УДК–517.537

О ПРИБЛИЖЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

А. Г. Нафталевич

Пусть F – ограниченное замкнутое множество точек на комплексной плоскости и $f(z)$ – непрерывная на множестве F функция. Обозначим через E_n наилучшее приближение к функции $f(z)$ на множестве F алгебраическим многочленом, степень которого не больше n, т. е.

$$E_n = \min_{P_n(z)} \max_{z \in F} |f(z) - P_n(z)|,$$

где $P_n(z)$ – произвольный многочлен, степень которого не больше n.

С. Н. Бернштейн доказал такую теорему [2]:

Пусть

$$F: -1 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1, \quad \operatorname{Im} z = 0, \; -$$

отрезок действительной оси, C_ρ, $\rho > 1$ *– эллипс с фокусами в точках* $z = -1$ *и* $z = 1$, *сумма полуосей которого равна* ρ, *и* K_ρ *– внутренняя область, ограниченная этим эллипсом.*

Для того чтобы непрерывную на множестве F *функцию* $f(z)$ *можно было аналитически продолжить в область* K_ρ, *но нельзя было продолжить в область* K_{ρ_1}, $\rho_1 > \rho$, *необходимо и достаточно, чтобы последовательность наилучших приближений к функции* $f(z)$ *удовлетворяла условию*

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{E_n} = \frac{1}{\rho}.$$

В частности, для того чтобы функция $f(z)$ *была целой, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{E_n} = 0.$$

Уолш [6] распространил теорему Бернштейна на любое замкнутое ограниченное множество F, имеющее положительную емкость (понятие емкости множества см. в [4] или [5]) и связное дополнение*) K. При этих условиях для области K существует функция Грина $G(z)$ с полюсом в бесконечности. Теорему Уолша можно сформулировать такими же словами, как и вышеприведенную теорему Бернштейна, если отбросить условие, что F – отрезок,

*) Чтобы упростить изложение результата Уолша, мы ограничиваемся здесь случаем, когда область K ограничена конечным числом жордановых кривых.

и под K_ρ понимать внутреннюю область, ограниченную линией уровня C_ρ функции Грина $G(z)$:

$$C_\rho : G(z) = \ln \rho, \ \rho > 1.$$

В этой работе мы тоже рассматриваем приближение аналитических функций алгебраическими многочленами на замкнутом и ограниченном (и к тому же бесконечном) множестве F, но не исключаем случая, когда множество F имеет нулевую емкость.

Следуя Фекете [7], рассмотрим функцию

$$V = V(z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j|, \tag{1}$$

где $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n$ — произвольная система точек множества F. Наибольшее значение этой функции (при фиксированном n) обозначим через V_n:

$$V_n = \max_{z_i \in F} V(z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n), \tag{2}$$

а числа

$$\alpha_n = \frac{V_{n+1}}{V_n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

назовем **числами Фекете** множества F. Заметим, что последовательность $\sqrt[n]{\alpha_n}$ имеет, как показал Фекете, конечный предел и этот предел равен емкости множества F.

Теорема 1. *Пусть F — замкнутое ограниченное множество и α_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, — его числа Фекете, $f(z)$ — непрерывная на F функция и E_n — наилучшее приближение к функции $f(z)$ на множестве F алгебраическим многочленом, степень которого не больше n. Для того чтобы функция $f(z)$ была целой, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{E_n}{\alpha_n}} = 0. \tag{3}$$

Если (3) выполнено, то порядок ρ и тип σ целой функции $f(z)$ можно вычислить по формулам [3]

$$\rho = \varlimsup_{n \to \infty} \frac{\frac{\ln n}{n}}{\ln \sqrt[n]{\frac{\alpha_n}{E_n}}}, \tag{4}$$

$$(\sigma e \rho)^{\frac{1}{\rho}} = \varlimsup_{n \to \infty} n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{\frac{E_n}{\alpha_n}}. \tag{5}$$

Замечание 1. Если

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots -$$

целая функция порядка ρ и типа σ, то (см. [3])

$$\begin{gathered}\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}=0,\\ \rho=\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{\ln n}{\ln \dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}}, \\ (\sigma e\rho)^{\frac{1}{\rho}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{\frac{1}{\rho}}\sqrt[n]{|a_n|}.\end{gathered} \tag{6}$$

Обратим внимание на сходство этих формул с полученными выше: *если в* (6) *заменим* $|a_n|$ *на* $E_n:\alpha_n$, *то получим формулы* (3), (4) *и* (5).

