УДК – 517.941

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ИНТЕГРИРУЕМОЙ В КОНЕЧНОМ ВИДЕ

В. М. Меркис, Н. М. Акуцевичюте

В работе [1] было показано, что существует два вида некоммутирующих матриц второго порядка U_1 и U_2 (формулы (6) и (10)), обладающих свойством

$$\left[U_1 [U_2 U_1]\right]=0. \tag{1}$$

Однако, оказывается что указанные виды матриц U_1 и U_2 (формулы (6) и (10)) можно объединить несколько иначе подобрав входящие параметры. Именно, общий вид некоммутирующих матриц U_1 и U_2, удовлетворяющих условию (1), можно записать так:

$$U_1=\begin{Vmatrix} a+2mc, & -m^2c \\ c, & a \end{Vmatrix}, \quad U_2=\begin{Vmatrix} b+2nd, & m(m-2n)d \\ d, & b \end{Vmatrix}. \tag{2}$$

Рассмотрим теперь систему линейных однородных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dX}{dt}=X\left(A(t)+B(t)\right), \tag{3}$$

где

$$A(t)=\sum_{i=1}^{p} A_i\varphi_i(t), \qquad B(t)=\sum_{j=1}^{q} B_j\psi_j(t),$$

причем A_i, B_j – постоянные матрицы второго порядка, а $\varphi_i(t)$, $\psi_j(t)$ – непрерывные скалярные функции от t. Пусть

$$[A_iA_j]=0\,(i,j=1,\ \cdots,\ p),\ [B_iB_j]=0\,(i,\ j=1,\ \cdots,\ q) \tag{4}$$

и некоторая линейная комбинация матриц A_i

$$A_0=\sum_{i=1}^{p} \lambda_i A_i \tag{5}$$

имеет взаимно простые элементарные делители. Тогда, по теореме И. М. Салаховой и Г. Н. Чеботарева [2], для того чтобы интегральная матрица системы (3), нормированная при t=0, была представима в виде

$$X=e^{M(t)}e^{D(t)},$$

где

$$D(t)=\int_0^t B(\tau)\,d\tau, \qquad M(t)=\int_0^t e^{D(\tau)}A(\tau)e^{-D(\tau)}d\tau$$

и

$$\left[M\frac{dM}{dt}\right]=0,$$

необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\left[A_0\left[B_kA_0\right]\right]=0\,(k=1,\ \ldots,\ q), \tag{6_1}$$

или

$$\left[A_i\left[B_kA_j\right]\right]=0\,(i,\ j=1,\ \ldots,\ p;\qquad k=1,\ \ldots,\ q), \tag{6_2}$$

или, наконец,

$$\left[A(t)\left[B(t)A(t)\right]\right]=0 \tag{6_3}$$

при произвольных функциях $\varphi_i(t)$ и $\psi_j(t)$.

На основе [1], а также принимая во внимание (2), общий вид матриц A_i и B_j, удовлетворяющих условиям (4), (5), (6) можно записать так

$$A_i=\left\|\begin{matrix} a_i+2mc_i, & -m^2c_i \\ c_i\ , & a_i \end{matrix}\right\|,\qquad B_j=\left\|\begin{matrix} b_j+2nd_j, & m(m-2n)d_j \\ d_j\ , & b_j \end{matrix}\right\|.$$

Следовательно,

$$A(t)=\left\|\begin{matrix} a(t)+2mc(t), & -m^2c(t) \\ c(t), & a(t) \end{matrix}\right\|,$$

$$B(t)=\left\|\begin{matrix} b(t)+2nd(t), & m(m-2n)d(t) \\ d(t), & b(t) \end{matrix}\right\|,$$

где

$$a(t)=\sum_{i=1}^{p}a_i\varphi_i(t),\qquad c(t)=\sum_{i=1}^{p}c_i\varphi_i(t),$$

$$b(t)=\sum_{j=1}^{q}b_j\psi_j(t),\qquad d(t)=\sum_{j=1}^{q}d_j\psi_j(t).$$

Характеристические числа матриц $A(t)$ и $B(t)$ соответственно будут

$$\lambda_1=\lambda_2=a(t)+mc(t)$$

и

$$\mu_1=b(t)+md(t),$$

$$\mu_2=b(t)+(2n-m)d(t).$$

Следовательно, можно написать

$$B(t)=S\left\|\begin{matrix} b(t)+md(t), & 0 \\ 0 & b(t)+(2n-m)d(t) \end{matrix}\right\|S^{-1},$$

