{ai}=m_c t_{ai}+g_{ac}t_i+g^j_{ac}B_{ji}+g^b_{ic}z_{ab}+g_{ic}z_{a0}.
\end{aligned}
\tag{39}
$$

Из уравнений (32), (34) находим, что

$$
m_a=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{2}\hat{G}^{bc}\hat{G}_{bca}-\bar{G}^b_{ab}\ \right),
\tag{39'}
$$

а из (38) и (39) — что $\hat{G}_{ab}$ и ковариантные производные от z_{uv}, t_i, t_{ai} выражаются через величины z_{uv}, t_i, t_{ai}, g_{ab}, g^i_{ab}, g^b_{ia}, g_{ia}, B_{ij}. Отсюда следует

Теорема 2. *Если в некоторой области точки A_0 m-мерного дифференцируемого многообразия заданы тензоры g_{ab}, g^b_{ia}, g^i_{ab}, g_{ia}, B_{ij}, t_{ai}, ковектор t_i, псевдотензор z_{uv} и объекты аффинной связности без кручения, удовлетворяющие условиям* (35), (38), (39), (39′), *то эти величины определяют m-мерную поверхность в n-мерном билинейно-метрическом проективном пространстве Π_n с точностью до проективного преобразования тогда и только тогда, когда матрица*

$$\begin{Vmatrix} z_{00} & z_{01} & \ldots & z_{0m} & t_{m+1} & \ldots & t_n \\ z_{10} & z_{11} & \ldots & z_{1m} & t_{1m+1} & \ldots & t_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_{m0} & z_{m1} & \ldots & z_{mm} & t_{mm+1} & \ldots & t_{mn} \\ -t_{m+1} & -t_{m+1,1} & \ldots & -t_{m+1,m} & B_{m+1\,m+1} & \ldots & B_{m+1\,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -t_n & -t_{n1} & \ldots & -t_{nm} & B_{nm+1} & \ldots & B_{nn} \end{Vmatrix}$$

допустима.

§ 4. Правосопряженная нормализация поверхности

Нормаль первого рода Π^*_{n-m}, определенную точкой A_0 и точками

$$N_i = N_i^0 A_0 + N_i^I A_I, \tag{40}$$

удовлетворяющими условиям

$$dN_i^0 + N_i^0 \omega_0^0 - N_j^0 \varphi_i'^j + N_i^I \omega_I^0 = N_{ia}^I \vartheta^a,$$

$$dN_i^I - N_j^I \psi_i'^j + N_i^J \omega_J^I = N_{ia}^I \vartheta^a,$$

будем называть правой нормалью, если

$$\begin{aligned} &(A_0, N_i) = 0,\\ &(B_a, N_i) = 0,\\ &(N_i, N_j) = C_{ij}, \end{aligned} \tag{41}$$

где C_{ij} компоненты тензора, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям:

$$dC_{ij} - C_{kj}\varphi_i'^k - C_{ik}\varphi_j'^k = C_{ija}\vartheta^a,$$

а $\varphi_i'^j$ пфаффовые формы с структурой:

$$D\varphi_i'^j - [\varphi_i'^k, \varphi_k'^j] = [\vartheta^a, \varphi_{ia}'^j].$$

Система (41) эквивалентна системе

$$\begin{aligned} &N_i^0 H_{00} + N_i^I H_{0I} = 0,\\ &\hat{H}_{IJ} \Lambda_a^I N_i^J = 0,\\ &\hat{H}_{IJ} N_i^I N_i^J = C_{ij}, \end{aligned} \tag{42}$$

которая, при условии $H_{00} \neq 0$, определяют функции N_i^0, N_i^I.

Правая нормаль второго рода Π^*_{m-1} известна, если известны опорные точки

$$C_a = B_a - n_a A_0.$$

Компоненты объекта n_a, имеющие вид:

$$n_a = \Lambda^I_{ab}\Lambda^{*b}_I - \frac{1}{2}\hat{H}^{cb}\hat{H}_{cba}, \tag{43}$$

где

$$\Lambda^{*b}_I = \hat{H}^{cb}\hat{H}_{JI}\Lambda^J_c,$$

являются решениями дифференацильных уравнений:

$$dn_a - n_b\vartheta^b_a + \Lambda^I_a\omega^0_I = n_{ab}\vartheta^b,$$

т. е. образуют так называемый нормализатор.

