1969

УДК-519.21

О НАДЕЖНОСТИ ВОССТАНАВЛИВАЕМОЙ СИСТЕМЫ С ЗАВИСИМЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

И. Сапаговас

Рассматривается восстанавливаемая система, состоящая из n различных элементов, т. е. система, элементы которой время от времени могут выходить из строя и нуждаться в некотором времени на восстановление. Пусть в момент $t=0$ эта система начинает выполнять свою работу. Предполагается, что длительность безотказной работы (запас надежности) k-ого элемента $(1 \leqslant k \leqslant n)$ в условиях, когда все остальные элементы исправны, является случайной величиной ξ_k с функцией распределения $F_k(x)$. Обозначим число исправных элементов в момент t через $\nu=\nu(t)$. Считаем, что в случае $\nu(t)=n$ запас надежности всех элементов убывает с единичной скоростью. Если же $\nu(t)<n$, то запас надежности k-ого элемента (обозначим его через $\xi_k(t)$) убывает со скоростью $\alpha_{\nu_1(t)\ldots\nu_n(t);\,k}$, т. е.

$$\frac{d\xi_k(t)}{dt}+\alpha_{\nu_1(t)\ \nu_2(t)\ \ldots\ \nu_n(t);\,k}=0\,, \tag{1}$$

где

$$\nu_i(t)=\begin{cases} 1, & \text{если в момент } t\ i\text{-ый элемент исправен;}\\ 0, & \text{если в этот момент он неисправен, т. е.}\\ & \text{находится в состоянии восстановления.}\end{cases}$$

Предполагается также, что время восстановления k-ого эмлемента $(1 \leqslant \leqslant k \leqslant n)$ является случайной величиной η_k с функцией распределения $G_k(x)$ и не зависит от состояния системы, т. е. от числа исправных элементов. Иными словами, все элементы восстанавливаются с единичной скоростью. Функции $F_k(x)$, $G_k(x)$ и числа $\alpha_{\nu_1\ \nu_2\ldots\nu_n,\,k}$ полностью определяют рассматриваемую нами модель. Из уравнения (1) следует зависимость наших элементов. Заметим, что аналогичная схема зависимости впервые была рассмотрена в работах И. Н. Коваленко [1], [2].

В ряде практических случаев важно уметь находить вероятности следующих событий: в момент t все элементы системы находятся в исправном состоянии; число исправных элементов не меньше некоторого фиксированного s; в заданном интервале $(t,\ t+\tau)$ все элементы проработают безотказно; в этом же интервале число безотказно проработавших элементов не меньше s; полный отказ всех элементов в некоторый момент времени и т. д. В настоящей работе находятся эти вероятности в стационарном режиме, т. е. при $t\to\infty$.

Рассматриваемая задача решается с помощью исследования однородного марковского процесса $\zeta(t)$, определяемого следующим образом:

$$\zeta(t)=\{\nu_1(t),\zeta_1(t);\ \nu_2(t),\zeta_2(t);\ldots;\nu_n(t),\zeta_n(t)\}\,,$$

где

$$\zeta_i(t) = \begin{cases} \xi_i(t), & \text{если} \quad \nu_i(t) = 1, \\ \eta_i(t), & \text{если} \quad \nu_i(t) = 0, \quad (1 \leqslant i \leqslant n). \end{cases}$$

Здесь через $\eta_i(t)$ обозначена длительность времени с момента t до того момента, когда i-ый элемент полностью восстанавливается. Ясно, что

$$\sum_{i=1}^{n} \nu_i(t) = \nu(t).$$

Обозначим

$$F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(t; x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{P}\{\nu_1(t) = \nu_1, \zeta_1(t) < x_1, \ldots, \nu_n(t) = \nu_n, \zeta_n(t) < x_n\},$$

$$F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lim_{t\to\infty} F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(t; x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{2}$$

Нахождение функций $F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ полностью решит поставленную задачу. В дальнейшем будем считать, что $F_k(+0)=0$ и $G_k(+0)=0$ для всех k $(1 \leqslant k \leqslant n)$.

Доказывается следующая теорема.

Теорема. *Если функции распределения $F_k(x)$ и $G_k(x)$ имеют конечные (ненулевые) математические ожидания, т. е.*

$$a_k = \int_0^\infty \left(1 - F_k(x)\right) dx < \infty, \qquad b_k = \int_0^\infty \left(1 - G_k(x)\right) dx < \infty,$$

то $F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ существуют и удовлетворяют (почти всюду) системе дифференциальных уравнений

$$\sum_{k\in K} \alpha_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n,k} \frac{\partial F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_k} + \sum_{s\in S} \frac{\partial F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_s} -$$

$$- \sum_{k\in K} \alpha_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n,k} \left.\frac{\partial F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_k}\right|_{x_k=0} -$$

$$- \sum_{s\in S} \left.\frac{\partial F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_s}\right|_{x_s=0} +$$

$$+ \sum_{k\in K} \left.\frac{\partial F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_{k-1}0\nu_{k+1}\ldots\nu_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_k}\right|_{x_k=0} \cdot F_k(x_k) +$$

$$+ \sum_{s\in S} \alpha_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_{s-1}1\nu_{s+1}\ldots\nu_n,s} \left.\frac{\partial F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_{s-1}1\nu_{s+1}\ldots\nu_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_s}\right|_{x_s=0} \times$$

$$\times G_s(x_s) = 0,$$

где

$$K = \{k : \nu_k = 1, \quad 1 \leqslant k \leqslant n\}, \qquad S = \{s : \nu_s = 0, \quad 1 \leqslant s \leqslant n\}.$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, приведем несколько простых лемм, которыми далее будем пользоваться. Для этого нам понадобятся некоторые обозначения. Если в момент $t=0$ i-ый элемент исправен $(1 \leqslant i \leqslant n)$, т. е. $\nu_i(0)=1$, то через $\hat{\xi}_i$ обозначим запас надежности этого элемента ($\hat{\xi}_i=\xi_i(0)$); если же в момент $t=0$ он неисправен, т. е. $\nu_i(0)=0$, то $\hat{\eta}_i$ пусть означает время, требуемое на его восстановление. Через $\xi_i^{(k)}$ $(k\geqslant 1)$ обозначим запасы надежности i-ого элемента после k-ого его восстановления, а через $\eta_i^{(k)}$ $(k\geqslant 1)$ — длительнотсь восстановления после k-ого отказа. Следовательно,

$$\hat{\zeta}_i=\zeta_i(0)=\begin{cases}\hat{\xi}_i, & \text{если} \quad \nu_i(0)=1,\\ \hat{\eta}_i, & \text{если} \quad \nu_i(0)=0;\end{cases}$$

$$\zeta_i^{(k)}=\begin{cases}\xi_i^{\left[\frac{k+1}{2}\right]}, & \text{если} \quad \nu_i(0)=1 \text{ и } k=2s \text{ или } \nu_i(0)=0 \text{ и } k=2s+1,\\ \eta_i^{\left[\frac{k+1}{2}\right]}, & \text{если} \quad \nu_i(0)=1 \text{ и } k=2s+1 \text{ или } \nu_i(0)=0 \text{ и } k=2s\end{cases}$$

$$(s=0,1,2,\ldots),$$

где $\left[\frac{k+1}{2}\right]$ — наибольшее целое число, непревосходящее $\frac{k+1}{2}$. Функцию распределения величин $\zeta_i^{(k)}$ обозначим через $H_i(x)$, т. е.

$$H_i(x)=\mathbf{P}\{\zeta_i^{(k)}<x\} \qquad \text{для всех} \quad k\,(k=1,2,\ldots).$$

Распределения вероятностей $\hat{\xi}_i$ и $\xi_i^{(k)}$ $(k\geqslant 1)$, вообще говоря, могут быть различными, так как i-ый элемент мог работать и до момента $t=0$. Тоже самое относится и к распределению вероятностей величин $\hat{\eta}_i$ и $\eta_i^{(k)}$.

