УДК–513

О ГЕОМЕТРИИ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

З. Ю. Лупейкис

Некоторые вопросы локальной геометрической теории систем дифференциальных уравнений рассмотрены в работах В. И. Близникаса [4], [5], [6], [8], А. М. Васильева [9], Г. М. Кузьминой [10], Э. М. Шварцбурд [13], А. Кризтена [11] и др. Например, в работе Г. М. Кузьминой [10] рассмотрена геометрия системы двух уравнений в частных производных первого порядка от двух неизвестных функций и трех аргументов, а работа А. М. Васильева [9] посвящена геометрии системы трех дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка при трех независимых функциях и двух независимых переменных. К ней примыкает и работа Э. М. Шварцбурд [13], в которой рассмотрена система четырех уравнений с частными производными первого порядка. В работе В. И. Близникаса [6] рассмотрена локальная теория квазилинейных систем дифференциальных уравнений, в которой число дифференциальных уравнений не превышает числа неизвестных функций, а число независимых аргументов – произвольное (конечное).

Из систем дифференциальных уравнений второго и более высокого порядка наиболее глубоко разработаны специальные системы, т.е. системы разрешенные относительно старших производных. К числу таких систем принадлежат системы дифференциальных уравнений, определяющие геодезические кривые, пространства аффинной связности. В работе В. И. Близникаса [5] рассмотрена геометрия системы дифференциальных уравнений, разрешенных относительно частных производных второго порядка, в которой число неизвестных функций больше числа уравнений, а число независимых переменных – произвольное (конечное), а в работе [4] приведен новый подход к геометрии систем дифференциальных уравнений любого порядка. В работе А. Кризтена [11] рассматривается геометрия одного дифференциального уравнения с частными производными второго порядка.

Настоящая работа посвящена геометрии квазилинейных систем дифференциальных уравнений второго порядка, не разрешенных относительно производных второго порядка, в которых число дифференциальных уравнений m не превышает числа неизвестных функций $2n$. Рассмотрены случаи: $m=n$; $m=n+1$; $m=4$, $n=2$; $m=1$, n – любое целое число; $m=2$, $n=3$; $m=3$, $n=2$; $m=6$, $n=3$ при условии, что система функций, являющихся коэффициентами при производных второго порядка, зависит только от неизвестных функций и при условии, что эта система функций зависит от неизвестных функций и от производных первого порядка.

Работа выполнена теоретико-групповым методом Г. Ф. Лаптева [12]. Часть результатов этой статьи была доложена автором на Девятой конференции математиков Литвы (Вильнюс 1968 г.) и на Третьей Прибалтийской геометрической конференции по вопросам дифференциальной геометрии (Паланга 1968 г.).

§ 1. Общие вопросы

Пусть V_n — n-мерное дифференцируемое многообразие, локальные координаты x^i которого являются решением вполне интегрируемой системы

$$\omega^i=0,$$

т.е. структурные уравнения этого многообразия имеют вид

$$D\omega^i=\omega^j\wedge\omega_j^i, \tag{1.1}$$
$$(i,\ j,\ k,\ \ldots=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ \alpha,\ \beta,\ \ldots=1,2,\ \ldots,\ m).$$

Продолжение этих структурных уравнений дает

$$D\omega_j^i=\omega_j^l\wedge\omega_l^i+\omega^l\wedge\omega_{jl}^i, \tag{1.2}$$
$$D\omega_{jk}^i=\omega_{jk}^l\wedge\omega_l^i+\omega_j^l\wedge\omega_{lk}^i+\omega_k^l\wedge\omega_{jl}^i+\omega^l\wedge\omega_{jlk}^i.$$

Локальные координаты x^i, $v^{(1)i}$, $v^{(2)i}$ линейного элемента второго порядка $(x^i,\ v^{(1)i},\ v^{(2)i})$, т.е. локальные координаты точки пространства $L_n^{(2)}$ являются решениями вполне интегрируемой системы

$$\omega^i=0,$$
$$\Theta^{(1)i}\equiv dv^{(1)i}+v^{(1)k}\,\omega_k^i=0, \tag{1.3}$$
$$\Theta^{(2)i}\equiv dv^{(2)i}+v^{(2)k}\,\omega_k^i+\omega_{kl}^i\,v^{(1)k}\,v^{(1)l}=0.$$

Структурные уравнения пространства $L_n^{(2)}$ можно записать в следующем виде (см. [4]):

$$D\omega^i+\omega^j\wedge\omega_j^i,$$
$$D\Theta^{(1)i}=\Theta^{(1)k}\wedge\omega_k^i+\omega^k\wedge\Theta_k^{(1)i}, \tag{1.4}$$
$$D\Theta^{(2)i}=\Theta^{(2)k}\wedge\omega_k^i+2\Theta^{(1)k}\wedge\Theta_k^{(1)i}+\omega^k\wedge\Theta_k^{(2)i},$$

где

$$\Theta_j^{(1)i}=v^{(1)l}\,\omega_{jl}^i,$$
$$\Theta_j^{(2)i}=v^{(2)l}\,\omega_{jl}^i+\omega_{ljk}^i\,v^{(1)l}\,v^{(1)k}.$$

Так как в голономной системе координат $\omega_{kj}^i=\omega_{jk}^i=0$, то в этой системе можно считать, что

$$v^{(1)i}=\frac{dx^i}{dt},\quad v^{(2)i}=\frac{d^2x^i}{dt^2}.$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$f^\alpha\left(x^i,\ \frac{dx^i}{dt},\ \frac{d^2x^i}{dt^2}\right)=0. \tag{1.5}$$

Если пространство L_n^2 отнесено к голономной системе координат, то систему уравнений (1.5) мы можем рассматривать как систему конечных уравнений $3n-m$ -мерной поверхности в $3n$ -мерном пространстве $L_n^{(2)}$.

Если поверхность (1.5) рассматривать в неголономной системе координат пространства $L_n^{(2)}$, то всегда можно считать, что эта поверхность определяется системой дифференциальных уравнений следующего вида:

$$a_k^\alpha \Theta^{(2)k}+b_k^\alpha \Theta^{(1)k}+c_k^\alpha \omega^k=0. \tag{1.6}$$

Пусть

$$\Theta^\alpha\equiv a_i^\alpha \Theta^{(2)i}+b_i^\alpha \Theta^{(1)i}+c_i^\alpha \omega^i. \tag{1.7}$$

Эта система форм является вполне интегрируемой системой форм тогда и только тогда, когда

$$D\Theta^\alpha=\Theta^\beta\wedge\Theta_\beta^\alpha. \tag{1.8}$$

Будем считать, что

$$D\Theta_\beta^\alpha=\Theta_\beta^\gamma\wedge\Theta_\gamma^\alpha. \tag{1.9}$$

Докажем следующую лемму.

Лемма. *Система форм* (1.7) *является решением внешних уравнений* (1.8) *тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned}
&\nabla a_k^\alpha=a_{k(2)l}^\alpha \Theta^{(2)l}+a_{k(1)l}^\alpha \Theta^{(1)l}+a_{kl}^\alpha \omega^l,\\
&\nabla b_k^\alpha-2a_l^\alpha \Theta_k^{(1)l}=a_{l(1)k}^\alpha \Theta^{(2)l}+b_{k(1)l}^\alpha \Theta^{(1)l}+b_{kl}^\alpha \omega^l,\\
&\nabla c_k^\alpha-a_l^\alpha \Theta_k^{(2)l}-b_l^\alpha \Theta_k^{(1)l}=a_{lk}^\alpha \Theta^{(2)l}+b_{lk}^\alpha \Theta^{(2)l}+c_{kl}^\alpha \omega^l,
\end{aligned} \tag{1.10}$$

где

$$\nabla a_k^\alpha\equiv da_k^\alpha-a_l^\alpha \omega_k^l+a_k^\beta \Theta_\beta^\alpha,$$

и

$$a_{k(2)l}^\alpha=a_{l(2)k}^\alpha,\quad b_{k(1)l}^\alpha=b_{l(1)k}^\alpha,\quad c_{kl}^\alpha=c_{lk}^\alpha. \tag{1.10$'$}$$

Доказательство. Так как

$$\begin{aligned}
D\Theta^\alpha=&(da_k^\alpha-a_l^\alpha\omega_k^l)\wedge\Theta^{(2)k}+(db_k^\alpha-b_l^\alpha\omega_k^l-2a_l^\alpha\Theta_k^{(1)l})\wedge\Theta^{(1)k}+\\
&+(dc_k^\alpha-c_l^\alpha\omega_k^l-a_l^\alpha\Theta_k^{(2)l}-b_l^\alpha\Theta_k^{(1)l})\wedge\omega^k,
\end{aligned} \tag{1.11}$$

то, вставляя выражения (1.7) и (1.11) и (1.8) получим

$$\begin{aligned}
&\nabla a_k^\alpha\wedge\Theta^{(2)k}+(\nabla b_k^\alpha-2a_l^\alpha\Theta_k^{(1)l})\wedge\Theta^{(1)k}+(\nabla c_k^\alpha-a_l^\alpha\Theta_k^{(2)l}-\\
&-b_l^\alpha\Theta_k^{(1)l})\wedge\omega^k=0.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Из (1.12), в силу (1.10) и (1.10$'$), следует утверждение леммы.