Замечание 2. Если множество F имеет положительную емкость c, то как мы уже отметили $\lim\sqrt[n]{\alpha_n}=c$. В этом случае в формулах (3) и (4) *числа* α_n *можно заменить единицей* (таким образом, в этом случае формула (3) тождественна с содержащимся в теореме. Уолша результатом для целых функций), а *формула* (5) *сводится к соотношению*

$$c(\sigma e\rho)^{\frac{1}{\rho}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{\frac{1}{\rho}}\sqrt[n]{E_n}.$$

Последнее соотношение было получено А. В. Батыревым в случае, когда дополнение к множеству F – односвязная область [1].

Ниже мы сформулируем еще одну теорему о приближении аналитических функций многочленами, но прежде вернемся к функции V, определенной в (1). Систему точек $z_{0n}, z_{1n}, z_{2n}, \ldots, z_{nn}$ множества F, для которой функция V принимает наибольшее значение V_n, назовем системой точек Фекете n-ого порядка, а многочлен

$$\Phi_{n+1}(z)=\prod_{k=0}^{n}(z-z_{kn})$$

многочленом Фекете $n+1$-ой степени.

Обозначим через $C(F)$ дополнение к множеству F до всей комплексной плоскости и через K связную компоненту этого дополнения, содержащую бесконечно удаленную точку. Множество F назовем регулярным, если последовательность $\sqrt[n]{|\Phi_n(z)|}$, где $\Phi_n(z)$ – многочлены Фекете множества F, сходится равномерно внутри области K, т. е. сходится равномерно на любом замкнутом и ограниченном множестве, лежащём в K. Предельную Функцию

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\Phi_n(z)|}=\Phi(z)$$

назовем функцией Фекете (множества F).

Пусть C_ρ – линия уровня функции Фекете:

$$C_\rho:\Phi(z)=\rho,\ z\in K.$$

Предположим, что кривая C_ρ состоит из конечного числа жордановых замкнутых кривых, лежащих одна вне другой. Тогда внутренность K_ρ кривой C_ρ является областью, состоящей из конечного числа связных компонент. Область K_ρ назовем допустимой, если она содержит множество F и $\rho > c$, где c — емкость множества F. В дальнейшем увидим, что если K_ρ — допустимая область, то допустимой является и область K_{ρ_1}, $\rho_1 > \rho$. Кроме того $K_{\rho_1} \supset K_\rho$, если $\rho_1 > \rho$.

Так например, если множество F имеет единственную предельную точку z_0, то функция Фекете $\Phi(z) = |z - z_0|$ и допустимой областью является любой круг $|z - z_0| < \rho$, содержащий множество F.

Если F — окружность $|z| = R$, то $\Phi(z) = |z|$ является функцией Фекете, а любой круг $|z| < \rho$, $\rho > R$, — допустимой областью K_ρ.

Теорема 2. *Пусть F — регулярное множество и α_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ — его числа Фекете, $f(z)$ — непрерывная на множестве F функция и E_n — наилучшее приближение к функции $f(z)$ на F алгебраическим многочленом, степень которого не больше n.*

Для того чтобы функцию $f(z)$ можно было аналитически продолжить в допустимую область K_ρ, но нельзя было продолжить в область K_{ρ_1}, $\rho_1 > \rho$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\frac{E_n}{\alpha_n}} = \frac{1}{\rho}\,. \tag{7}$$

Обратим внимание, что и последнее равенство напоминает формулу Коши-Адамара для определения радиуса сходимости степенного ряда.

Замечание 1. Пусть

$$m_n = \min_{P_n(z)} \max_{z \in F} |P_n(z)|,$$

где $P_n(z)$ — произвольный многочлен n-ой степени со старшим коэффициентом, равным единице. Как показал Фекете

$$m_n \leqslant \alpha_{n-1} \leqslant (n+1) m_n,$$

где α_n — числа Фекете. Отсюда легко следует, что *в соотношениях* (3), (4), (5) *и* (7) *числа α_n можно заменить числами m_{n+1}*. Кроме того, последовательность $\sqrt[n]{m_n}$ имеет конечный предел и этот предел равен емкости множества F [4]. Такой же предел имеет, как следует из вышеуказанных неравенств, и последовательность $\sqrt[n]{\alpha_n}$.