В дальнейшем через C_i $(i=1, 2, 3, 4)$ будем обозначать абсолютные константы и считать, что функции $F_k(x)$ и $G_k(x)$ имеют конечные (ненулевые) математические ожидания.

Лемма 1. *Если рассматриваемый процесс $\zeta(t)$ является эргодическим, то при любых конечных положительных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеет место следующее соотношение*:

$$\mathbf{P}\{\nu_1(t)=\nu_1,\ x_1\leqslant\zeta_1(t)<x_1+h;\ \ldots;\ \nu_n(t)=\nu_n,\ x_n\leqslant\zeta_n(t)<x_n+h\}=O(h^n).$$

Доказательство. Так как процесс $\zeta(t)$ является эргодическим, следовательно, его эргодическое распределение не зависит от начального распределения, то без ограничения общности можно считать, что случайные величины $\hat{\zeta}_1, \hat{\zeta}_2, \ldots, \hat{\zeta}_n$, определяющие начальное состояние процесса $\zeta(t)$, являются независимыми и каждая из них имеет ограниченную плотность $f_i(x)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$.

Введем в рассмотрение событие A, состоящее в том, что

$$\nu_1(t)=\nu_1,\quad x_1\leqslant\zeta_1(t)<x_1+h;\ \ldots;\ \nu_n(t)=\nu_n,\quad x_n\leqslant\zeta_n(t)<x_n+h.$$

Через B_m обозначим событие, означающее, что до момента t произошло ровно m восстановлений и отказов элементов нашей системы. Тогда, очевидно, что

$$\mathbf{P}(A)=\sum_{m=0}^{\infty}\mathbf{P}(B_m)\,\mathbf{P}(A/B_m).$$

Оценим вероятности $P(A \mid B_m)$ при различных m. При $m=0$ имеем:

$$\mathbf{P}(A/B_0)=\mathbf{P}\{x_i+\alpha_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n,i}t\leqslant\zeta_i<x_i+\alpha_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n,i}t+h;\ \ 1\leqslant i\leqslant n\}=$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\int\limits_{x_i+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,i}t}^{x_i+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,i}t+h} f_i(x)\,dx\leqslant C_1h^n=0(h^n).$$

Случай $m=1$ означает, что до момента t имели место или одно восстановление, или один отказ любого элемента системы. Пусть это произошло в некотором интервале $(u,\ u+du)$ (переменную u удобнее отсчитывать от момента t в отрицательном направлении). Тогда

$$\mathbf{P}(A/B_1)=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_0^t\mathbf{P}\{\alpha_{\nu k,k}(t-u)\leqslant\zeta_k<\alpha_{\nu k,k}(t-u)+du\}\times$$

$$\times\mathbf{P}\{x_k+\alpha_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n,k}u\leqslant\zeta_k^{(1)}<x_k+\alpha_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n,k}u+h\}\times$$

$$\times\mathbf{P}\{x_i+\alpha_{\nu k,i}(t-u)+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,i}u\leqslant\zeta_i<x_i+\alpha_{\nu k,i}(t-u)+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,i}u+h;$$

$$1\leqslant i\leqslant n,\quad i\neq k\}\leqslant C_2h^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_0^\infty[H_k(x_k+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,k}u+h)-$$

$$-H_k(x_k+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,k}u)]\,du\leqslant$$

$$\leqslant C_3h^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_0^h[1-H_k(x_k+u)]\,du\leqslant C_4nh^n=O(h^n),$$

где в целях краткости через $\alpha_{\nu k,j}(1\leqslant j\leqslant n)$ обозначен коэффициент $\alpha_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_{k-1}\nu_k+(-1)^{\nu_k}\nu_{k+1}\ldots\nu_n,j}$.

Аналогично рассматриваются все последующие случаи. Пусть, например, $m=r$, т. е. до момента t произошло r восстановлений и отказов элементов нашей системы. Пусть, далее, первое такое изменение произошло в интервале $(u_r,\ u_r+du_r)$, второе — $(u_{r-1},\ u_{r-1}+du_{r-1}),\ldots$, последнее r-ое — $(u_1,\ u_1+du_1)$ $(u_1<u_2<\ldots<u_r$, все переменные u_r отсчитываются от момента t в отрицательном направелении). Это могло произойти несколькими способами. Например: один некоторый элемент до момента t вышел из строя и был восстановлен всего r раз, а остальные за этот промежуток времени ни разу не изменили своего состояния (в смысле выхода из строя или восстановления); один вышел из строя и был восстановлен всего $r-1$ раз, а из всех остальных — только один элемент однажды изменил свое состояние (в указанном выше смысле); $\ldots$; наконец, r различных элементов только по одному разу изменили свое состояние. Так что, вероятность $\mathbf{P}(A \mid B_r)$ можно разложить на сумму вероятностей следующих несовместимых между собой событий:

$$\mathbf{P}(A/B_r)=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_0^t\int\limits_{u_1}^t\ldots\int\limits_{u_{r-1}}^t\prod_{i=1}^{r}\mathbf{P}\{\alpha_{\nu rk,k}^{(i)}(u_{r+2-i}-u_{r+1-i})\leqslant\zeta_k^{(i-1)}<$$

$$<\alpha_{\nu rk,k}^{(i)}(u_{r+2-i}-u_{r+1-i})+du_{r+1-i}\}\times$$

$$\times\mathbf{P}\{x_k+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,k}u_1\leqslant\zeta_k^{(r)}<x_k+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,k}u_1+h\}\times$$

$$\times \mathbf{P}\Big\{ x_i+\sum_{j=1}^{r} \alpha^{(j)}_{\nu rk,i}(u_{r+2-j}-u_{r+1-j})+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,\,i}\,u_1\leqslant\hat{\zeta}_i<x_i+$$

$$+\sum_{j=1}^{r}\alpha^{(j)}_{\nu rk,i}(u_{r+2-j}-u_{r+1-j})+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,\,i}\,u_1+h;\qquad 1\leqslant i\leqslant n,\ i\neq k\Big\}+$$