Придерживаясь терминологии работы [7], в просранстве $L_n^{(2)}$ можно определить неголономную поверхность уравнениями

$$\begin{aligned}
&\nabla a_k^\alpha=a_{k(2)l}^\alpha \Theta^{(2)l}+a_{k\,1)l}^\alpha \Theta^{(1)l}+a_{kl}^\alpha \omega^l,\\
&\nabla b_k^\alpha-2a_l^\alpha \Theta_k^{(1)l}=b_{k(2)l}^\alpha \Theta^{(2)l}+b_{k(1)l}^\alpha \Theta^{(1)l}+b_{kl}^\alpha \omega^l,\\
&\nabla c_k^\alpha-a_l^\alpha \Theta_k^{(2)l}-b_l^\alpha \Theta_k^{(1)l}=c_{k(2)l}^\alpha \Theta^{(2)l}+c_{k(1)l}^\alpha \Theta^{(1)l}+c_{kl}^\alpha \omega^l.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

При этом условия (1.10$'$), вообще говоря, не выполняются.

Мы рассмотрим специальную неголономную поверхность, т.е. будем считать, что

$$a^{\alpha}_{k(2)l}=b^{\alpha}_{k(2)l}=c^{\alpha}_{k(2)l}=0. \tag{1.14}$$

Эти условия означают, что коэффициенты форм вида (1.7) зависят только от переменных $(x^i, v^{(1)i})$, иначе говоря, формы вида (1.7) соответствуют системе дифференциальных уравнений типа

$$a^{\alpha}_i(x^j, v^{(1)j})\, v^{(2)i}+h^{\alpha}(x^j, v^{(1)j})=0. \tag{1.15}$$

В дальнейшем будем рассматривать только системы (1.15). Этой системе соответствует специальная неголономная поверхность, дифференциальные уравнения которой можно записать в виде

$$\begin{aligned}&\nabla a^{\alpha}_i-a^{\alpha}_{i(1)k}\,\Theta^{(1)k}+a^{\alpha}_{ik}\,\omega^k,\\ &\nabla h^{\alpha}-a^{\alpha}_i\,\omega^i_{kl}\,v^{(1)k}\,v^{(1)l}=h^{\alpha}_i\,\omega^i+h^{\alpha}_{(1)i}\,\Theta^{(1)i}.\end{aligned} \tag{1.16}$$

Из системы дифференциальных уравнений (1.16) следует, что функции $a^{\alpha}_i(x^j, v^{(1)j})$ и $h^{\alpha}(x^j, v^{(1)j})$ образуют поле дифференциально-геометрического объекта $(a^{\alpha}_i, h^{\alpha})$, определяемого на пространстве линейных элементов первого порядка $L^{(1)}_n$.

Геометрией системы дифференциальных уравнений (1.15) назовем геометрию пространства линейных элементов первого порядка $L^{(1)}_n$ с дифференциально-геометрическим объектом $(a^{\alpha}_i, h^{\alpha})$.

Если

$$\begin{aligned}&\bar v^{(1)i}=\rho v^{(1)i},\\ &\bar v^{(2)i}=\rho^2\, v^{(2)i},\end{aligned} \tag{1.17}$$

то формы $\Theta^{(1)i}$ и $\Theta^{(2)i}$ преобразуются по закону:

$$\begin{aligned}&\bar\Theta^{(1)i}=\rho\,(\Theta^{(1)i}+v^{(1)i}\,\mathrm{d}\ln\rho),\\ &\bar\Theta^{(2)i}=\rho^2\,(\Theta^{(2)i}+2v^{(2)i}\,\mathrm{d}\ln\rho),\end{aligned} \tag{1.18}$$

Для того, чтобы преобразования (1.17) сохранили вид системы дифференциальных уравнений (1.15) (в дальнейшем изложении это свойство будем называть условиями однородности) удобнее потребовать выполнения условия $\bar a^{\alpha}_i=a^{\alpha}_i$. Тогда

$$\bar h^{\alpha}=\rho^2\, h^{\alpha}. \tag{1.19}$$

Можно принять $\bar h^{\alpha}=h^{\alpha}$. Тогда $\bar a^{\alpha}_i=\rho^{-2}a^{\alpha}_i$.

Основная задача этой заметки – построение объектов аффинных связностей Γ^i_{jk} пространства $L^{(1)}_n$, образованных из дифференциальных продолжений объекта $(a^{\alpha}_i, h^{\alpha})$ (или его подобъектов, полученных из дифференциальных продолжений объекта $(a^{\alpha}_i, h^{\alpha})$). Из структуры дифференциальных уравнений (1.16) следует, что для построения объектов аффинных связностей необходимо разрешить эти системы (или другие, из них полученные) относительно форм ω^i_{jk}. Решение этой задачи существенно зависит от соотношения размерностей m и n. В настоящей заметке рассмотрены случаи: $m=n$; $m=n+1$; $m=1$, n-любое конечное число; $m=4$, $n=2$; $m=2$, $n=3$; $m=3$, $n=2$; $m=6$

$n=3$ при условии, что система функций a_i^α, являющихся коэффициентами при производных второго порядка, зависит только от неизвестных функций и при условии, что a_i^α зависит от неизвестных функций и от их производных первого порядка. При этом всегда предполагается, что число дифференциальных уравнений m не превышает числа неизвестных $2n$, т.е. $m\leqslant 2n$.

§ 2. Случай $m=n$

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (1.15) при $m=n$, но будем считать, что $\omega_j^i \neq \Theta_\beta^\alpha$ при $i=\alpha$ и $j=\beta$.

Продолжая систему дифференциальных уравнений (1.16), получим

$$\begin{gathered}\nabla a_{ij}^\alpha - a_k^\alpha\,\omega_{ij}^k - a_{i(1)k}^\alpha\,\Theta_j^{(1)k} = a_{ijk}^\alpha\,\omega^k + \breve{a}_{ij(1)k}^\alpha\,\Theta^{(1)k},\\ \nabla a_{i(1)j}^\alpha = a_{i(1)jk}^\alpha\,\omega^k + a_{i(1)j(1)k}^\alpha\,\Theta^{(1)k},\\ \nabla h_i^\alpha - a_l^\alpha\,\omega_{kih}^l\,v^{(1)k}\,v^{(1)h} - a_{li}^\alpha\,\omega_{kh}^l\,v^{(1)k}\,v^{(1)h} = h_{il}^\alpha\,\omega^l + \breve{h}_{i(1)l}^\alpha\,\Theta^{(1)l},\\ \nabla h_{(1)i}^\alpha - 2a_i^\alpha\,\Theta_i^{(1)l} - a_{l(1)i}^\alpha\cdot\omega_{kh}^l\,v^{(1)k}\,v^{(1)h} = h_{(1)il}^\alpha\,\omega^l + h_{(1)i(1)l}^\alpha\,\Theta^{(1)l},\end{gathered} \tag{2.1}$$

где

$$a_{ijk}^\alpha = a_{ikj}^\alpha,\quad \breve{a}_{ij(1)k}^\alpha = a_{i(1)jk}^\alpha,\quad a_{i(1)j(1)k}^\alpha = a_{i(1)k(1)j}^\alpha,$$

$$h_{il}^\alpha = h_{li}^\alpha,\quad \breve{h}_{i(1)l}^\alpha = h_{(1)il}^\alpha,\quad h_{(1)i(1)j}^\alpha = h_{(1)j(1)i}^\alpha.$$

Если $m=n$, то матрица $\| a_i^\alpha \|$ является квадратичной (α — номер строки, i — номер столбца) и, естественно, можно рассматривать тот случай, когда

$$a = \det \| a_i^\alpha \| \neq 0.$$

Например, $a\neq 0$ при $a_i^\alpha=\delta_i^\alpha$, где δ_i^α — символы Кронеккера. В этом случае всегда существует система величин:

$$\overset{*}{a}{}_\alpha^i = \frac{\partial \ln a}{\partial a_i^\alpha}, \tag{2.2}$$

которые образуют тензор, обратный тензору a_i^α, компоненты которого удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\nabla \overset{*}{a}{}_\alpha^i = \overset{*}{a}{}_{\alpha j}^i\,\omega^j + \overset{*}{a}{}_{\alpha(1)j}^i\,\Theta^{(1)j}, \tag{2.3}$$

причем

$$a_i^\alpha\,\overset{*}{a}{}_\alpha^j = \delta_i^j,\quad a_i^\alpha\,\overset{*}{a}{}_\beta^i = \delta_\beta^\alpha. \tag{2.4}$$