Замечание 2. Если замкнутое ограниченное множество F имеет положительную емкость c, $c > 0$, то, как будет показано, множество F является регулярным и

$$\ln \Phi(z) = G(z) + \ln c,$$

где $\Phi(z)$ — функция Фекете множества F, а $G(z)$ — функция Грина с полюсом в бесконечности для области K (напомним, что K содержит бесконечно удаленную точку и является связной компонентой дополнения к множеству F). Поэтому кривая уровня

$$\Phi(z) = \rho, \quad \rho > c,$$

совпадает в случае $c>0$ с кривой уровня

$$G(z)=\ln\frac{\rho}{c}.$$

Кроме того, соотношение (7) принимает вид

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{E_n}=\frac{\rho}{c}.$$

Таким образом, теорема 2 сводится в случае $c>0$ (при добавочном условии, что K_ρ — допустимая область) к вышеупомянутой теореме Уолша.

Доказательство сформулированных теорем

1. При доказательстве теоремы 1 воспользуемся следующими леммами.

Лемма 1. *Пусть F — замкнутое ограниченное множество, α_n и $\Phi_n(z)$ — числа и многочлены Фекете этого множества. Тогда*

$$\max_{z\in F}|\Phi_{n+1}(z)|\leqslant\alpha_n \tag{8}$$

и существует такое число $a>0$, что для любого $r>0$ выполняется неравенство

$$\max_{|\zeta|=r}|\Phi_n(\zeta)|\leqslant(r+a)^n, \tag{9}$$

а для любого $r>a$ — неравенство

$$\min_{|\zeta|=r}|\Phi_n(\zeta)|\geqslant(r-a)^n. \tag{10}$$

Доказательство. По определению многочлена Фекете и обозначениям (1) и (2)

$$|\Phi_{n+1}(z)|\,V_n=V(z,\ z_{0n},\ z_{1n},\ \ldots,\ z_{nn}),$$

где $z_{0n},\ z_{1n},\ z_{2n},\ \ldots,\ z_{nn}$ — корни многочлена $\Phi_{n+1}(z)$. Следовательно, для любого $z\in F$ будет

$$|\Phi_{n+1}(z)|\,V_n\leqslant V_{n+1},$$

что эквивалентно (8).

Обозначим

$$a=\max_{z\in F}|z|. \tag{11}$$

Так как корни z_{kn} многочлена $\Phi_{n+1}(z)$ лежат в множестве F, то и $|z_{kn}|\leqslant a$ при любых k и n. Отсюда легко следуют неравенства (9) и (10).

Лемма 2. *Пусть F — замкнутое ограниченное множество, α_n и $\Phi_n(z)$ — числа и многочлены Фекете этого множества. Если многочлен $P(z)$, степень которого не больше n, ограничен на множестве F числом M:*

$$\max_{z\in F}|P(z)|\leqslant M,$$

то в любой точке $z\bar{\in}F$

$$|P(z)|\leqslant\frac{(n+1)M\,|\Phi_{n+1}(z)|}{\alpha_{n-1}\,d(z)}, \tag{12}$$

где $d(z)$ — расстояние от точки z до множества F.

Доказательство. За узлы интерполяции возьмем корни $z_k = z_{kn}$, $k=0$, 1, 2, ..., n, многочлена $\Phi_{n+1}(z)$ (для краткости записи эти корни обозначаем только одним индексом) и запишем для $P(z)$ интерполяционный многочлен Лагранжа:

$$P(z) = \Phi_{n+1}(z) \sum_{k=1}^{n} \frac{P(z_k)}{(z-z_k) S_k}, \tag{13}$$

где

$$S_k = \prod_{j=0,\ j\neq k}^{n} (z_k - z_j).$$

Покажем, что для $k=0$, 1, 2, ..., n выполнено неравенство

$$|S_k| \geqslant \alpha_{n-1}. \tag{14}$$

Для определенности рассмотрим величину S_0. По обозначению (1)

$$|S_0| = \frac{V(z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n)}{V(z_1, z_2, \ldots, z_n)}.$$

Так как $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n$ система точек Фекете n-го порядка, то по обозначению (2)

$$|S_0| \geqslant \frac{V_n}{V_{n-1}} = \alpha_{n-1}.$$

Заметим еще, что

$$|z - z_k| \geqslant d(z) \text{ и } |P(z_k)| \leqslant M.$$

Из (13), (14) и последних неравенств следует (12).