$$+\Big\{\sum_{\substack{i,k\\ i\neq k}}^{(r)}\int_0^t\int_{u_1}^t\cdots\int_{u_{r-1}}^t\prod_{j=1}^{r-1}\mathbf{P}\{\alpha^{(j)}_{\nu rki,k}(u_{r+2-j}-u_{r+1-j})\leqslant\zeta_k^{(j-1)}<$$

$$<\alpha^{(j)}_{\nu rki,k}(u_{r+2-j}-u_{r+1-j})+d\,u_{r+1-j}\}\times$$

$$\times\mathbf{P}\{x_k+\alpha^{(r)}_{\nu rki,k}(u_2-u_1)+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,\,k}\,u_1\leqslant\zeta_k^{(r-1)}<x_k+\alpha^{(r)}_{\nu rki,k}(u_2-u_1)+$$

$$+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,\,k}\,u_1+h\}\,\mathbf{P}\Big\{\sum_{j=1}^{r}\alpha^{(j)}_{\nu rki,i}(u_{r+2-j}-u_{r+1-j})\leqslant\hat{\zeta}_i<$$

$$<\sum_{j=1}^{r}\alpha^{(j)}_{\nu rki,i}(u_{r+2-j}-u_{r+1-j})+d\,u_1\Big\}\,\mathbf{P}\{x_i+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,\,i}\,u_1\leqslant\zeta_i^{(1)}<$$

$$<x_i+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,\,i}\,u_1+h\}\,\mathbf{P}\Big\{x_s+\sum_{j=1}^{r}\alpha^{(j)}_{\nu rki,s}(u_{r+2-j}-u_{r+1-j})+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,\,s}\,u_1\leqslant$$

$$\leqslant\hat{\zeta}_s<x_s+\sum_{j=1}^{r}\alpha^{(j)}_{\nu rki,s}(u_{r+2-j}-u_{r+1-j})+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,\,s}\,u_1+h;$$

$$s\neq i,\qquad s\neq k,\qquad 1\leqslant s\leqslant n\Big\}+$$

$$+\sum_{\substack{i,k\\ i\neq k}}^{(r-1)}+\ldots+\sum_{\substack{i,k\\ i\neq k}}^{(1)}\Big\}+\ldots+$$

$$+\sum_{k_1,k_2,\ldots,k_r}\int_0^t\int_{u_1}^t\cdots\int_{u_{r-1}}^t\mathbf{P}\{\alpha^{(1)}_{\nu rk_1\ldots k_r,k_1}(t-u_r)\leqslant\hat{\zeta}_{k_1}<\alpha^{(1)}_{\nu rk_1\ldots k_r,k_1}(t-u_r)+$$

$$+d\,u_r\}\,\mathbf{P}\Big\{x_{k_1}+\sum_{i=2}^{r}\alpha^{(i)}_{\nu rk_1\ldots k_r,k_1}(u_{r+2-i}-u_{r+1-i})+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,k_1}\,u_1\leqslant\zeta_{k_1}^{(1)}<$$

$$<x_{k_1}+\sum_{i=2}^{r}\alpha^{(i)}_{\nu rk_1\ldots k_r,k_1}(u_{r+2-i}-u_{r+1-i})+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,k_1}\,u_1+h\}\times$$

$$\times\mathbf{P}\Big\{\sum_{i=1}^{2}\alpha^{(i)}_{\nu rk_1\ldots k_r,k_2}(u_{r+2-i}-u_{r+1-i})\leqslant\hat{\zeta}_{k_2}<\sum_{i=1}^{2}\alpha^{(i)}_{\nu rk_1\ldots k_r,k_2}(u_{r+2-i}-$$

$$-u_{r+1-i})+d\,u_{r-1}\Big\}\,\mathbf{P}\Big\{x_{k_2}+\sum_{i=3}^{r}\alpha^{(i)}_{\nu rk_1\ldots k_r,k_2}(u_{r+2-i}-u_{r+1-i})+$$

$$+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,k_2}\,u_1\leqslant\zeta_{k_2}^{(1)}<x_{k_2}+\sum_{i=3}^{r}\alpha^{(i)}_{\nu rk_1\ldots k_r,k_2}(u_{r+2-i}-u_{r+1-i})+$$

$$+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,k_s}u_1+h\Big\}\ldots\mathbf{P}\Big\{\sum_{i=1}^{r}\alpha^{(i)}_{\nu r k_1\ldots k_r,k_r}(u_{r+2-i}-u_{r+1-i})\leqslant\hat{\zeta}_{k_r}<$$

$$<\sum_{i=1}^{r}\alpha^{(i)}_{\nu r k_1\ldots k_r,k_r}(u_{r+2-i}-u_{r+1-i})+du_1\Big\}\times$$

$$\times\mathbf{P}\{x_{k_r}+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,k_r}u_1\leqslant\zeta^{(1)}_{k_r}<x_{k_r}+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,k_r}u_1+h\}\times$$

$$\times\mathbf{P}\Big\{x_s+\sum_{i=1}^{r}\alpha^{(i)}_{\nu r k_1\ldots k_r,s}(u_{r+2-i}-u_{r+1-i})+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,s}u_1\leqslant\hat{\zeta}_s<x_s+$$

$$+\sum_{i=1}^{r}\alpha^{(i)}_{\nu r k_1\ldots k_r,s}(u_{r+2-i}-u_{r+1-i})+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,s}u_1+h;\qquad s\neq k_j$$

$$(j=1,2,\ldots,r);\qquad 1\leqslant s\leqslant n\Big\},$$

где

$$\alpha^{(s)}_{\nu rk,j}=\begin{cases}\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,j}, & \text{если}\quad (r+s)-\text{нечетное},\\ \alpha_{\nu_1\ldots\nu_{k-1}\,\nu_k+(-1)^{\nu_k}\,\nu_{k+1}\ldots\nu_n,j}, & \text{если}\quad (r+s)-\text{четное}\end{cases}$$

$$(s=1,2,\ldots,r;\qquad j,k=1,2,\ldots,n);$$

$$\alpha^{(s)}_{\nu rki,j}=\begin{cases}\alpha_{\nu_1\ldots\nu_{i-1}\,\nu_i+(-1)^{\nu_i}\,\nu_{i+1}\ldots\nu_n,j}, & \text{если } (r+s)-\text{четное}\\ \alpha_{\nu_1\ldots\nu_{i-1}\nu_i+(-1)^{\nu_i}\,\nu_{i+1}\ldots\nu_{k-1}\,\nu_k+(-1)^{\nu_k}\nu_{k+1}\ldots\nu_n,j}, & \text{если } (r+s)-\text{нечетное}\end{cases}$$