где

$$S=\left\|\begin{matrix} m, & 2n-m \\ 1, & 1 \end{matrix}\right\|,$$

заметим, что $D(S)=2(m-n)\neq 0$, так как в противном случае

$$[A(t)B(t)]=0.$$

Теперь легко получаем, что

$$e^{\pm D(t)}=S\left\|\begin{matrix} e^{\pm\left(\int\limits_0^t b(\tau)d\tau+m\int\limits_0^t d(\tau)d\tau\right)} & 0 \\ 0 & e^{\pm\left(\int\limits_0^t b(\tau)d\tau+(2n-m)\int\limits_0^t d(\tau)d\tau\right)}\end{matrix}\right\|S^{-1}$$

и

$$S^{-1}A(t)S=\left\|\begin{matrix} a(t)+mc(t), & 2(n-m)c(t) \\ 0, & a(t)+mc(t)\end{matrix}\right\|.$$

Пользуясь этим, находим

$$e^{D(t)}A(t)e^{-D(t)}=S\left\|\begin{matrix} a(t)+mc(t), & 2(n-m)c(t)e^{2(m-n)\int\limits_0^t d(\tau)d\tau} \\ 0, & a(t)+mc(t)\end{matrix}\right\|S^{-1}.$$

На основании последних формул, интегральную матрицу системы (3) запишем в виде

$$X(t)=e^{\int\limits_0^t e^{D(\tau)}A(\tau)e^{-D(\tau)}d\tau}e^{D(t)}=$$

$$=e^{\int\limits_0^t \left(a(\tau)+b(\tau)+mc(\tau)+(2n-m)\,d(\tau)\right)d\tau}\times$$

$$\times S\left\|\begin{matrix} e^{2(m-n)\int\limits_0^t d(\tau)d\tau}, & 2(n-m)\int\limits_0^t c(\tau)e^{2(m-n)\int\limits_0^\tau d(u)du}d\tau \\ 0, & 1\end{matrix}\right\|S^{-1}.$$

Отсюда легко получим след и определитель матрицы $X(t)$, играющие очень важную роль при исследовании поведения решений системы (3). Именно

$$\sigma\left(X(t)\right)=e^{\int\limits_0^t \left(a(\tau)+b(\tau)+mc(\tau)\right)d\tau}\left(e^{m\int\limits_0^t d(\tau)d\tau}+e^{(2n-m)\int\limits_0^t d(\tau)d\tau}\right),$$

$$D\left(X(t)\right)=e^{2\int\limits_0^t \left(a(\tau)+b(\tau)+mc(\tau)+nd(\tau)\right)d\tau}.$$

В заключение отметим, что полученные здесь результаты являются более общими, чем в § 5 работы [3].

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
18. XII. 1968

Литература

1. В. М. Меркис, Лит. матем. сб. VIII, № 2 (1968), 289–295.
2. И. М. Салахова, Г. Н. Чеботарев, Изв. вузов. Матем., № 3, 230–234, 1960.
3. Н. П. Еругин, Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, Минск, 1963.

APIE VIENĄ DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SISTEMĄ, INTEGRUOJAMĄ BAIGTINIU PAVIDALU

V. Merkys, N. Akucevičiūtė

(*Reziumė*)

Darbe yra gautas bendras pavidalas antros eilės matricų, tenkinančių I. Salachovos ir G. Čebotariovo teoremos sąlygas [2], ir, naudojantis šia teorema, rasta (3) sistemos integralinė matrica.

ÜBER EIN SYSTEM DER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN, DAS IN GESCHLOSSENER FORM INTEGRIERBAR IST

V. Merkys, N. Akucevičiūtė

(*Zusammenfassung*)

In der vorliegenden Arbeit untersuchten wir allgemeine Matrizen zweiter Ordnung, die die Bedingungen des Theorems von I. Salachova und G. Tschebotarev genügen. Auf Grund dieses Theorems wurde die Integralmatrix des Systems (3) gefunden.