Лемма 3. *Пусть K, ρ и n — произвольные положительные числа. Функция*

$$g(r) = \frac{\exp K r^{\rho}}{r^n}, \quad r > 0,$$

имеет минимум в точке

$$r_0 = \left(\frac{n}{K\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}$$

и

$$g(r_0) = \min_{r>0} g(r) = \left(\frac{eK\rho}{n}\right)^{\frac{n}{\rho}}.$$

В сказанном убедимся, приравнив нулю логарифмическую производную от функции $g(r)$.

2. Обратимся теперь к доказательству теоремы 1.

Пусть $f(z)$ — непрерывная на множестве F функция и $P_n(z)$ — многочлен n-ой степени, дающий наилучшее приближение к функции $f(z)$ на F, так что

$$E_n = \max_{z\in F} |f(z) - P_n(z)| \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{15}$$

Рассмотрим ряд

$$F(z) = P_1(z) + \sum_{k=1}^{\infty} [P_{k+1}(z) - P_k(z)]. \tag{16}$$

Если выполнено (3), то $E_n \to 0$ и ряд (16) сходится на множестве F к функции $F(z)=f(z)$.

Из (15) следует, что

$$\max_{z\in F} |P_{n+1}(z)-P_n(z)| \leqslant \max_{z\in F} |f(z)-P_n(z)| + \max_{z\in F} f(z)-P_{n+1}(z)| =$$

$$= E_n + E_{n+1} \leqslant 2E_n,$$

а отсюда, по лемме 2 для любого $z\bar{\in} F$

$$|P_{n+1}(z)-P_n(z)| \leqslant \frac{2(n+2)E_n |\Phi_{n+1}(z)|}{\alpha_n d(z)}. \tag{17}$$

Принимая еще во внимание (9) и (11), мы найдем, что для достаточно больших n

$$\max_{|z|\leqslant r} |P_{n+1}(z)-P_n(z)| \leqslant \frac{2(n+2)E_n(r+a)^{n+2}}{\alpha_n(r-a)}. \tag{18}$$

Таким образом, ряд

$$g(r)=\frac{(r+a)^2}{r-a}\sum_{n=1}^{\infty} c_n(r+a)^n, \tag{19}$$

где

$$c_n=\frac{2(n+2)E_n}{\alpha_n}, \tag{20}$$

является мажорантой для ряда (16).

Если выполнено (3), то и

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n}=0.$$

Следовательно, ряд (19) сходится для всех значений $r>a$, а ряд (16) сходится равномерно в любом круге $|z|\leqslant r$. Значит функция $F(z)$ (совпадающая на F с $f(z)$) является целой.

Если выполнено (4), то (см. (20)) и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{\sqrt[n]{c_n}}}=\rho.$$

Поэтому порядок функции $g(r)$ равен ρ, а порядок ρ' функции $F(z)$ удовлетворяет неравенсту

$$\rho' \leqslant \rho. \tag{21}$$

Точно также убедимся, что если выполнено (5), то

$$\sigma' \leqslant \sigma, \tag{22}$$

где σ' — тип функции $F(z)$.

Пусть обратно $F(z)$ — целая функция, совпадающая с $f(z)$ на множестве F. Обозначим попрежнему через $P_n(z)$ многочлен n-ой степени, дающий наилучшее приближение к функции $f(z)$ на F, и через $Q_n(z)$ многочлен n-ой степени, интерполирующий значения функции $f(z)$ в корнях многочлена Фекете $\Phi_{n+1}(z)$. Если положим

$$E'_n=\max_{z\in F} |f(z)-Q_n(z)| = \max_{z\in F} |F(z)-Q_n(z)|, \tag{23}$$

то (см. (15))

$$E_n \leqslant E_n'. \tag{24}$$

Пусть $r > R$, где R — достаточно большое число. По формуле Эрмита для $|z| < r$

$$F(z) - Q_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} \frac{\Phi_{n+1}(z)}{\Phi_{n+1}(\zeta)}\, d\zeta. \tag{25}$$

Если $z \in F$ и $|\zeta| = r$, $r > R$, то (см. (8), (10) и (11))

$$|\zeta - z| \geqslant r - a, \quad |\Phi_{n+1}(\zeta)| \geqslant (r-a)^{n+1},$$
$$|\Phi_{n+1}(z)| \leqslant \alpha_n.$$