Из условий однородности системы (1.15) при преобразованиях, определенных формулами (1.17), следует

$$a_{i(1)j}^\alpha\,v^{(1)j} = 0. \tag{2.5}$$

Свертывая систему величин $h_{(1)j}^\alpha$ с тензором $\overset{*}{a}{}_\alpha^i$ и $v^{(1)j}$, учитывая последнее уравнение системы (2.1) и формулы (2.3), (2.5), получим систему величин

$$H^i = \frac{1}{4}\,h_{(1)j}^\alpha\,\overset{*}{a}{}_\alpha^i\,v^{(1)j}, \tag{2.6}$$

которая удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\nabla H^i - \frac{1}{2}\,\omega_{lk}^i\,v^{(1)l}\,v^{(1)k} = H_j^i\,\omega^j + {}'H_j^i\,\Theta^{(1)j}, \tag{2.7}$$

причем

$$\bar{H}^i = \rho^2 H^i.$$

После двухкратного частичного продолжения этой системы получим систему величин $''H^i_{jk}$, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений

$$\nabla'' H^i_{jk} - \omega^i_{jk} = ''H^i_{jkl}\,\omega^l + '''H^i_{jkl}\,\Theta^{(1)l}, \tag{2.8}$$

где

$$''H^i_{jk} = ''H^i_{kj}, \quad '''\bar{H}^i_{jk} = '''H^i_{jk}.$$

Из полученной системы дифференциальных уравнений следует, что величины $''H^i_{jk}$ образуют объект симметрической аффинной связности, инвариантный относительно преобразований, определенных формулами (1.17).

2. Если $m=n$ и $a^\alpha_i = a^\alpha_i\,(x^j)$, то система дифференциальных уравнений дифференциально-геометрического объекта $(a^\alpha_i,\ h^\alpha)$ имеет вид:

$$\nabla a^\alpha_i = a^\alpha_{ij}\,\omega^j, \tag{2.9}$$

$$\nabla h^\alpha - a^\alpha_j\,\omega^j_{kl}\,v^{(1)k}\,v^{(1)l} = h^\alpha_j\,\omega^j + h^\alpha_{(1)j}\cdot\Theta^{(1)j}.$$

Продолжая систему дифференциальных уравнений (2.9), получим:

$$\nabla a^\alpha_{jk} - a^\alpha_l\,\omega^l_{jk} = a^\alpha_{jkl}\,\omega^l,$$

$$\nabla h^\alpha_j - a^\alpha_l\,\omega^l_{kjh}\,v^{(1)k}\,v^{(1)h} - a^\alpha_{lj}\,\omega^l_{kh}\,v^{(1)k}\,v^{(1)h} = h^\alpha_{jk}\,\omega^k + \check{h}^\alpha_{j(1)k}\,\Theta^{(1)k}, \tag{2.10}$$

$$\nabla h^\alpha_{(1)j} - 2a^\alpha_l\,\omega^l_{jk}\,v^{(1)k} = h^\alpha_{(1)jk}\,\omega^k + h^\alpha_{(1)j(1)k}\,\Theta^{(1)k},$$

где

$$h^\alpha_{(1)j(1)k} = h^\alpha_{(1)k(1)j}, \quad h^\alpha_{jk} = h^\alpha_{kj}, \quad \check{h}^\alpha_{j(1)k} = h^\alpha_{(1)kj}, \quad a^\alpha_{jkl} = a^\alpha_{jlk}.$$

Если $a = \det\|a^\alpha_i\,(x^j)\| \neq 0$, то всегда существует система величин (2.2), которые образуют тензор $\overset{*}{a}{}^i_\alpha$, обратный тензору a^α_i, и компоненты которого в этом случае удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\nabla \overset{*}{a}{}^i_\alpha = \overset{*}{a}{}^i_{\alpha j}\,\omega^j \tag{2.11}$$

и соотношениям (2.4).

Продолжая систему уравнений (2.11), получим

$$\nabla \overset{*}{a}{}^i_{\alpha j} + \overset{*}{a}{}^k_\alpha\,\omega^i_{kj} = \overset{*}{a}{}^i_{\alpha jk}\,\omega^k, \tag{2.12}$$

$$\overset{*}{a}{}^i_{\alpha jk} = \overset{*}{a}{}^i_{\alpha kj}.$$

Рассмотрим систему величин

$$\Pi^i = \frac{1}{2}\,h^\alpha\,\overset{*}{a}{}^i_\alpha, \tag{2.13}$$

где

$$\bar{\Pi}^i = \rho^2\,\Pi^i.$$

Очевидно, что

$$\nabla \Pi^i - \frac{1}{2}\,\omega^i_{kl}\,v^{(1)k}\,v^{(1)l} = \Pi^i_j\,\omega^j + '\Pi^i_j\,\Theta^{(1)j}, \tag{2.14}$$

где

$$\Pi^i_j = \frac{1}{2}\,(h^\alpha_j\,\overset{*}{a}{}^i_\alpha + h^\alpha\,\overset{*}{a}{}^i_{\alpha j}),$$

$$'\Pi^i_j = \frac{1}{2}\,h^\alpha_{(1)j}\,\overset{*}{a}{}^i_\alpha. \tag{2.15}$$

Частично продолжая систему (2.14), получим

$$\nabla' \Pi^i_j - \omega^i_{jk}\, v^{(1)k} = {}'\Pi^i_{jk}\, \omega^k + {}''\Pi^i_{jk}\, \Theta^{(1)k}, \tag{2.16}$$

$$\nabla'' \Pi^i_{jk} - \omega^i_{jk} = {}''\Pi^i_{jkp}\, \omega^p + {}'''\Pi^i_{jkp}\, \Theta^{(1)p}, \tag{2.17}$$

где

$${}''\Pi^i_{jk} = {}''\Pi^i_{kj}, \quad {}'''\Pi^i_{jkp} = {}'''\Pi^i_{jpk},$$

и

$${}''\Pi^i_{jk} = \frac{1}{2}\, h^\alpha_{(1)j(1)k}\, \overset{*}{a}{}^i_\alpha\,, \tag{2.18}$$

$${}'''\Pi^i_{jkp} = \frac{1}{2}\, h^\alpha_{(1)j(1)k(1)p}\, \overset{*}{a}{}^i_\alpha\,, \tag{2.19}$$

$${}''\Pi^i_{jkp} = \frac{1}{2}\, (h^\alpha_{(1)j(1)kp}\, \overset{*}{a}{}^i_\alpha + h^\alpha_{(1)j(1)k}\, \overset{*}{a}{}^i_{\alpha p}), \tag{2.20}$$

причем

$${}''\overline{\Pi}{}^i_{jk} = {}''\Pi^i_{jk}.$$

Таким образом, система величин ${}''\Pi^i_{jk}$, определенная формулой (2.18), является объектом аффинной связности без кручения (это следует из уравнений (2.17)). Эта связность инвариантна относительно преобразований (1.17).

Из работы В. И. Близникаса [3] следует, что тензор кривизны связности ${}'\Pi^i_j$ вычисляется по формуле (см. [3], стр. 162, формула (II.15)):

$$R^i_{jk} = {}'\Pi^i_{[jk]} - {}''\Pi^i_{[j|s|}\; {}'\Pi^s_{k]}, \tag{2.21}$$

а величины R^i_{jkp} и σ^i_{jkp}, являющиеся соответственно первым и вторым картановым тензором кривизны усеченной аффинной связности ${}''\Pi^i_{jk}$ (см. [3] стр. 163, формулы (II. 19)):

$$R^i_{jkp} = 2\, ({}''\Pi^i_{j[kp]} - {}''\Pi^s_{j[k}\, {}''\Pi^i_{p]s} + {}'''\Pi^i_{j[k|s|}\; {}'\Pi^s_{p]}), \tag{2.22}$$

$$\sigma^i_{jkp} = {}'''\Pi_{jkp}. \tag{2.23}$$

В данном случае величины, определенные формулами (2.21), (2.22) и (2.23) имеют вид

$$R^i_{jk} = \frac{1}{2}\, (h^\alpha_{[(1)jk]}\, \overset{*}{a}{}^i_\alpha + h^\alpha_{[(1)j}\, \overset{*}{a}{}^i_{|\alpha|k]} - h^\alpha_{[(1)j|(1)s|}\; h^\beta_{(1,k]}\, \overset{*}{a}{}^i_\alpha\, \overset{*}{a}{}^s_\beta), \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned} R^i_{jkp} = {} & h^\alpha_{(1)j[(1)kp]}\, \overset{*}{a}{}^i_\alpha + h^\alpha_{(1)j[(1)k}\, \overset{*}{a}{}^i_{|\alpha|p]} - h^\alpha_{(1)j[(1)k}\, h^\beta_{(1)p](1)s} \times \\ & \times \overset{*}{a}{}^i_\alpha\, \overset{*}{a}{}^s_\beta + h^\alpha_{(1)j[(1)k|(1)s|}\; h^\beta_{(1)p]}\, \overset{*}{a}{}^i_\alpha\, \overset{*}{a}{}^s_\beta, \end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\sigma^i_{jkp} = \frac{1}{2}\, h^\alpha_{(1)j(1)k(1)p}\, \overset{*}{a}{}^i_\alpha. \tag{2.26}$$