$$(s=1,2,\ldots,r;\qquad i\neq k;\qquad i,\ j,k=1,2,\ldots,n);$$

$$\alpha^{(s)}_{\nu rk_1\ldots k_r,j}=\begin{cases}\alpha_{\nu_1\ldots\nu_{k_r-1}\,\nu_{k_r}+(-1)^{\nu_{k_r}}\nu_{k_r+1}\ldots\nu_n,j}, \qquad \text{если}\qquad s=r,\\ \alpha_{\nu_1\ldots\nu_{k_{r-1}-1}\,\nu_{k_{r-1}}+(-1)^{\nu_{k_{r-1}}}\,\nu_{k_{r-1}+1}\ldots\nu_{k_r-1}\,\nu_{k_r}+(-1)^{\nu_{k_r}}\,\nu_{k_r+1}\ldots\nu_n,j},\\ \text{если}\qquad s=r-1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_{\nu_1'\ldots\nu_n',j},\qquad \text{где}\\ \nu_i'=\begin{cases}\nu_i+(-1)^{\nu_i}, & \text{при}\quad i=k_1,k_2,\ldots,k_r;\\ \nu_i, & \text{при}\quad i\neq k_l\ (l=1,2,\ldots,r;\ 1\leqslant i\leqslant n);\end{cases}\qquad \text{если}\quad s=1\end{cases}$$

$$(s=1,2,\ldots,r;\ j=1,2,\ \ldots,n;\ \ k_i\neq k_l\,(i\neq l);\ \ k_1,k_2,\ldots,k_r=1,2,\ldots,n);$$

$$u_{r+1}=t,$$

$$\zeta^{(0)}_k=\hat{\zeta}_k;$$

$\sum\limits_{\substack{i,k\\ i\neq k}}^{(s)}$ – сумма, аналогичная сумме $\sum\limits_{\substack{i,k\\ i\neq k}}^{(r)}$, когда s-ое $(1\leqslant s\leqslant r)$ изменение состояния системы (в указанном выше смысле) происходит за счет i-ого элемента, т. е. в интервале $(u_s,\ u_s+du_s)$ этот элемент или восстанавливается, или же выходит из строя;

$\sum\limits_{k_1,k_2,\ldots,k_r}$ — сумма по всевозможным различным комбинациям $k_1, k_2, \ldots, k_r$ $(1 \leqslant k_1, k_2, \ldots, k_r \leqslant n)$, где изменение состояния системы происходит последовательно за счет элементов с номерами $k_1, k_2, \ldots, k_r$.

Каждое слагаемое оценивается совершенно аналогично случаю $m=1$, т. е. имеет порядок $O(h^n)$. Тогда для любого целого r

$$\mathbf{P}(A/B_r) \leqslant (2^r - r)\, O(h^n),$$

так как число различных сумм в вышестоящем выражении (это легко подсчитать) не превышает $2^r - r$. Следовательно,

$$\mathbf{P}(A) \leqslant O(h^n) \sum_{m=0}^{\infty} (2^m - m)\, \mathbf{P}(B_m).$$

Известно, что для процессов восстановления, удовлетворяющих условию $\mathbf{P}\{X_i=0\}=0$ (X_i — длительность исправности элемента после i-ого его восстановления), число восстановлений, происшедших до момента времени t (обозначаемое обычно через N_t), имеет конечные моменты всех порядков и, более того, $\mathbf{M}\exp(\Theta N_t) < \infty$ при всех $|\Theta| < \infty$ (см., напр., [3], [4]). Так как в рассматриваемом случае при любых ν_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \alpha_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n,k} < \infty \qquad \text{и} \qquad F_k(+0) = 0,$$

$G_k(+0)=0$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, то, очевидно, что можно определить новый процесс восстановления N'_t, обладающий вышеуказанным свойством и удовлетворяющий неравенству $N_t \leqslant N'_t$ (через N_t обозначено общее число восстановлений и отказов элементов нашей системы, происшедших до момента времени t). Отсюда немедленно следует следующее соотношение:

$$\sum_{m=0}^{\infty} (2^m - m)\, \mathbf{P}(B_m) \leqslant \mathbf{M}\exp(\ln 2 N_t) \leqslant \mathbf{M}\exp(\ln 2 N'_t) < \infty.$$

Следовательно, $\mathbf{P}(A) = O(h^n)$. Лемма 1 доказана.

Следствие 1. *В условиях нашей леммы 1 при $n \geqslant 2$ имеет место следующие соотношение:*

$$\mathbf{P}\{\nu_1(t)=\nu_1,\ \ x_1 \leqslant \zeta_1(t) < x_1+h; \ldots ; \nu_n(t)=\nu_n,\ \ x_n \leqslant \zeta_n(t) < x_n+h\} = o(h).$$

Следствие 2. *Функции $F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(t;\, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ почти всюду имеют частные производные по x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.*

Доказательство. Известно, что функция, удовлетворяющая условию Липшица, является абсолютно непрерывной и потому почти всюду имеет конечную производную. Оказывается, что функции $F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(t;\, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и удовлетворяют условию Липшица по всем x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. В самом деле, из леммы 1 следует, что

$$\begin{aligned}
&F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(t;\, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i+h,\ x_{i+1}, \ldots, x_n) - \\
&- F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(t;\, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{P}\{\nu_j(t)=\nu_j,\ \zeta_j(t) < x_j;\quad 1 \leqslant j \leqslant n,\ \ j \neq i; \\
&\nu_i(t)=\nu_i,\quad x_i \leqslant \zeta_i(t) < x_i+h\} \leqslant \mathbf{P}\{\nu_i(t)=\nu_i,\ x_i \leqslant \zeta_i(t) < x_i+h\} = O(h),
\end{aligned}$$

что и доказывает следствие 2.

Лемма 2. *Если функции* $F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(t;\ x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *при* $t\to\infty$ *имеют конечные пределы* $F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *и существуют производные*

$$\frac{\partial F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(t;x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_i}, \qquad \frac{\partial F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(x_1x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_i} \qquad (1\leqslant i\leqslant n),$$

то $\dfrac{\partial F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(t;x_1x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_i}$ *также имеют конечные пределы при* $t\to\infty$ *и*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\partial F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(t;x_1x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_i}=\frac{\partial F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_i}.$$

Доказательство. Лемма 2 доказывается очень просто. Действительно,

$$\frac{\partial F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(x_1x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_i}=\frac{\partial \lim\limits_{t\to\infty} F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(t;x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_i}=$$

$$=\lim_{\Delta x_i\to 0}\lim_{t\to\infty}\frac{F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(t;x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},x_i+\Delta x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)-F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(t;x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\Delta x_i}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\partial F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(t;x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_i},$$

что и доказывает нашу лемму. Здесь использована известная теорема о перестановке двух предельных переходов, которая в условиях леммы 2 и в силу эргодичности нашего процесса имеет место.

Лемма 3. *Функции* $F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(t;\ x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *обладают производными*

$$\frac{\partial F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(t;x_1,x_2\ldots,x_{j-1},0,x_{j+1},\ldots,x_n)}{\partial x_j} \qquad (1\leqslant j\leqslant n)$$

почти для всех t.