Эти неравенства в сочетании с (23), (24) и (25) дают

$$\frac{E_n}{\alpha_n} \leqslant \frac{M(r)\, r}{(r-a)^{n+1}} = \frac{M(r)}{r^n}\, \varphi_n(r), \quad n,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \tag{26}$$

где

$$M(r) = \max_{|\zeta|=r} |F(\zeta)| \quad \text{и} \quad \varphi_n(r) = \frac{r^{n+1}}{(r-a)^{n+1}}.$$

(Заметим, что неравенства (26) только незначительно отличаются от неравенств Коши для коэффициентов степенного ряда.) Из (26) заключаем, что для любого $r > R$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{E_n}{\alpha_n}} \leqslant \frac{1}{r-a}.$$

Устремив $r \to \infty$, получим

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{E_n}{\alpha_n}} = 0. \tag{3}$$

Предположим еще, что порядок функции $F(z)$ равен ρ'. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеется число R_1, $R_1 > R$, что

$$M(r) \leqslant \exp r^{\rho'+\varepsilon},$$

как только $r > R_1$. Предположим, что n — достаточно большое натуральное число, и в неравенство (26) подставим (см. лемму 3)

$$r = r_0 = \left(\frac{n}{\rho'+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\rho'+\varepsilon}}.$$

Мы получим

$$\sqrt[n]{\frac{E_n}{\alpha_n}} \leqslant \left[\frac{(\rho'+\varepsilon)\, e}{n}\right]^{\frac{1}{\rho'+\varepsilon}} \sqrt[n]{\varphi_n(r_0)}.$$

Отсюда несложным вычислением можно показать, что $\rho \leqslant \rho'$, где ρ — число определенное в (4). Но раньше (см. (21)) мы установили обратное неравенство. Значит, $\rho = \rho'$. Допустим теперь, что тип функции $F(z)$ равен σ', а σ — число, определенное в (5). Таким же рассуждением, каким мы установили неравенство $\rho \leqslant \rho'$, находим, что и $\sigma \leqslant \sigma'$. Из (22) следует $\sigma = \sigma'$, чем и заканчивается доказательство теоремы 1.

3. Предположим, что F — регулярное множество, $\Phi_n(z)$ и $\Phi(z)$ — ее многочлены и функция Фекете и K_ρ — допустимая область, ограниченная кривой C_ρ, где

$$C_\rho : \Phi(z) = \rho.$$

Напомним, что последовательность $\sqrt[n]{|\Phi_n(z)|}$ сходится равномерно к $\Phi(z)$ внутри области K, где K — связная компонента дополнения $C(F)$, содержащая бесконечно удаленную точку. Очевидно, что

$$\sqrt[n]{|\Phi_n(z)|} \geqslant d(z),$$

где $d(z)$ — расстояние от точки z до множества F. Поэтому $\Phi(z) \geqslant d(z) > 0$ при $z \in K$ и

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\ln|\Phi_n(z)|\right] = \ln \Phi(z),$$

причем сходимость равномерная внутри области K. Функции $(1:n)\ln|\Phi_n(z)|$ являются гармоническими в области K и имеют полюс в бесконечности с главной частью $\ln|z|$. Значит, и функция $\ln \Phi(z)$ является гармонической в области K и имеет в бесконечности полюс с такой же главной частью. Поэтому, если K_ρ — допустимая область, то допустимыми будут области K_r при $r > \rho$ и области $K_{\rho-\varepsilon}$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$. Кроме того, $K_\rho \subset K_r$, если $r > \rho$.

Таким образом, для достаточно малых $\varepsilon > 0$ кривая $C_{\rho-\varepsilon}$ лежит внутри K и состоит из конечного числа замкнутых жордановых кривых. Кроме того, на $C_{\rho-\varepsilon}$ последовательность $\sqrt[n]{|\Phi_n(z)|}$ сходится равномерно к $\Phi(z)$. Значит при $n > N$, где $N = N(\varepsilon)$ — достаточно большое число, на кривой $C_{\rho-\varepsilon}$ имеют место неравенства

$$(\rho - 2\varepsilon)^n \leqslant |\Phi_n(z)| \leqslant \left(\rho - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n. \tag{27}$$

4. Пусть $f(z)$ — непрерывная на регулярном множестве F функция и выполнено соотношение

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{E_n}{\alpha_n}} \leqslant \frac{1}{\rho}, \tag{28}$$

где E_n — наилучшие приближения к функции $f(z)$ на множестве F, α_n — числа Фекете этого множества и K_ρ — допустимая область.