Пространство линейных элементов $L^{(1)}_n$ с линейной дифференциально-геометрической связностью (2.15) назовем ассоциированным пространством $(L^{(1)}_n, {}'\Pi^i_j)$. Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Для того, чтобы система дифференциальных уравнений* (1.15) *при* $a^\alpha_i = a^\alpha_i\,(x^j)$ *была эквивалентна системе дифференциальных уравнений*

$$v^{(2)i} + {}''\Pi^i_{jk}\,(x)\; v^{(1)j}\, v^{(1)k} = 0, \tag{2.27}$$

которая является системой дифференциальных уравнений геодезических кривых ассоциированного пространства ($L_n^{(1)}\,{}'\Pi_j^i$), *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sigma^i_{jkp}=0.$$

Необходимость. Пусть система дифференциальных уравнений (1.15) совпадает с системой (2.27). Тогда связность ${}''\Pi^i_{jk}$, определяющая геодезические кривые не зависит от $v^{(1)j}$, а зависит только от x^j. Из (2.18) следует, что

$$h^\alpha_{(1)j\,(1)k}=h^\alpha_{(1)j\,(1)k}(x).$$

Тогда

$$h^\alpha_{(1)j(1)k(1)p}=0,$$

а из (2.26) следует, что

$$\sigma^i_{jkp}=0.$$

Достаточность. Пусть $\sigma^i_{jkp}=0$. Так как тензор $\overset{*}{a}{}^i_\alpha$ невырожденный, то $h^\alpha_{(1)j(1)k(1)p}=0$, т.е.

$$h^\alpha_{(1)j(1)k}=h^\alpha_{(1)j(1)k}(x).$$

Введем обозначение

$$h^\alpha_{(1)j(1)k}=b^\alpha_{jk}(x). \tag{2.28}$$

Тогда выражение (2.18) перепишется в виде

$${}''\Pi^i_{jk}=\frac{1}{2}\,b^\alpha_{jk}\,\overset{*}{a}{}^i_\alpha,$$

где b^α_{jk} удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\nabla b^\alpha_{jk}-a^\alpha_l\,\omega^l_{jk}=b^\alpha_{jkp}\,\omega^p.$$

Из условия однородности (1.19) следует, что

$$h^\alpha_{(1)j(1)k}\,v^{(1)k}=h^\alpha_{(1)j},$$

$$h^\alpha_{(1)j}\,v^{(1)j}=2h^\alpha.$$

Свертывая выражение (2.28) с $v^{(1)k}$ и $v^{(1)j}$, в силу предыдущих равенств, получим

$$h^\alpha=\frac{1}{2}\,b^\alpha_{jk}\,v^{(1)j}\,v^{(1)k},$$

а система дифференциальных уравнений (1.15) примет вид

$$a^\alpha_l\,v^{(2)l}+\frac{1}{2}\,b^\alpha_{jk}\,v^{(1)j}\,v^{(1)k}=0\,.$$

Свертывая полученную систему дифференциальных уравнений с тензором $\overset{*}{a}_\alpha$, получим

$$v^{(2)i}+{}''\Pi^i_{jk}\,v^{(1)j}\,v^{(1)k}=0.$$

3. После симметризации по нижним индексам системы величин a^α_{ij} из ервого уравнения системы (2.10) получим

$$\nabla a^\alpha_{(ij)}-a^\alpha_l\,\omega^l_{ij}=a^\alpha_{(ij)k}\,\omega^k.$$

Свертывая полученную систему дифференциальных уравнений с тензором $\overset{*}{a}{}^i_\alpha$, получим объект аффинной связности без кручения

$$\Gamma^i_{jk} = \overset{*}{a}{}^i_\alpha a^\alpha_{(jk)}, \tag{2.29}$$

причем

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}.$$

Объект аффинной связности (2.29) охватывается подобъектом второго порядка $(a^\alpha_i, a^\alpha_{ij})$ дифференциального продолжения объекта (a^α_i, h^α). Объект аффинной связности (2.29) совпадает с объектом аффинной связности (2.18), если

$$h^\alpha = a^\alpha_{(jk)} v^{(1)j} v^{(1)k},$$

т. е. для системы дифференциальных уравнений вида

$$a^\alpha_i v^{(2)i} + a^\alpha_{(jk)} v^{(1)j} v^{(1)k} = 0. \tag{2.30}$$

В этом случае система дифференциальных уравнений (2.30) определяет поверхность геодезических кривых, соответствующих аффинной связности без кручения (2.29).

4. Если система функций a^α_{ij} симметрична по нижним индексам, то непосредственное свертывание первого дифференциального уравнения системы (2.10) с тензором $\overset{*}{a}{}^i_\alpha$ дает объект инвариантной аффинной связности без кручения

$$\Gamma^k_{ij} = \overset{*}{a}{}^k_\alpha a^\alpha_{ij}, \tag{2.31}$$

причем

$$\bar{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}.$$

Для системы дифференциальных уравнений

$$a^\alpha_i(x) v^{(2)i} + a^\alpha_{ij}(x) v^{(1)i} v^{(1)j} = 0$$

объект аффинной связности (2.31) совпадает с объектом аффинной связности (2.18) и эта система обладает вышеуказанным свойством.

§ 3. Случай $m = n + 1$

1. Если $m \neq n$, то построение геометрии системы дифференциальных уравнений (1.15) связано со значительными алгебраическими трудностями и поэтому мы рассмотрим только случаи, указанные в § 1. Из них наибольший интерес представляет случай $m = n + 1$ при условии, что ранг матрицы $\| a^\alpha_i \|$ равен n. В этом случае существует такое ковекторное поле m_α, компоненты которого удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\nabla m_\alpha = m_{\alpha k} \omega^k + {}' m_{\alpha k} \Theta^{(1)k} \tag{3.1}$$

с частичным продолжением

$$\nabla' m_{\alpha i} = {}' m_{\alpha ij} \omega^j + {}'' m_{\alpha ij} \Theta^{(1)j}, \quad {}'' m_{\alpha ij} = {}'' m_{\alpha ji},$$

$$\nabla'' m_{\alpha ij} = {}'' m_{\alpha ijk} \omega^k + {}''' m_{\alpha ijk} \Theta^{(1)k}, \quad {}''' m_{\alpha ijk} = {}''' m_{\alpha ikj}, \tag{3.2}$$

что система уравнений (см. [1])

$$a^\alpha_i m_\alpha = 0 \tag{3.3}$$

имеет решение

$$\tilde{m}_\alpha = \lambda m_\alpha, \tag{3.4}$$

определенное с точностью до скалярного множителя λ (его мы будем считать функцией от x^j и $v^{(1)j}$, причем

$$d\lambda = \lambda_i \omega^i + '\lambda_i \Theta^{(1)i}. \tag{3.5}$$

Продолжая дифференциальное уравнение (3.5), получим

$$\begin{gathered} \nabla\lambda_i - \lambda_k \Theta_i^{(1)k} = \lambda_{ij} \omega^j + '\check{\lambda}_{ij} \Theta^{(1)j}, \\ \nabla'\lambda_i = '\lambda_{ij} \omega^j + ''\lambda_{ij} \Theta^{(1)j}, \\ \lambda_{ij} = \lambda_{ji}, \quad '\check{\lambda}_{ij} = '\lambda_{ji}, \quad ''\lambda_{ij} = ''\lambda_{ji}. \end{gathered} \tag{3.6}$$

Тогда функция

$$F = h^\alpha m_\alpha \tag{3.7}$$

удовлетворяет условиям

$$\bar{F} = \rho^2 F, \quad \tilde{F} = \lambda F. \tag{3.7'}$$

Так как имеет место второе уравнение системы (1.16) и (3.1) то, дифференцируя обычным образом функцию F, получим

$$dF = F_i \omega^i + 'F_i \Theta^{(1)i}, \tag{3.8}$$

где

$$\begin{gathered} F_i = h_i^\alpha m_\alpha + h^\alpha m_{\alpha i}, \\ 'F_i = h_{(1)i}^\alpha m_\alpha + h^\alpha\, 'm_{\alpha i}. \end{gathered}$$