Систему $(n+1)$ независимых между собой аналитических точек $\{A_0, C_a, N_i\}$ будем называть правым сопровождающим репером поверхности Π_m. Пфаффовые производные

$$B_a = \Lambda^I_a A_I,$$

$$C_{ab} = (\Lambda^I_{ab} - n_a\Lambda^I_b)A_I - n_{ab}A_0,$$

$$N_{ia} = N^0_{ia}A_0 + (N^0_i\Lambda^I_a + N^I_{ia})A_I,$$

при помощи соотношений

$$\begin{aligned} B_a &= C_a + n_a A_0,\\ C_{ab} &= L^c_{ab}C_c + l_{ab}A_0 + l^i_{ab}N_i,\\ N_{ia} &= l^c_{ia}C_c + l_{ia}A_0 + S^j_{ia}N_j, \end{aligned} \tag{44}$$

где

$$L^c_{ab} = \Lambda^{*c}_J\Lambda^J_{ab} - n_a\delta^c_b,$$

$$l_{ab} = (\Lambda^J_{ab} - n_a\Lambda^J_b)\left(\frac{H_{0J} - \Lambda^{*c}_J\Lambda^K_c H_{0K}}{H_{00}}\right) + \Lambda^J_{ab}\Lambda^{*c}_J n_c - n_a n_b - n_{ab},$$

$$l^i_{ab} = C^{ji}\hat{H}_{IJ}N^J_j\Lambda^I_{ab},$$

$$l^c_{ia} = \delta^c_a N^0_i + \Lambda^{*c}_J N^J_{ia},$$

$$l_{ia} = N^0_{ia} + (N^0_i\Lambda^J_a + N^J_{ia})\left(\frac{H_{0J} - \Lambda^{*b}_J\Lambda_b{}^K_b H_{0K}}{H_{00}} + n_b\Lambda^{*b}_J\right),$$

$$S^j_{ia} = C^{kj}\hat{H}_{IJ}N^J_k N^I_{ia},$$

$$\Lambda^{*b}_I\Lambda^I_a = \delta^b_a, \quad C_{ij}C^{jk} = \delta^k_i,$$

раскладывая через вершины сопровождающего репера, получим правые деривационные уравнения.

Величины l_{ab}, l^i_{ab}, l^c_{ia}, l_{ia} образуют тензоры, а S^j_{ia} и

$$\bar{L}^c_{ab} = L^c_{ab} - n_b\delta^c_a \tag{45}$$

— объекты правой аффинной связности. Построенные с их помощью формы

$$\psi^{*a} = \vartheta^a,$$

$$\psi^b_{*a} = \vartheta^b_a + \bar{L}^b_{ac}\vartheta^c,$$

$$\psi^{*j}_i = \varphi'^j_i + S^j_{ia}\vartheta^a$$

имеют следующую структуру:

$$D\psi^{*a}=[\psi^{*b},\ \psi_b^{*a}],$$

$$D\psi_a^{*b}-[\psi_a^{*c},\ \psi_c^{*b}]=R_{acd}^{*b}[\psi^{*c},\ \psi^{*d}],$$

$$D\psi_i^{*j}-[\psi_i^{*k},\ \psi_k^{*j}]=R_{icd}^{*j}[\psi^{*c},\ \psi^{*d}],$$

где величины

$$R_{acd}^{*b}=-\bar{L}_{a[cd]}^{b}-\bar{L}_{a[c}^{l}\bar{L}_{|l|d]}^{b},$$

$$R_{icd}^{*j}=S_{i[cd]}^{j}-S_{k[d}^{j}S_{|i|c]}^{k}$$

— тензоры правой кривизны. Таким образом они являются формами правой аффинной связности. Смешанные ковариантные производные относительно правой аффинной связности $D_a^*A_0$, $D_b^*C_a$, $D_a^*N_i$ имеют такой вид:

$$\begin{aligned}
&D_a^*A_0=C_a+n_aA_0,\\
&D_b^*C_a=n_bC_a+l_{ab}A_0+l_{ab}^iN_i,\\
&D_a^*N_i=l_{ia}^cC_c+l_{ia}A_0.
\end{aligned}\tag{46}$$

Условия совместности этих уравнений выражаются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
&S_{ab}^{*c}=0,\ l_{[ab]}^i=0,\ D_{[b}^*n_{a]}+l_{[ab]}=0,\\
&R_{abc}^{*d}=l_{a[b}\delta_{c]}^d-l_{[bc]}\delta_a^d+l_{a[b}^il_{|i|c]}^d,\\
&D_{c[}^*l_{|a|b]}+l_{a[b}^il_{|i|c]}=0,\\
&D_{[c}^*l_{|a|b]}^i+l_{[b}l_{|a|c]}^i=0,\\
&D_{[b}^*l_{|i|a]}^c+l_{i[a}^cn_{b]}+l_{i[a}\delta_{b]}^c=0,\\
&D_{[b}^*l_{|i|a]}+l_{i[a}n_{b]}+l_{i[a}^cl_{|c|b]}=0,\\
&R_{iab}^{*j}=l_{i[a}^cl_{|c|b]}^j,
\end{aligned}\tag{47}$$

где S_{ab}^{*c} — тензор правого кручения.