Доказательство. По определению $F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(t;\ x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и по методу, применяемому при доказательстве леммы 1, для любого j $(1\leqslant j\leqslant n)$ получаем следующие соотношения:

$$F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(t;x_1,x_2,\ldots,x_{j-1},h,x_{j+1},\ldots,x_n)=$$
$$=\mathbf{P}\{\nu_i(t)=\nu_i,\quad \zeta_i(t)<x_i;\quad 1\leqslant i\leqslant n,\quad i\neq j;\quad \nu_j(t)=\nu_j,\quad \zeta_j(t)<h\}=$$
$$=\int_0^t \psi_{\nu_1\ldots\nu_n,j}(t,u;x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n)\,[H_j(\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,j}u+h)-$$
$$-H_j(\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,j}u)]\,du,$$

где через $(u,\ u+du)$ обозначен интервал последнего перед моментом t изменения состояния нашей системы (пусть это произошло за счет элемента с индексом j), т. е. если $\nu_j(t)=1$, то этот элемент в интервале $(u,\ u+du)$ был восстановлен, если же $\nu_j(t)=0$, то в этом интервале он вышел из строя, а за время u никаких изменений состояний элементов уже не было (переменная u отсчитывается от момента t в отрицательном направлении). Из каждого слагаемого выделен множитель

$H_j(\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,j}u+h)-H_j(\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,j}u)$, а все остальное ради краткости обозначено через

$$\psi_{\nu_1\ldots\nu_n,j}(t,u;\ x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n).$$

Пусть, далее,

$$\varphi_{\nu_1\ldots\nu_n,j}(t,z;x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n)=$$

$$=\int_0^t \psi_{\nu_1\ldots\nu_n,j}(t\,u;x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n)\,H_j(\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,j}u+z)\,du\,,$$

тогда

$$F_{\nu_1\,\nu_2\ldots\nu_n}(t;x_1,x_2,\ldots,x_{j-1},h,x_{j+1},\ldots,x_n)=$$

$$=\varphi_{\nu_1\ldots\nu_n,j}(t,h;x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n)-$$

$$-\varphi_{\nu_1\ldots\nu_n,j}(t,0;x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n)\,.$$

Если

$$\Psi_{\nu_1\ldots\nu_n,j}(t,z;x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n)=$$

$$=\int_0^z \psi_{\nu_1\ldots\nu_n,j}(t,u;x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n)\,du,$$

то

$$\varphi_{\nu_1\ldots\nu_n,j}(t,z;x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n)=$$

$$=\int_0^t H_j(\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,j}u+z)\,d\Psi_{\nu_1\ldots\nu_n,j}(t,u;x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n)=$$

$$=\Psi_{\nu_1\ldots\nu_n,j}(t,t;x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n)\,H_j(\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,j}t+z)-$$

$$-\int_z^{\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,j}t+z}\Psi_{\nu_1\ldots\nu_n,j}\left(t,\frac{u-z}{\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,j}};x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n\right)dH_j(u)\,.$$

Следовательно,

$$F_{\nu_1\ldots\nu_n}(t;x_1,\ldots,x_{j-1},h,x_{j+1},\ldots,x_n)=$$

$$=\Psi_{\nu_1\ldots\nu_n,j}(t,t;x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n)\,H_j(\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,j}t+h)-$$

$$-\Psi_{\nu_1\ldots\nu_n,j}(t,t;x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n)\,H_j(\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,j}t)-$$

$$-\int_h^{\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,j}t+h}\Psi_{\nu_1\ldots\nu_n,j}\left(t,\frac{u-h}{\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,j}};x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n\right)dH_j(u)+$$

$$+\int_0^{\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,j}t}\Psi_{\nu_1\ldots\nu_n,j}\left(t,\frac{u}{\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,j}};x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n\right)dH_j(u)=$$

$$=\Psi_{\nu_1\ldots\nu_n,j}(t,t;x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n)\,[H_j(\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,j}t+h)-$$

$$-H_j(\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,j}t)]+$$

$$+\int\limits_{0}^{\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,j}t}\left[\int\limits_{\frac{u-h}{\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,j}}}^{\frac{u}{\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,j}}}\psi_{\nu_1\ldots\nu_n,j}(t,z;x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n)\,dz\right]dH_j(u)+$$

$$+\left\{\int\limits_{0}^{\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,j}t}-\int\limits_{h}^{\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,j}t+h}\right\}\left[\int\limits_{0}^{\frac{u-h}{\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,j}}}\psi_{\nu_1\ldots\nu_n,j}(t,z;x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n)\,dz\right]\times$$

$$\times\, dH_j(u).$$

Учитывая, что $F_{\nu_1\ldots\nu_n}(t;\ x_1,\ldots,x_{j-1},\ 0,\ x_{j-1},\ \ldots,\ x_n)=0$ и разделив полученное равенство на h, переходя к пределу при $h\to 0$, получаем утверждение нашей леммы, поскольку почти для всех t существует конечный предел выражения

$$\frac{H_j(\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,j}t+h)-H_j(\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,j}t)}{h}.$$

Лемма 3 доказана.

Замечание. Совершенно аналогичным сопсобом можно доказать, что если функции $F_{\nu_1\ldots\nu_n}(t;\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ при $t\to\infty$ имеют конечные пределы $F_{\nu_1\ldots\nu_n}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, то эти пределы также обладают производными

$$\frac{\partial F_{\nu_1\ldots\nu_n}(x_1,\ldots,x_{j-1},0,x_{j+1},\ldots,x_n)}{\partial x_j}$$

для всех j $(1\leqslant j\leqslant n)$.

Лемма 4. *Если функции $F_{\nu_1\ldots\nu_n}(t;\ x_1,x_2,\ \ldots,\ x_n)$ при $t\to\infty$ имеют конечные пределы $F_{\nu_1\ldots\nu_n}(x_1,x_2,\ \ldots,\ x_n)$ и, кроме того, существует производная $\dfrac{\partial F_{\nu_1\ldots\nu_n}(t;x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial t}$, также имеющая предел при $t\to\infty$, то этот предел тождественно равен нулю.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\partial F_{\nu_1\ldots\nu_n}(t;x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial t}=F^*_{\nu_1\ldots\nu_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $F^*_{\nu_1\ldots\nu_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)\not\equiv 0$, например, $F^*_{\nu_1\ldots\nu_n}(x_1,x_2,\ \ldots,\ x_n)>0$. Тогда при достаточно больших $t\geqslant t_0$,

$$\left|\frac{\partial F_{\nu_1\ldots\nu_n}(t;x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial t}-F^*_{\nu_1\ldots\nu_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)\right|\leqslant\frac{F^*_{\nu_1\ldots\nu_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{2},$$

так что

$$\frac{F^*_{\nu_1\ldots\nu_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{2}\leqslant\frac{\partial F_{\nu_1\ldots\nu_n}(t;x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial t}\leqslant\frac{3}{2}F^*_{\nu_1\ldots\nu_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

Далее, так как

$$F_{\nu_1\ldots\nu_n}(t;x_1,x_2,\ldots,x_n)=\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\partial F_{\nu_1\ldots\nu_n}(u;x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial u}\,du+$$

$$+F_{\nu_1\ldots\nu_n}(t_0;x_1,x_2,\ldots,x_n),$$

то

$$\frac{F^*_{\nu_1\ldots\nu_n}(x_1, x_2,\ldots,x_n)}{2}(t-t_0)+F_{\nu_1\ldots\nu_n}(t_0; x_1, x_2,\ldots,x_n)\leqslant$$

$$\leqslant F_{\nu_1\ldots\nu_n}(t; x_1,\ldots,x_n)\leqslant\frac{3}{2}F^*_{\nu_1\ldots\nu_n}(x_1,\ldots,x_n)(t-t_0)+$$

$$+F_{\nu_1\ldots\nu_n}(t_0; x_1,\ldots,x_n),$$

что противоречит условию об ограниченности функции $F_{\nu_1\ldots\nu_n}(t; x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Случай, когда $F^*_{\nu_1\ldots\nu_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)<0$, рассматривается совершенно аналогично. Значит, $F^*_{\nu_1\ldots\nu_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\equiv 0$. Лемма 4 доказана.