Частично продолжая последнее уравнение системы (2.1), получим

$$\begin{gathered} \nabla h^\alpha_{(1)i(1)j} - 2a^\alpha_{p(1)i} \Theta_j^{(1)p} - 2a^\alpha_{p(1)j} \Theta_i^{(1)p} - 2a_p^\alpha \omega_{ij}^p - \\ - a^\alpha_{p(1)i(1)j} \omega^p_{kh} v^{(1)k} v^{(1)h} = h^\alpha_{(1)i(1)jp} \omega^p + h^\alpha_{(1)i(1)j(1)p} \Theta^{(1)p}, \\ h^\alpha_{(1)i(1)j(1)p} = h^\alpha_{(1)i(1)p(1)j}. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Дифференцируя обычным образом систему (3.3) соответственно один и два раза, получим равенства (в силу линейной независимости форм ω^i, $\Theta^{(1)i}$), связывающие компоненты дифференциальных продолжений тензора a_i^α и ковектора m_α:

$$\begin{gathered} a^\alpha_{l(1)i} m_\alpha + a_l^\alpha\, 'm_{\alpha i} = 0, \\ a^\alpha_{p(1)i(1)l} m_\alpha + a^\alpha_{p(1)i}\, 'm_{\alpha l} + a^\alpha_{p(1)l}\, 'm_{\alpha i} + a_p^\alpha\, ''m_{\alpha il} = 0. \end{gathered}$$

После двукратного частичного продолжения уравнений (3.8), учитывая предыдущие равенства, получим симметрический тензор

$$''F_{ij} = h^\alpha_{(1)i(1)j} m_\alpha + h^\alpha_{(1)i}\, 'm_{\alpha j} + h^\alpha_{(1)j}\, 'm_{\alpha i} + h^\alpha\, ''m_{\alpha ij}. \tag{3.10}$$

Если будем считать, что в пространстве $L_n^{(1)}$ финслерова метрика введена при помощи метрической функции F (определенной формулами (3.7)), то симметрический тензор (3.10) является метрическим тензором этого пространства. В дальнейшем этот тензор будем обозначать через g_{ij}, т. е. $g_{ij} \equiv ''F_{ij}$. Естественно рассматривать тот случай, когда метрический тензор не вырожденный, т. е. когда $\det \| g_{ij} \| \neq 0$.

Так как

$$\nabla g_{ij} = g_{ijk}\,\omega^k + 'g_{ijk}\,\Theta^{(1)k},$$

где $'g_{ijk}$ симметричен по всем нижним индексам, то

$$\begin{aligned} &\nabla\, 'g_{ijk} = 'g_{ijkl}\,\omega^l + ''g_{ijkl}\,\Theta^{(1)l}, \\ &\nabla g_{ijk} - g_{pj}\,\omega^p_{ik} - g_{ip}\,\omega^p_{jk} - 'g_{ijp}\,\Theta^{(1)p}_k = g_{ijkl}\,\omega^l + '\breve{g}_{ijkl}\,\Theta^{(1)l}, \\ &''g_{ijkl} = ''g_{ijlk}, \quad g_{ijkl} = g_{ijlk}, \quad 'g_{ijkl} = '\breve{g}_{ijlk}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Из систем (3.1), (3.2), (3.4), (3.5) и (3.6) получим формулы преобразо вания компонент дифференциальных продолжений ковектора m_α при перенормировке ковектора m_α, т. е. при изменении финслерова пространства в пучке финслеровых пространств, определяемом скалярной функцией λ:

$$\begin{aligned} &\tilde{m}_{\alpha i} = \lambda_i\, m_\alpha + \lambda\, m_{\alpha i}, \\ &'\tilde{m}_{\alpha i} = '\lambda_i\, m_\alpha + \lambda'\, m_{\alpha i}, \\ &'\tilde{m}_{\alpha ij} = \lambda\, 'm_{\alpha ij} + \lambda_i\, 'm_{\alpha j} + \lambda_j\, 'm_{\alpha i} + '\lambda_{ij}\, m_\alpha, \\ &''\tilde{m}_{\alpha, j} = \lambda\, ''m_{\alpha ij} + '\lambda_i\, 'm_{\alpha j} + '\lambda_j\, 'm_{\alpha i} + ''\lambda_{ij}\, m_\alpha. \end{aligned}$$

Используя предыдущие формулы и формулы (3.10), получим закон преобразования тензора g_{ij} относительно преобразований (3.4):

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ij} = \lambda g_{ij} + '\lambda_s\,(h^\alpha_{(1)i}\,\delta^s_j\, m_\alpha + h^\alpha_{(1)j}\,\delta^s_i\, m_\alpha + h^\alpha\,\delta^s_i\, 'm_{\alpha j} + \\ + h^\alpha\,\delta^s_j\, 'm_{\alpha i}) + '\lambda_{ij}\, h^\alpha m_\alpha. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Рассмотрим тот случай, когда преобразование (3.4) индицирует конформное преобразование метрического тензора g_{ij} рассматриваемого финслерова пространства, т. е. когда

$$g_{ij} = \lambda g_{ij}, \quad g_{ij} = \ddot{g}_{ij}. \tag{3.13}$$

При этом имеет место следующая

Теорема 2. *Преобразование* (3.4) *индуцирует конформное преобразование* (3.13) *метрического тензора* g_{ij} *в том и только в том случае, когда* $\lambda = \lambda(x)$.

Доказательство. Для того, чтобы преобразование (3.12) тензора g_{ij}, при преобразовании (3.4) конвектора m_α, было эквивалентно преобразованию (3.13), необходимо выполнение одного из условий:

а) $\lambda = \lambda(x)$,

б) $''\lambda_{ij} = 0, \quad 'F_i\, '\lambda_j + 'F_j\, '\lambda_i = 0,$ (3.14)

в) $'F_i\, '\lambda_j + 'F_j\, '\lambda_i + F''\lambda_{ij} = 0.$ (3.15)

Если $\lambda = \lambda(x)$, то $'\lambda_i = 0$, $''\lambda_{ij} = 0$, т. е. имеет место формула (3.13). Покажем, что из условий (3.14) или (3.15) следует $\lambda = \lambda(x)$. Из условий однородности системы дифференциальных уравнений (1.15) и из системы уравнений (3.3) следует

$$\overline{m}_\alpha = m_\alpha \quad \text{и} \quad \bar{\tilde{m}}_\alpha = \tilde{m}_\alpha.$$

Тогда из формул (3.4) следует, что

$$\bar{\lambda} = \lambda.$$

Так как имеют место предыдущее равенство и формула (3.5), то

$$'\lambda_i v^{(1)i}=0,$$

$$''\lambda_{ij} v^{(1)i}+'\lambda_j=0.$$

Свертывая выражение (3.14) с $v^{(1)i}$ и учитывая полученные равенства и то, что

$$'F_i v^{(1)i}=2F,$$

получим

$$2F'\lambda_j=0,$$

т. е. что $'\lambda_j=0$, так как в нашем случае считаем, что $F\neq 0$. Отсюда следует, что $\lambda=\lambda(x)$.

Аналогично, свертывая равенство (3.15) с $v^{(1)i}$ и учитывая предыдущие формулы, получим

$$F'\lambda_j=0,$$

т. е. $'\lambda_j=0$ или $\lambda=\lambda(x)$. Теорема доказана.

Задача состоит в том, чтобы, имея тензор g_{ij}, сконструировать объект связности, общий всем финслеровым пространствам выщеупомянутого пучка финслеровых пространств и инвариантный относительно преобразований, определенных формулами (1.17).

Образуем систему функций

$$X^l_{k\ i}=\frac{1}{2} g^{jl}(g_{ijk}+g_{jki}-g_{kij}), \tag{3.16}$$

где g^{jl} — тензор, обратный тензору g_{jl}, т. е.

$$g^{jl} g_{li}=\delta^j_i \tag{3.17}$$

и удовлетворяющий системе дифференциальных уравнений

$$\nabla g^{jl}=g^{jl}_k\,\omega^k+'g^{jl}_k\,\Theta^{(1)k}, \tag{3.18}$$

причем

$$\bar{g}^{jl}=\lambda^{-1} g^{jl}, \quad \bar{g}^{jl}=g^{jl}. \tag{3.19}$$

Дифференцируя выражение (3.17), в силу линейной независимости форм ω^i, $\Theta^{(1)i}$, получим

$$\begin{aligned}
&g_{ijk}\, g^{jl}+g_{ij}\, g^{jl}_k=0,\\
&'g_{ijk}\, g^{jl}+g_{ij}\, 'g^{jl}_k=0,\\
&g_{ij}\, 'g^{jl}_k\, v^{(1)i}=0,\\
&''g_{ijkp}\, g^{jl}\, v^{(1)i}+g_{ij}\, ''g^{jl}_{kp}\, v^{(1)i}=0,\\
&g_{ij}\, ''g^{jl}_{kp}\, v^{(1)i}+g_{pj}\, 'g^{jl}_k=0,\\
&g_{ij}\, ''g^{jl}_{kp}\, v^{(1)i}\, v^{(1)p}=0.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Кроме того, из формул (1.18) и (3.13), а также из симметричности тензора $'g_{ijk}$ по всем нижним индексам, следует:

$$'g_{ijk}\, v^{(1)i}='g_{ijk}\, v^{(1)j}=g'_{ijk}\, v^{(1)k}=0. \tag{3.21}$$

Из (3.11), (3.16) и (3.18) следует, что

$$\nabla X^l_{ki} - \omega^l_{ki} - \frac{1}{2} g^{jl} ('g_{ijp} \Theta^{(1)p}_k + 'g_{jkp} \Theta^{(1)p}_i - 'g_{kip} \Theta^{(1)p}_j) \equiv$$

$$\equiv 0 \, (\mathrm{mod}\, \omega^i, \ \Theta^{(1)l}). \tag{3.22}$$

Так как из первого равенства (3.13) и из (3.11) имеем, что

$$'\tilde{g}_{ijk} = \lambda\, 'g_{ijk},$$

$$\tilde{g}_{ijk} = \lambda g_{ijk} + \lambda_k g_{ijk},$$

то заметим, что

$$\tilde{X}^l_{ki} = X^l_{ki} + G^{ls}_{ki} \tilde{\lambda}_s, \qquad \bar{X}^l_{ki} = X^l_{ki}, \tag{3.23}$$