Из этих условий следует, что $E_n \to 0$. В самом деле, если допустим противное, то в силу монотонности последовательности E_n получим $E_n \geqslant b > 0$ и неравенство (28) сводится к

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} \geqslant \rho.$$

Но предел в левой части равен (как уже было отмечено) емкости c множества F. Значит $c \geqslant \rho$, но это противоречит условию, что K_ρ — допустимая область.

Как при доказательстве теоремы 1 обозначим через $P_n(z)$ многочлен n-ой степени, дающий наилучшее приближение к функции $f(z)$ на множестве F

(см. (15)), и рассмотрим ряд (16). Так как $E_n \to 0$, то этот ряд сходится на множестве F к функции $f(z)$. Для оценки членов ряда (16) воспользуемся опять неравенством (17). Зафиксируем число $\varepsilon > 0$ и выберем N так, чтобы было выполнено (27). В силу (28) имеется такое число $N_1 > N$, что при $n > N_1$ выполняется неравенство

$$2(n+2)\,\frac{E_n}{\alpha_n} < \frac{1}{\left(\rho-\frac{\varepsilon}{4}\right)^n}\,.$$

Отсюда и из (17) и (27) получим, что на кривой $C_{\rho-\varepsilon}$

$$|P_{n+1}(z)-P_n(z)| \leqslant \left(\frac{\rho-\frac{\varepsilon}{2}}{\rho-\frac{\varepsilon}{4}}\right)^n \cdot \frac{\left(\rho-\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}{d}\,,$$

где d — расстояние от кривой $C_{\rho-\varepsilon}$ до множества F и $n > N_1$. Это же неравенство выполнено в силу принципа максимума модуля и в области $K_{\rho-\varepsilon}$. Значит ряд (16) сходится равномерно в области $K_{\rho-\varepsilon}$ и его сумма $F(z)$ будет аналитической функцией в этой области. Так как число $\varepsilon > 0$ можно зафиксировать как угодно малым, то функция $F(z)$ является аналитической и в области K_ρ.

Итак, мы доказали достаточность условия (28) для аналитического продолжения функции $f(z)$ в область K_ρ. Докажем теперь необходимость этого условия.

Как в доказательстве теоремы 1, обозначим через $Q_n(z)$ многочлен n-ой степени, интерполирующий значения аналитической в K_ρ функции $f(z)$ в корнях многочлена Фекете $\Phi_{n+1}(z)$. По формуле Эрмита при $z \in K_{\rho-\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$ — достаточно малое число)

$$F(z)-Q_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{\rho-\varepsilon}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\frac{\Phi_{n+1}(z)}{\Phi_{n+1}(\zeta)}\,d\zeta.$$

Воспользовавшись неравенством (27) из последнего представления легко получим (ср. с аналогичной ситуацией в доказательстве теоремы 1), что при $n > N$

$$\frac{E_n}{\alpha_n} \leqslant \frac{L\,M(\rho-\varepsilon)}{2\pi d\,(\rho-2\varepsilon)^{n+1}}\,,$$

где L — длина кривой $C_{\rho-\varepsilon}$,

$$M(\rho-\varepsilon) = \max_{z\in C_{\rho-\varepsilon}} |f(z)|$$

и d — расстояние от кривой $C_{\rho-\varepsilon}$ до множества F. Отсюда получаем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{E_n}{\alpha_n}} \leqslant \frac{1}{\rho-2\varepsilon}$$

и затем из-за произвольности $\varepsilon > 0$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{E_n}{\alpha_n}} \leqslant \frac{1}{\rho}\,.$$

Чтобы закончить доказательство теоремы 2, нам осталось только заметить, что в случае, когда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{E_n}{\alpha_n}} \leqslant \frac{1}{\rho_1}, \tag{29}$$

где $\rho_1 > \rho$, функцию $f(z)$ можно будет, по доказанному выше, аналитически продолжить в область K_{ρ_1}, $\rho_1 > \rho$, и, обратно, если функция $f(z)$ продолжима в область K_{ρ_1}, то выполнено (29).

5. Нам осталось доказать сказанное в замечании 2 к теореме 2.