Переходим к доказательству теоремы. В условиях нашей теоремы существует эргодическое распределение процесса $\zeta(t)$ $F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Это следует из эргодической теоремы И. Н. Коваленко для кусочно-линейных марковских процессов (см., напр., [5]).

Введем в рассмотрение событие A, состоящее в том, что

$$\nu_i(t+h)=\nu_i,\ \zeta_i(t+h)<x_i;\ 1\leqslant i\leqslant n.$$

Предположим сначала, что за время от t до $t+h$ состояние системы не изменилось, т. е. ни один элемент не вышел из строя и ни один не был восстановлен. Тогда для выполнения события A, необходимо и достаточно, чтобы для всех $1\leqslant i\leqslant n$

$$\nu_i(t)=\nu_i,\qquad \alpha_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n,i}h\leqslant\zeta_i(t)<x_i+\alpha_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n,i}h.$$

Если $\nu_i(t)=0$ то $\alpha_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n,i}$, считается равным единице.

Пусть за время от t до $t+h$ один элемент с номером k $(k\in K)$ был восстановлен. Это возможно лишь при условии, что

$$\nu_i(t)=\nu_i,\qquad \alpha_{\nu_1\ldots\nu_{k-1}0\nu_{k+1}\ldots\nu_n,i}\Theta_1h+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_{k-1}1\nu_{k+1}\ldots\nu_n,i}(1-\Theta_1)h\leqslant$$

$$\leqslant\zeta_i(t)<x_i+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_{k-1}0\nu_{k+1}\ldots\nu_n,i}\Theta_1h+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_{k-1}1\nu_{k+1}\ldots\nu_n,i}(1-\Theta_1)h;$$

$$1\leqslant i\leqslant n,\qquad i\neq k;\qquad \nu_k(t)=0,\qquad 0\leqslant\eta_k(t)<h;$$

$$\alpha_{\nu_1\ldots\nu_{k-1}1\nu_{k+1}\ldots\nu_n,k}(1-\Theta_1)h\leqslant\xi_k<x_k+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_{k-1}1\nu_{k+1}\ldots\nu_n,k}(1-\Theta_1)h.$$

Величина Θ_1 определяется моментом восстановления k-ого элемента в интервале $(t, t+h)$. Очевидно, с вероятностью единица $0<\Theta_1<1$.

Следующий возможный случай сводится к тому, что в интервале $(t, t+h)$ один элемент с номером s $(s\in S)$ вышел из строя. Это возможно тогда и только тогда, когда

$$\nu_i(t)=\nu_i,\qquad \alpha_{\nu_1\ldots\nu_{s-1}1\nu_{s+1}\ldots\nu_n,i}\Theta_2h+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_{s-1}0\nu_{s+1}\ldots\nu_n,i}(1-\Theta_2)h\leqslant$$

$$\leqslant\zeta_i(t)<x_i+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_{s-1}1\nu_{s+1}\ldots\nu_n,i}\Theta_2h+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_{s-1}0\nu_{s+1}\ldots\nu_n,i}(1-\Theta_2)h;$$

$$1\leqslant i\leqslant n,\qquad i\neq s;\qquad \nu_s(t)=1,\qquad 0\leqslant\xi_s(t)<\alpha_{\nu_1\ldots\nu_{s-1}1\nu_{s+1}\ldots\nu_n,s}h;$$

$$(1-\Theta_2)h\leqslant\eta_s<x_s+(1-\Theta_2)h.$$

Величина Θ_2 определяется моментом выхода из строя s-ого элемента в интервале $(t, t+h)$ и с вероятностью единица $0<\Theta_2<1$.

Наконец, остальные случаи, благоприятствующие событию A, сводятся к тому, что за время h либо вышло из строя, либо было восстановлено более одного элемента, либо имели место как выход из строя, так и восстановление элемента. По доказанному следствию 1 леммы 1 вероятности таких событии имеют порядок $o(h)$. Следовательно, имеет место соотношение:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{\nu_i(t+h)=\nu_i, \quad \zeta_i(t+h)<x_i; \quad 1\leqslant i\leqslant n\}=\\
&=\mathbf{P}\{\nu_i(t)=\nu_i, \quad \alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,i}h\leqslant\zeta_i(t)<x_i+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,i}h; \quad 1\leqslant i\leqslant n\}+\\
&+\sum_{k\in K}P\{\nu_i(t)=\nu_i, \ \alpha_{\nu_1\ldots\nu_{k-1}0\nu_{k+1}\ldots\nu_n,i}\Theta_1 h+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_{k-1}1\nu_{k+1}\ldots\nu_n,i}(1-\Theta_1)h\leqslant\\
&\leqslant\zeta_i(t)<x_i+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_{k-1}0\nu_{k+1}\ldots\nu_n,i}\Theta_1 h+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_{k-1}1\nu_{k+1}\ldots\nu_n,i}(1-\Theta_1)h;\\
&1\leqslant i\leqslant n, \quad i\neq k; \quad \nu_k(t)=0, \quad 0\leqslant\eta_k(t)<h;\\
&\alpha_{\nu_1\ldots\nu_{k-1}1\nu_{k+1}\ldots\nu_n,k}(1-\Theta_1)h\leqslant\xi_k<x_k+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_{k-1}1\nu_{k+1}\ldots\nu_n,k}(1-\Theta_1)h\}+\\
&+\sum_{s\in S}\mathbf{P}\{\nu_i(t)=\nu_i, \ \alpha_{\nu_1\ldots\nu_{s-1}1\nu_{s+1}\ldots\nu_n,i}\Theta_2 h+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_{s-1}0\nu_{s+1}\ldots\nu_n,i}(1-\Theta_2)h\leqslant\\
&\leqslant\zeta_i(t)<x_i+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_{s-1}1\nu_{s+1}\ldots\nu_n,i}\Theta_2 h+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_{s-1}0\nu_{s+1}\ldots\nu_n,i}(1-\Theta_2)h;\\
&1\leqslant i\leqslant n, \quad i\neq s; \quad \nu_s(t)=1, \quad 0\leqslant\xi_s(t)<\alpha_{\nu_1\ldots\nu_{s-1}1\nu_{s+1}\ldots\nu_n,s}h;\\
&(1-\Theta_2)h\leqslant\eta_s<x_s+(1-\Theta_2)h\}+o(h).
\end{aligned}$$