Компоненты тензора $\hat{H}_{ab}$ образуются из величин $\bar{h}_{uv}$, вида

$$\bar{h}_{00}=H_{00},$$

$$\bar{h}_{0a}=(A_0,\ C_a),$$

$$\bar{h}_{a0}=(C_a,\ A_0),$$

$$\bar{h}_{ab}=(C_a,\ C_b),$$

следующим образом:

$$\hat{H}_{ab}=\bar{h}_{ab}-\frac{\bar{h}_{a0}\bar{h}_{0b}}{\bar{h}_{00}}\ .\tag{48}$$

Ковектор

$$p_i=(N_i,\ A_0)\tag{49}$$

и тензор

$$p_{ia}=(N_i,\ C_a),\tag{50}$$

которые в случае правосопряженной нормализации не равны нулю, назовем соответственно основным правым ковектором и тензором. Величины $\bar{h}_{uv}$, p_i, p_{ia} удовлетворяют уравнениям, аналогичным (27). Можно сформулировать следующую теорему, аналогичную теореме 1.

Теорема 3. *Если в некоторой области точки A_0, m-мерного дифференцируемого многообразия заданы тензоры l_{ab}, l^i_{ab}, l^b_{ia}, l_{ia}, C_{ij}, p_{ia}, псевдотензор $\bar{h}_{uv}$, ковектор p_i и обьекты аффинной связности $\bar{L}^c_{ab}$, S^j_{ia} без кручения, удовлетворяющие уравнениям* (27), (47), (48), *то эти величины определяют с точностью до проективного преобразования m-ную поверхность в n-мерном билинейно-метрическом проективном пространстве тогда и только тогда, когда матрица*

$$\begin{Vmatrix} \bar{h}_{00} & \bar{h}_{01} & \dots & \bar{h}_{0m} & 0 & \dots & 0 \\ \bar{h}_{10} & \bar{h}_{11} & \dots & \bar{h}_{1m} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{h}_{m0} & \bar{h}_{m1} & \dots & \bar{h}_{mm} & 0 & \dots & 0 \\ p_{m+1} & p_{m+11} & \dots & p_{m+1m} & C_{m+1m+1} & \dots & C_{m+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_n & p_{n1} & \dots & p_{nm} & C_{nm+1} & \dots & C_{nn} \end{Vmatrix}$$

допустима.

Вильнюсский Государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
13.XII.1968

Литература

1. М. А. Акивис, К конформно-дифференциальной геометрии многомерных поверхностей, Математический сборник, 1961, т. 53, № 1, стр. 53–72.
2. С. М. Бахрах, Геометрия обобщенных евклидовых пространств, Диссертация, Москва, 1961.
3. Г. Ф. Лаптев, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий, Труды Московского математического общества, т. 2.
4. А. П. Норден, Пространство аффинной связности, ГИТТЛ, М. – Л., 1950.
5. Л. Стиклаките, О гиперповерхностях билинейно-метрического проективного пространства, Лит. матем. сб., VII, № 3 (1967), 517–533.

APIE DVITIESIŠKAI-METRINĖS PROJEKTYVINĖS ERDVĖS PAVIRŠIUS

L. Stiklakytė

(*Reziumė*)

Projektyvinė erdvė P_n, kurioje tenzoriumi $H_{\alpha\beta}$ apibrėžta neišsigimusi koreliacija, yra vadinama apibendrinta dvitiesiškai-metrine projektyvine erdve Π_n. Kadangi $H_{\alpha\beta} \neq \pm H_{\beta\alpha}$, tai egzistuoja trijų rūšių m-mačio paviršiaus normalizacijos. Surasta objektai, kuriais apibrėžiama pirmo ir antro tipo normalės, derivacinių lygčių analogai, o taip pat objektai, kurie erdvėje Π_n apibrėžia m-matį paviršių (visų trijų normalizacijų atvejais).

ÜBER DIE FLÄCHE IN BILINEAR-METRISCHEM PROJEKTIVEM RAUM

L. Stiklakytė

(*Zusammenfassung*)

Es sei eine Fläche Π_m in bilinear-metrischem projektivem Raum Π_n durch Differentialgleichungen

$$\omega^I = \Lambda^I_a \vartheta^a$$

gegeben.

In diesem Artikel werden einige geometrische Objekte untersucht, die aus Komponenten fundamentaler differentialgeometrischer Objekts dritter Ordnung der Fläche und aus Komponenten Tensors $H_{\alpha\beta}$ gebildet sind. Mit Hilfe dieser Objekte wird die Normalisierung der Fläche konstruiert. Es wird gezeigt, dass im Raum Π_n drei verschiedene Ableitungsformeln existieren.