где

$$G^{ls}_{ki} = \frac{1}{2} (\delta^s_k \delta^l_i + \delta^s_i \delta^l_k - g_{ki} g^{ls}), \tag{3.24}$$

$$\tilde{\lambda}_s = \frac{\lambda_s}{\lambda}.$$

Из (3.21) и (3.22) видно, что система функций

$$H^l = X^l_{ki} v^{(1)k} v^{(1)i} \tag{3.25}$$

удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\nabla H^l - \omega^l_{ki} v^{(1)k} v^{(1)i} = H^l_p \omega^p + 'H^l_p \Theta^{(1)p}, \tag{3.26}$$

причем

$$\bar{H}^l = \rho^2 H^l, \quad \tilde{H}^l = H^l + G^{ls}_{ki} v^{(1)k} v^{(1)i} \tilde{\lambda}_s. \tag{3.27}$$

Частично, продолжая полученную систему (3.26), будем иметь

$$\Delta' H^l_p - 2\Theta^{(1)l}_p = 'H^l_{pt} \omega^t + ''H^l_{pt} \Theta^{(1)t},$$

$$\nabla'' H^l_{pt} - 2\omega^l_{pt} = ''H^l_{pts} \omega^s + '''H^l_{pts} \Theta^{(1)s},$$

$$''H^l_{pt} = ''H^l_{tp}.$$

Из последней системы дифференциальных уравнений следует, что величины

$$\Gamma^l_{pt} = \frac{1}{2} \, ''H^l_{pt} \tag{3.28}$$

образуют объект аффинной связности без кручения для соответствующего финслерова пространства, т. е. зависящий от λ, причем из (3.20), (3.24), (3.26), (3.27) и (3.28) следует, что

$$\tilde{\Gamma}^l_{pt} = \Gamma^l_{pt} + ''G^{ls}_{pt} \tilde{\lambda}_s, \quad \bar{\Gamma}^l_{pt} = \Gamma^l_{pt}, \tag{3.29}$$

где

$$''G^{ls}_{pt} = G^{ls}_{pt} - \frac{1}{2}\, 'g^{ls}_p g_{ti} v^{(1)i} - \frac{1}{2} g_{pi}\, 'g^{ls}_t v^{(1)i} -$$

$$- \frac{1}{4} g_{ki}\, ''g^{ls}_{tp} v^{(1)k} v^{(1)i}, \quad \overline{''G^{ls}_{pt}} = ''G^{ls}_{pt}.$$

Вопрос отыскания аффинной связности без кручения, общей для всех финслеровых пространств пучка финслеровых пространств

$$\Lambda^l_{pt} = \Gamma^l_{pt} + ''G^{ls}_{pt} \varphi_s,$$

$$\tilde{\Lambda}^l_{pt} = \Lambda^l_{pt}, \quad \bar{\Lambda}^l_{pt} = \Lambda^l_{pt}, \tag{3.30}$$

сводится к конструированию на пространстве $L_n^{(1)}$ такого ковекторного поля φ_s, которое преобразуется при преобразованиях (3.4) по формуле,

$$\tilde{\varphi}_s = \varphi_s - \tilde{\lambda}_s \,. \tag{3.31}$$

Обозначим

$$H = H_k^k,$$

тогда

$$\tilde{H} = H - Q^s \tilde{\lambda}_s, \tag{3.32}$$

где

$$Q^s = \frac{1}{2} g_{ki}\, 'g_p^{sp}\, v^{(1)k} v^{(1)i} - n\, \delta_i^s v^{(1)i}.$$

В результате трехкратного частичного продолжения выражения (3.32) получим тензор $'''H_{tjq}$, преобразующийся при преобразованиях (3.4) по формуле

$$'''\tilde{H}_{tjq} = '''H_{tjq} - Q^s_{tjq} \tilde{\lambda}_s\,, \tag{3.33}$$

где выражение Q^s_{tjq} составлено из компонент тензоров g_{ij}, g^{ij} и компонент их дифференциальных продолжений до третьего порядка включительно.

Из условий (3.7′) и (3.13) следует, что тензор

$$f^{tq} = F g^{tq}$$

обладает свойством

$$\tilde{f}^{tq} = f^{tq}.$$

Вводя обозначения

$$X_j = f^{tq}\, '''H_{tjq},$$

$$S_j^s = f^{tq} Q^s_{tjq}$$

и свертывая равенство (3.33) с тензором f^{tq}, получим:

$$\tilde{X}_j = X_j - S_j^s \tilde{\lambda}_s, \tag{3.34}$$

где

$$S_j^s = F\Big[(n+2)\, ''g_{jp}^{ps} + g^{tq}\, 'g_{tjq}\, 'g_p^{ps} + g_{ij} g^{tq}\, '''g^{ps}_{tpq} v^{(1)i} + \\ + 2\, '''g^{ps}_{ijp} v^{(1)i} + \frac{1}{2} g_{ki} g^{tq}\, ''''g^{ps}_{tjpq} v^{(1)k} v^{(1)i}\Big]. \tag{3.35}$$

Так как $S_j^s v^{(1)j} \neq 0$, то будем рассматривать случай, когда матрица $\| S_j^s \|$ невырожденная, т. е. когда $\det \| S_j^s \| \neq 0$. Тогда всегда существует матрица $\| \overset{*}{S}{}_k^j \|$, обратная матрице $\| S_j^s \|$, причем

$$S_j^s \overset{*}{S}{}_k^j = \delta_k^s.$$

Свертывая (3.34) с $\overset{*}{S}{}_k^j$ и обозначив

$$\varphi_k = X_j \overset{*}{S}{}_k^j,$$

получим

$$\tilde{\varphi}_k = \varphi_k - \tilde{\lambda}_k, \quad \bar{\varphi}_k = \varphi_k.$$

Таким образом, доказана

Теорема 3. *Если тензор* (3,10) *и матрица, составленная из элементов* (3.35) *не вырождены, т.е.* $\det \| g_{ij} \| \neq 0$, $\det \| S_j^s \| \neq 0$, *то всегда существует аффинная связность без кручения* (3.30), *общая для всех финслеровых пространств пучка финслеровых пространств* $(L_n^{(1)}, F)$, *ассоциированного пространству* $L_n^{(1)}$, *и инвариантная относительно преобразований, определенных формулами* (1.17), т. е.

$$\tilde{\Lambda}_{pt}^l = \Lambda_{pt}^l, \quad \bar{\Lambda}_{pt}^l = \Lambda_{pt}^l.$$

2. Если $a_i^\alpha = a_i^\alpha (x^j)$, то система уравнений (3.3) имеет решение (3.4), определенное с точностью до скалярного множителя λ, причем

$$d\lambda = \lambda_i \omega^i. \tag{3.36}$$

Тогда из величин a_{ij}^α, удовлетворяющих первому дифференциальному уравнению системы (2.10), можно построить тензор

$$a_{ij} = a_{ij}^\alpha m_\alpha, \tag{3.37}$$

удовлетворяющий системе дифференциальных уравнений

$$\nabla a_{ij} = a_{ijk} \omega^k, \quad a_{ijk} = a_{ikj} \tag{3.38}$$

и симметрический тензор

$$b_{ij} = a_{(ij)}, \tag{3.39}$$

удовлетворяющий системе дифференциальных уравнений

$$\nabla b_{ij} = b_{ijk} \omega^k, \quad b_{ijk} = b_{ikj}. \tag{3.40}$$

Так как система (3.1) в данном случае примет вид

$$\nabla m_\alpha = m_{\alpha i} \omega^i,$$

то

$$b_{ijk} = a_{(ij)k}^\alpha m_\alpha + a_{(ij)}^\alpha m_{\alpha k}, \quad a_{ijk} = a_{ijk}^\alpha m_\alpha + a_{ij}^\alpha m_{\alpha k}.$$

Продолжая систему (3.40), получим

$$\nabla b_{ijk} - b_{lj} \omega_{ik}^l - b_{il} \omega_{jk}^l = b_{ijkl} \omega^l, \quad b_{ijkl} = b_{ijlk}.$$

Величины X_{ji}^l, определенные следующим образом:

$$X_{ji}^l = \frac{1}{2} b^{kl} (b_{jki} + b_{kij} - b_{ijk}), \tag{3.41}$$

где b_{ijk} — компоненты продолжения тензора b_{ij}, а b^{kl} — тензор, обратный тензору b_{kl}, удовлетворяющий системе дифференциальных уравнений

$$\nabla b^{kl} = b_s^{kl} \omega^s,$$

называются неголономными символами Кристоффеля второго рода или коэффициентами внутренней связности тензора b_{ij}.