Используя функции $F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(t;\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ и учитывая следствие 1 леммы 1, получаем, что это соотношение эквивалентно следующему выражению:

$$\begin{aligned}
&F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(t+h;\ x_1,\ x_2,\ldots,x_n)=F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(t;\ x_1+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,1}h,\ldots,x_n+\\
&+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,n}h)-\sum_{j=1}^{n}F_{\nu_1\ldots\nu_n}(t;x_1+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,1}h,\ldots,x_{j-1}+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,j-1}h,\\
&\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,j}h, \quad x_{j+1}+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,j+1}h,\ldots,x_n+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_n,n}h)+\\
&+\sum_{k\in K}F_{\nu_1\ldots\nu_{k-1}0\nu_{k+1}\ldots\nu_n}(t;y_1,y_2,\ldots,y_n)\times\\
&\times\Big[F_k\Big(x_k+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_{k-1}1\nu_{k+1}\ldots\nu_n,k}(1-\Theta_1)h\Big)-\\
&-F_k\Big(\alpha_{\nu_1\ldots\nu_{k-1}1\nu_{k+1}\ldots\nu_n,k}(1-\Theta_1)h\Big)\Big]+\\
&+\sum_{s\in S}F_{\nu_1\ldots\nu_{s-1}1\nu_{s+1}\ldots\nu_n}(t;y'_1,y'_2,\ldots,y'_n)\times\\
&\times\Big[G_s\Big(x_s+(1-\Theta_2)h\Big)-G_s\Big((1-\Theta_2)h\Big)\Big]+o(h),
\end{aligned}$$

где

$$y_i=\begin{cases}x_i+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_{k-1}1\nu_{k+1}\ldots\nu_n,i}\Theta_1 h+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_{k-1}1\nu_{k+1}\ldots\nu_n,i}(1-\Theta_1)h, & \text{если } i\neq k,\\ h, & \text{если } i=k;\end{cases}$$

$$y'_i=\begin{cases}x_i+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_{s-1}1\nu_{s+1}\ldots\nu_n,i}\Theta_2 h+\alpha_{\nu_1\ldots\nu_{s-1}0\nu_{s+1}\ldots\nu_n,i}(1-\Theta_2)h, & \text{если } i\neq s;\\ \alpha_{\nu_1\ldots\nu_{s-1}1\nu_{s+1}\ldots\nu_n,s}h, & \text{если } i=s.\end{cases}$$

Учитывая следствие 2 леммы 1, а также лемму 3 при $h \to 0$, получаем равенства, справедливые почти всюду по t и по x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$:

$$\frac{\partial F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(t; x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n, j} \frac{\partial F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(t; x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_j} -$$

$$-\sum_{j=1}^{n} \alpha_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n, j} \left.\frac{\partial F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(t; x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_j}\right|_{x_j=0} +$$

$$+\sum_{k\in K} \left.\frac{\partial F_{\nu_1\ldots\nu_{k-1}0\nu_{k+1}\ldots\nu_n}(t; x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_k}\right|_{x_k=0} \cdot F_k(x_k) +$$

$$+\sum_{s\in S} \alpha_{\nu_1\ldots\nu_{s-1}1\nu_{s+1}\ldots\nu_n, s} \left.\frac{\partial F_{\nu_1\ldots\nu_{s-1}1\nu_{s+1}\ldots\nu_n}(t; x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_s}\right|_{x_s=0} \cdot G_s(x_s).$$

Поскольку $F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) / F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(\infty, \infty, \ldots, \infty)$ — многомерная функция распределения, то почти всюду существует частная производная по x_j $(j=1, 2, \ldots, n)$. Учитывая эргодичность нашего процесса $\zeta(t)$, а также следствие 2 леммы 1 и леммы 2, 3, 4, при $t \to \infty$, получаем соотношение, справедливое почти всюду:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n, j} \frac{\partial F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_j} -$$

$$-\sum_{j=1}^{n} \alpha_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n, j} \left.\frac{\partial F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_j}\right|_{x_j=0} +$$

$$+\sum_{k\in K} \left.\frac{\partial F_{\nu_1\ldots\nu_{k-1}0\nu_{k+1}\ldots\nu_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_k}\right|_{x_k=0} \cdot F_k(x_k) +$$

$$+\sum_{s\in S} \alpha_{\nu_1\ldots\nu_{s-1}1\nu_{s+1}\ldots\nu_n, s} \left.\frac{\partial F_{\nu_1\ldots\nu_{s-1}1\nu_{s+1}\ldots\nu_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_s}\right|_{x_s=0} \cdot G_s(x_s) = 0.$$

Разделив в первых двух членах суммирование по множествам K и S и учитывая, что скорость восстанавливаемых элементов равняется единице, получаем утверждение нашей теоремы. Теорема доказана.

Решить систему уравнений в рассмотренном общем случае полностью пока не удалось. Получено решение данной системы в случае, когда $\alpha_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n, k} = \alpha_\nu$, т. е. когда скорость убывания запаса надежности для всех элементов одинакова и зависит только от общего числа исправных элементов. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что это вероятностное решение имеет вид

$$F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{C}{C_\nu} \prod_{k\in K} \int_0^{x_k} \Big(1 - F_k(u)\Big) du \prod_{s\in S} \int_0^{x_s} \Big(1 - G_s(u)\Big) du,$$

где

$$C_\nu = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad \nu = 0; \\ \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_\nu, & \text{при} \quad 1 \leqslant \nu \leqslant n-1 \\ \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}, & \text{при} \quad \nu = n. \end{cases}$$

Постоянная C определяется из условия нормировки:

$$C=\left(\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{R}\frac{1}{C_\nu}\prod_{k\in K}a_k\prod_{s\in S}b_s\right)^{-1},$$

внутренее суммирование здесь производится по множеству R, состоящему из всех возможных различных комбинаций $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n$ таких, у которых $\nu_k=0$ или 1 $(1\leqslant k\leqslant n)$ и $\sum_{i=1}^{n}\nu_i=\nu$.