Рассмотрим последовательность функций

$$R_n(z) = G(z) + \frac{1}{n}\,[\ln \alpha_{n-1} - \ln \Phi_n(z)], \tag{30}$$

где $G(z)$ – функция Грина с полюсом в бесконечности для области K, а α_n и $\Phi_n(z)$ – числа и многочлены Фекете множества F. В окрестности точки $z=\infty$ функция Грина $G(z)$ представима в виде [5]

$$G(z) = \ln|z| - \ln c + o\left(\frac{1}{z}\right), \tag{31}$$

где c, $c>0$ – емкость множества F. Из (30) и (31) легко следует, что функции $R_n(z)$ являются гармоническими в области K и

$$R_n(\infty) = \frac{1}{n}\ln \alpha_{n-1} - \ln c.$$

Отсюда и из сказанного в замечании 1 к теореме 2 получаем

$$\lim_{n\to\infty} R_n(\infty) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\ln\alpha_{n-1} - \ln c\right] = 0. \tag{32}$$

Так как функция Грина $G(z)$ положительна в области K, то из (30) и (8) вытекает, что предельные значения функции $R_n(z)$, когда $z \in K$ стремится к границе области K, являются положительными. По принципу минимума $R_n(z) \geqslant 0$ во всей области K.

Зафиксируем произвольную область K_0, $\overline{K}_0 \subset K$ ($\overline{K}_0$ – замыкание области K_0), содержащую бесконечно удаленную точку, и выберем число R настолько большим, чтобы граница области K_0 лежала в круге $|z| \leqslant R$. Для $z = r\exp(i\varphi)$, $r > R$ функцию $R_n(z)$ можно представить интегралом Пуассона

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R_n(Re^{i\Theta})\,\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\Theta - \varphi)}\,d\Theta$$

и, так как функция $R_n(z)$ положительна в области K, то

$$0 \leqslant R_n(z) \leqslant \frac{R+r}{r-R}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R_n(Re^{i\Theta})\,d\Theta = \frac{r+R}{r-R}\,R_n(\infty). \tag{33}$$

Из (32) и (33) следует, что в области $|z| \geqslant R^1 > R$, последовательность $R_n(z)$ сходится равномерно к нулю. Повторением только что приведенного рассуждения заключаем (ср. с доказательством теоремы Гарнака [5]), что последовательность $R_n(z)$ сходится равномерно к нулю в области $\overline{K}_0$. Но это означает (см. (30) и (32)), что последовательность $(1:n)\ln|\Phi_n(z)|$ сходится равномерно внутри области K к функции $G(z)+\ln c$.

Вильнюсский Государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию 24.XII.1968

Литература

1. А. В. Батырев, К вопросу о наилучшем приближении аналитических функций полиномами, ДАН СССР, 76, 2, 1951, 173–175.
2. В. Л. Гончаров, Теория интерполирования и приближения функций, Москва, 1954.
3. А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, М.-Л., 1950.
4. Р. Неванлинна, Однозначные аналитические функции, М.–Л., 1941.
5. С. Стоилов, Теория функций комплексного переменного, Москва, 1962.
6. Дж. Л. Уолш, Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, Москва, 1961.
7. M. Fekete, Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten, Math. Zeitscrift, 17, 1923, 228–249.

APIE TOLYDINIŲ FUNKCIJŲ APROKSIMAVIMĄ POLINOMAIS

A. Naftalevičius

(*Reziumė*)

Tarkime, kad F yra aprėžta ir uždara kompleksinės plokštumos aibė. Tolydinės aibėje F funkcijos geriausios aproksimacijos polinomais laipsnis yra tampriai susijęs su tos funkcijos analiziniu pratęsiamumu. Tas klausimas daug nagrinėtas tuo atveju, kai aibės F talpa yra teigiama. Straipsnyje nagrinėjamas ir tas atvejis, kai aibės F talpa yra lygi nuliui.

ÜBER DIE APPROXIMATION VON ANALYTISCHEN FUNKTIONEN DURCH ALGEBRAISCHE POLYNOME

A. Naftalewitsch

(*Zuzammenfassung*)

Die Frage über den Zusammenhang zwischen der möglichen Güte der Approximation einer in F (wo F eine beschränkte abgeschlossene Punktmenge der z-Ebene ist) stetigen Funktion $f(z)$ durch Palynome und der analytischen Fortsetzbarkeit dieser Funktion ist häufig untersucht worden im Falle, wenn die Kapazität der Menge F positiv ist. In dieser Arbeit wird dieselbe Frage auch für den Fall, wenn F eine Menge von der Kapazität Null ist, behandelt.