Дифференцируя выражение (3.41), получим

$$\nabla X_{ji}^l - \omega_{ji}^l = X_{jip}^l \omega^p, \tag{3.42}$$

где X_{jip}^l — рациональная функция компонент объекта $(a_i^\alpha, a_{ij}^\alpha, a_{ijk}^\alpha, a_{ijkl}^\alpha)$, являющегося подобъектом дифференциального продолжения объекта (a_i^α, h^α).

При конформных преобразованиях тензора b_{ij}:

$$\tilde{b}_{ij}=\lambda b_{ij}, \tag{3.43}$$

где $\lambda=\lambda(x)$, тензор b^{ij} преобразуется по закону:

$$\tilde{b}^{ij}=\lambda^{-1}b^{ij},$$

а также

$$\tilde{m}_{\alpha i}=\lambda_i m_\alpha+\lambda m_{\alpha i},$$

$$\tilde{b}_{ijk}=\lambda_k b_{ij}+\lambda b_{ijk}.$$

При этих преобразованиях величины X^l_{ji} преобразуются по формуле:

$$\tilde{X}^l_{ji}=X^l_{ji}+\overset{*}{G}{}^{ls}_{ji}\tilde{\lambda}_s, \tag{3.44}$$

где

$$\overset{*}{G}{}^{ls}_{ij}=\frac{1}{2}\,(\delta^l_j\delta^s_i+\delta^l_i\delta^s_j-b^{ls}b_{ji}),$$

$$\tilde{\lambda_s}=\frac{\lambda_s}{\lambda}$$

и

$$\tilde{\overset{*}{G}}{}^{ls}_{ji}=\overset{*}{G}{}^{ls}_{ji}.$$

При помощи неголономного ковариантного дифференцирования (см. [2]) построены ковариантные векторные поля

$$\Psi_l=\varphi_s\overset{*}{p}{}^s_l,\qquad \overset{*}{\Psi}_l=\overset{*}{\varphi}_s\overset{*s}{q_l},$$

причем

$$\tilde{\Psi}_l=\Psi_l-\tilde{\lambda}_l,\qquad \tilde{\overset{*}{\Psi}}_l=\overset{*}{\Psi}_l-\tilde{\lambda}_l,$$

где

$$\varphi_s=b^{ij}(\underset{s}{\overset{X}{D_*}}\,\underset{j}{\overset{X}{D_*}}\,a^\alpha_i)\,m_\alpha,$$

$$\overset{*}{\varphi}_s=b^{ij}(\underset{j}{\overset{X}{D_*}}\,\underset{s}{\overset{X}{D_*}}\,a^\alpha_i)\,m_\alpha,$$

а $\overset{*}{p}{}^s_l$ и $\overset{*}{q}{}^s_l$ — тензоры, обратные для тензоров

$$p^t_s=\frac{2-n}{2}\,b^{lt}a_{,s}+n\delta^t_s,$$

$$q^t_s=\frac{1}{2}\,(b^{lj}a_{lj}\delta^t_s+b^{lt}a_{sl}-b^{lt}a_{ls})+\delta^t_s \tag{3.45}$$

($\underset{j}{\overset{X}{D_*}}$ — линейный дифференциальный оператор, определенный следующим образом:

$$\underset{j}{\overset{X}{D_*}}\,a^\alpha_i=a^\alpha_{(ij)}-a^\alpha_k X^k_{ij},$$

и обладающий всеми свойствами ковариантной производной). Этим полям Ψ_l и $\overset{*}{\Psi}_l$ соответствуют объекты аффинных связностей без кручения

$$\underset{\Psi}{\Lambda}{}^k_{ji}=X^k_{ji}+\overset{*}{G}{}^{kl}_{ji}\Psi_l,$$

$$\underset{\overset{*}{\Psi}}{\Lambda}{}^k_{ji}=X^k_{ji}+\overset{*}{G}{}^{kl}_{ji}\overset{*}{\Psi}_l, \tag{3.46}$$

инвариантные относительно конформных преобразований тензора b_{ij}, т. е.

$$\underset{\Psi}{\tilde{\Lambda}}{}^k_{ji}=\underset{\Psi}{\Lambda}{}^k_{ji},\quad \underset{\overset{*}{\Psi}}{\tilde{\Lambda}}{}^k_{ji}=\underset{\overset{*}{\Psi}}{\Lambda}{}^k_{ji}.$$

Таким образом, доказана

Теорема 4. *Если тензор* (3.39) *и тензоры* p^l_s и q^l_s *не вырождены, т. е.* $\det\|b_{ij}\|\neq 0$, $\det\|p^l_s\|\neq 0$, $\det\|q^l_s\|\neq 0$, *то всегда существуют аффинные связности* (3.46), *инвариантные относительно конформных преобразований* (3.43) *тензора* b_{ij}.

3. В частном случае, когда $a^\alpha_i=a^\alpha_i(x^j)$ и величины a^α_{ij} удовлетворяют условию $a^\alpha_{[ij]}=0$, т. е. когда

$$b_{ij}\equiv a_{ij},$$

ковекторные поля φ'_s и $\overset{*}{\varphi}{}'_s$ ищем в виде:

$$\varphi'_s=wa^{ij}(\overset{x}{D}_s\overset{x}{D}_j a^\alpha_i)\,m_\alpha,$$

$$\overset{*}{\varphi}{}'_s=wa^{ij}(\overset{x}{D}_j\overset{x}{D}_s a^\alpha_i)\,m_\alpha, \tag{3.47}$$

где $\overset{x}{D}_s$ – символ неголономного ковариантного дифференцирования (см. [2]) и w – произвольный скаляр.

Из требования, аналогично требованию (3.31), получим

$$w=\frac{2}{2+n}\,.$$

Тогда выражения (3.47) примут вид:

$$\varphi'_s=\frac{2}{2+n}\,a^{ij}(\overset{x}{D}_s\overset{x}{D}_j a^\alpha_i)\,m_\alpha,$$

$$\overset{*}{\varphi}{}'_s=\frac{2}{2+n}\,a^{ij}(\overset{x}{D}_j\overset{x}{D}_s a^\alpha_i)\,m_\alpha.$$

Таким образом, этим ковекторным полям соответствуют аффинные связности без кручения $\underset{\varphi'}{\Lambda}{}^l_{ji}$ и $\underset{\overset{*}{\varphi}{}'}{\Lambda}{}^l_{ji}$, инвариантные относительно конформных преоб разование тензора a_{ij} $\left(\tilde{a}_{ij}=\lambda a_{ij},\ \lambda=\lambda(x)\right)$:

$$\underset{\varphi'}{\Lambda}{}^l_{ji}=\overset{*}{X}{}^l_{ji}+\overset{**}{G}{}^{ls}_{ji}\,\varphi'_s,$$

$$\underset{\overset{*}{\varphi}{}'}{\Lambda}{}^l_{ji}=\overset{*}{X}{}^l_{ji}+\overset{**}{G}{}^{ls}_{ji}\,\overset{*}{\varphi}{}'_s,$$

где

$$\overset{*}{X}{}^l_{ji}=\frac{1}{2}\,a^{kl}(a_{jki}+a_{kij}-a_{ijk}),$$

$$\overset{**}{G}{}^{ls}_{ji}=\frac{1}{2}\,(\delta^l_j\delta^s_i+\delta^l_i\delta^s_j-a^{ls}a_{ji}),$$

а a^{kl} – тензор, обратный тензору a_{kl}.