Отсюда уже можно получить все интересующие нас вероятности ранее упомянутых событий. Если обозначить через $p_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}$ вероятность того, что в стационарном режиме число исправных элементов равно ν, номера которых $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$ $(1\leqslant i_k\leqslant n,\ 1\leqslant k\leqslant\nu)$, то

$$p_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}=\frac{C}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu}\prod_{k\in K}a_k\prod_{s\in S}b_s.$$

Если нас интересует только общее число исправных элементов, независимо от их порядковых номеров, то, очевидно, соответствующая вероятность равна сумме $p_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}$ по множеству R. В частности,

$$p_{\underbrace{11\ldots1}_{n}}=\frac{C}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}}\prod_{i=1}^{n}a_i,$$

$$p_{\underbrace{00\ldots0}_{n}}=C\prod_{i=1}^{n}b_i.$$

Вероятность того, что в заданном интервале длины τ в стационарном режиме ν элементов с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$ будут исправны, равна

$$p_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(\tau)=\frac{C}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu}\prod_{k\in K}\int_{\tau}^{\infty}\left(1-F_k(u)\right)du\prod_{s\in S}\int_{\tau}^{\infty}\left(1-G_s(u)\right)du.$$

В частности,

$$p_{\underbrace{11\ldots1}_{n}}(\tau)=\frac{C}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}}\prod_{i=1}^{n}\int_{\tau}^{\infty}\left(1-F_i(u)\right)du,$$

$$p_{\underbrace{00\ldots0}_{n}}(\tau)=C\prod_{i=1}^{n}\int_{\tau}^{\infty}\left(1-G_i(u)\right)du.$$

Аналогичным способом можно определить вероятности любых ранее упомянутых событий.

Следствие. Пусть рассматриваемая система состоит из n независимых элементов. Тогда $\alpha_\nu=1$ для всех $1\leqslant\nu\leqslant n$ и из теоремы следуют известные результаты для независимых процессов восстановления (см., напр., [5], [6]).

Нахождение $p_{11\ldots1}(\tau)$ при условии независимых элементов в частном случае, когда время восстановления постоянно, а время исправности является любой случайной величиной, имеющей конечное математическое ожидание, рассмотрено автором [7].

Полученные здесь результаты были вкратце изложены (без доказательства) в заметке автора [8].

В рассматриваемом нами случае предполагалось, что время восстановления η_k не зависит от состояния системы, т.е. от числа исправных элементов. Иными словами, все элементы восстанавливались с единичной скоростью. Иногда бывает целесообразно отказаться от этого ограничения и считать, что в случае $0<\nu(t)<n$ $\eta_k(t)$ убывает со скоростью $\beta_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n,k}\neq 1$, т.е.

$$\frac{d\eta_k(t)}{dt}+\beta_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n,k}=0\,.$$

Если же $\nu(t)=0$, то $\beta_{00\ldots0,k}$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ считается равным 1. В этом случае система дифференциальных уравнений принимает вид

$$\sum_{k\in K}\alpha_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n,k}\,\frac{\partial F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_k}+\sum_{s\in S}\beta_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n,s}\,\frac{\partial F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_s}-$$

$$-\sum_{k\in K}\alpha_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n,k}\,\frac{\partial F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(x_1,x_2,\ldots x_n)}{\partial x_k}\bigg|_{x_k=0}-$$

$$-\sum_{s\in S}\beta_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n,s}\,\frac{\partial F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_s}\bigg|_{x_s=0}+$$

$$+\sum_{k\in K}\beta_{\nu_1\ldots\nu_{k-1}0\nu_{k+1}\ldots\nu_n,k}\,\frac{\partial F_{\nu_1\ldots\nu_{k-1}0\nu_{k+1}\ldots\nu_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_k}\bigg|_{x_k=0}\cdot F_k(x_k)+$$

$$+\sum_{s\in S}\alpha_{\nu_1\ldots\nu_{s-1}1\nu_{s+1}\ldots\nu_n,s}\,\frac{\partial F_{\nu_1\ldots\nu_{s-1}1\nu_{s+1}\ldots\nu_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_s}\bigg|_{x_s=0}\cdot G_s(x_s)=0.$$

Доказательство этого факта полностью аналогично приведенному доказательству теоремы. Вероятностное решение этой системы в том случае, когда $\alpha_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n,k}=\alpha_\nu$, а $\beta_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n,k}=\beta_\nu$, следующее:

$$F_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{C'}{C'_\nu}\prod_{k\in K}\int\limits_0^{x_k}\Big(1-F_k(u)\Big)\,du\times$$

$$\times\prod_{s\in S}\int\limits_0^{x_s}\Big(1-G_s(u)\Big)\,du,$$

где

$$C'_\nu=\begin{cases}\beta_1\beta_2\ldots\beta_{n-1}, & \text{при}\quad \nu=0;\\ \alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\ldots\alpha_\nu\beta_\nu & \text{при}\quad 1\leqslant\nu\leqslant n-1;\\ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}, & \text{при}\quad \nu=n.\end{cases}$$

Постоянная C' определяется из условия нормировки:

$$C'=\Big(\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{R}\frac{1}{C'_\nu}\prod_{k\in K}a_k\prod_{s\in S}b_s\Big)^{-1}.$$

Интересующие нас вероятности получаются теперь очевидным образом.

В заключение выражаю искреннюю благодарность Б. Григелионису за постоянное внимание и помощь при выполнении этой работы.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР
Каунасский Медицинский Институт

Поступило в редакцию
16.XII.1968

Литература

1. И. Н. Коваленко, Некоторые аналитические методы в теории массового обслуживания, Сб. „Кибернетику – на службу коммунизму", 2, М.-Л. „Энергия", 1964, 325–338.
2. И. Н. Коваленко, Некоторые вопросы теории надежности сложных систем, Сб. „Кибернетику – на службу коммунизму", 2, М.-Л., „Энергия", 1964, 194–205.
3. Д. Р. Кокс, В. Л. Смит, Теория восстановления, М., „Советское радио", 1967.
4. Ю. К. Беляев, В. М. Максимов, Свойства аналитичности производящей функции для числа восстановлений, Теория вероят. и ее прим., VIII, 1 (1963), 108–112.
5. Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко, Введение в теорию массового обслуживания, М., „Наука", 1966.
6. Б. В. Гнеденко, Ю. К. Беляев, А. Д. Соловьев, Математические методы в теории надежности, М., „Наука", 1965.
7. И. Сапаговас, О надежности системы при немгновенном времени восстановления, Лит. матем. сб., VII, № 3 (1967), 509–512.
8. И. Сапаговас, О надежности восстанавливаемой системы с зависимыми элементами, Научная конференция молодых ученых Лит. ССР, Математика, физика, кибернетика, Вильнюс, 1967, 39–42.

ATSTATYMO SISTEMOS SU PRIKLAUSOMAIS ELEMENTAIS PATIKIMUMO KLAUSIMU

J. Sapagovas

(*Reziumė*)

Darbe nagrinėjama atstatymo sistema, susidedanti iš n elementų. Šią sistemą sudarančių elementų veikimo ir atstatymo laikų mažėjimo greitis priklauso nuo bendro dirbančių elementų skaičiaus. Surastos įvairių sistemos būsenų tikimybių analizinės išraiškos stacionariniame režime.

ON THE RELIABILITY OF RENEWED SYSTEM WITH DEPENDENT ELEMENTS

J. Sapagovas

(*Summary*)

The paper deals with renewed system of n elements. The speed of decreasing of lifetime and renewal time for elements of this system depend on the number of working elements. The analytical expressions of probabilities for various states of steady-state system are obtained.