§ 4. Случай $m=1$

1. Если $m=1$, то система дифференциальных уравнений (1.15) превращается в

$$a_i(x^j,\ v^{(1)j})\,v^{(2)i}+h(x^j,\ v^{(1)j})=0, \tag{4.1}$$

а дифференциально-геометрический объект (a_i, h) удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}&\nabla a_i=a_{ij}\,\omega^j+a_{i(1)j}\,\Theta^{(1)j},\\&\nabla h-a_i\,\omega^i_{kl}\,v^{(1)k}\,v^{(1)l}=h_j\,\omega^j+h_{(1)j}\,\Theta^{(1)j},\end{aligned} \tag{4.2}$$

продолжение которой имеет вид:

$$\begin{aligned}&\nabla a_{ij}-a_k\,\omega^k_{ij}-a_{i(1)k}\,\Theta^{(1)k}_j=a_{ijk}\,\omega^k+\breve{a}_{ij(1)k}\,\Theta^{(1)k},\\&\nabla a_{i(1)j}=a_{i(1)jk}\,\omega^k+a_{i(1)j(1)k}\,\Theta^{(1)k},\\&\nabla h_j-h_{(1)l}\,\Theta^{(1)l}_j-a_{ij}\,\omega^i_{kl}\,v^{(1)k}\,v^{(1)l}-a_i\,\omega^i_{kjl}\,v^{(1)k}\,v^{(1)l}=h_{jk}\,\omega^k+\breve{h}_{j(1)k}\,\Theta^{(1)k},\\&\nabla h_{(1)j}-2a_i\,\Theta^{(1)i}_j-a_{i(1)j}\,\omega^i_{kl}\,v^{(1)k}\,v^{(1)l}=h_{(1)jk}\,\omega^k+h_{(1)j(1)k}\,\Theta^{(1)k},\end{aligned} \tag{4.3}$$

где

$$a_{ijk}=a_{ikj},\quad \breve{a}_{ij(1)k}=a_{i(1)kj},\quad a_{i(1)j(1)k}=a_{i(1)k(1)j},$$

$$h_{jk}=h_{kj},\quad \breve{h}_{j(1)k}=h_{(1)kj},\quad h_{(1)j(1)k}=h_{(1)k(1)j}.$$

Из условий однородности дифференциального уравнения (4.1) (которые в данном случае имеют вид $\bar{a}_i=a_i$, $\bar{h}=\rho^2 h$) следуют тождества

$$\left.\begin{aligned}&a_{i(1)j}\,v^{(1)j}=0,\\&a_{i(1)jk}\,v^{(1)j}=0,\\&a_{i(1)j(1)k}\,v^{(1)j}\,v^{(1)k}=0,\\&a_{i(1)j}+a_{i(1)j(1)k}\,v^{(1)k}=0,\\&2a_{i(1)j(1)k}+a_{i(1)j(1)k(1)l}\,v^{(1)l}=0,\\&a_i\,a_{j(1)i}\,v^{(1)l}+a_j\,a_{l(1)i}\,v^{(1)l}=0\end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

(здесь $a_{i(1)j(1)k(1)l}$ — компоненты частичного продолжения второго уравнения системы (4.3)).

В этом случае всегда существует функция

$$F=(a_i\,v^{(1)i})^2, \tag{4.5}$$

удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$dF=F_i\,\omega^i+{}'F_i\,\Theta^{(1)i}, \tag{4.6}$$

где

$$F_i=2a_k\,a_{il}\,v^{(1)k}\,v^{(1)l},$$

$${}'F_i=2a_i\,a_k\,v^{(1)k}+2a_k\,a_{l(1)i}\,v^{(1)k}\,v^{(1)l},$$

причем

$$\bar{F}=\rho^2 F.$$

В дальнейшем введем обозначения $a_l v^{(1)l}=a_o$, т. е. индекс o будем ставить вместо той буквы, по которой производится свертывание.

Так как из второго дифференциального уравнения системы (4.3) следует, что

$$\nabla a_{(i(1)j)} = a_{(i(1)j)k}\, \omega^k + a_{(i(1)j)(1)k}\, \Theta^{(1)k}, \tag{4.7}$$

то всегда существует симметрический тензор

$$f_{ij} = \sqrt{|F|}\, a_{(i(1)j)} + a_i\, a_j, \tag{4.8}$$

удовлетворяющий системе дифференциальных уравнений

$$\nabla f_{ij} = f_{ijk}\, \omega^k + {}'f_{ijk}\, \Theta^{(1)k}, \tag{4.9}$$

где

$$f_{ijk} = a_{ok}\, a_{(i(1)j)} + a_o\, a_{(i(1)j)k} + a_{ik}\, a_j + a_i\, a_{jk},$$

$${}'f_{ijk} = a_{o(1)k}\, a_{(i(1)j)} + a_k\, a_{(i(1)j)} + a_o\, a_{(i(1)j)(1)k} + a_j\, a_{i(1)k} + a_i\, a_{j(1)k},$$

причем

$$\tilde{f}_{ij} = f_{ij}.$$

Продолжая систему (4.9), получим

$$\begin{gathered} \Delta\, {}'f_{ijk} = {}'f_{ijkl}\, \omega^l + {}''f_{ijkl}\, \Theta^{(1)l}, \\ \nabla f_{ijk} - f_{lj}\, \omega^l_{ik} - f_{il}\, \omega^l_{jk} - {}'f_{ijl}\, \Theta^{(1)l}_k = f_{ijkl}\, \omega^l + {}'\check{f}_{ijkl}\, \Theta^{(1)l}, \\ f_{ijkl} = f_{ijlk}, \quad {}'\check{f}_{ijlk} = {}'f_{ijkl}, \quad {}''f_{ijkl} = {}''f_{ijlk}. \end{gathered} \tag{4.10}$$

Заметим, что

$$f_{ij}\, v^{(1)j} \neq 0, \quad f_{ij}\, v^{(1)i}\, v^{(1)j} \neq 0$$

и в дальнейшем будем рассматривать случай, когда $\det \| f_{ij} \| \neq 0$.

В работе [1] доказано, что компоненты тензора f_{ij} однозначно определяют евклидовую связность картановского типа, если $\det \| H^i_j \| \neq 0$, $\det \| H^{ik}_{jl} \| \neq 0$, где

$$H^i_j = \delta^i_j + f^{ik}\, {}'f_{koj},$$

$$H^{ik}_{jl} = \delta^i_j\, \delta^k_l + \frac{1}{2}\, f^{ip}\, {}'f_{opl}\, \delta^k_j - f^{ik}\, {}'f_{jol} + f^{ip} f^{qk}\, {}'f_{pjs}\, \overset{*}{H}{}^s_q\, {}'f_{ool}, \tag{4.11}$$

причем

$$H^i_k\, \overset{*}{H}{}^k_j = \delta^i_j, \quad H^k_j\, \overset{*}{H}{}^i_k = \delta^i_j$$

и f^{ij} — тензор, обратный тензору f_{ij}.

Так как величины

$${}'f_{iok} = \frac{1}{2}\, (a_{o(1)k}\, a_{o(1)i} + a_k\, a_{o(1)i} + a_o\, a_{o(1)i(1)k} + a_o\, a_{i(1)k}) + a_i\, a_{o(1)k}, \tag{4.12}$$

$${}'f_{ojk} = \frac{1}{2}\, (a_{o(1)k}\, a_{o(1)j} + a_k\, a_{o(1)j} + a_o a_{o(1)j(1)k} + a_o\, a_{j(1)k}) + a_j\, a_{o(1)k},$$

$${}'f_{ook} = a_o\, a_{o(1)k}$$

не равны нулю, то построение евклидовой связности картановского типа проводится в общем виде. Условия теоремы, доказанной в [1] выполнены.

Евклидовая связность картановского типа, присоединенная к тензору f_{ij}, определяется при помощи форм связности

$$\overset{*}{\omega}{}^i = \omega^i, \quad \overset{*}{\omega}{}^i_j = \omega^i_j + \Gamma^i_{jk}\,\omega^k + C^i_{jk}\,\Theta^{(1)k}. \tag{4.13}$$

Если

$$\overset{*}{\Theta}{}^{(1)i} = dv^{(1)i} + v^{(1)k}\,\overset{*}{\omega}{}^i_k,$$

то

$$\overset{*}{\Theta}{}^{(1)i} = \Theta^{(1)i} + \Gamma^i_{kl}\,v^{(1)k}\,\omega^l + C^i_{kl}\,v^{(1)k}\,\Theta^{(1)l}. \tag{4.14}$$

Так как должны быть выполнены условия, указанные в [1]

$$1^\circ \;\; \bar{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}, \quad \bar{C}^i_{jk} = \rho^{-1} C^i_{jk}, \tag{4.15}$$

$$2^\circ \;\; C^i_{jk}\,v^{(1)k} = 0, \tag{4.16}$$

$$3^\circ \;\; \overset{*}{\nabla} f_{ij} \equiv df_{ij} - f_{lj}\,\overset{*}{\omega}{}^l_i - f_{il}\,\overset{*}{\omega}{}^l_j = 0, \tag{4.17}$$

$$4^\circ \;\; C^i_{jk} = C^i_{kj}, \tag{4.18}$$

$$5^\circ \;\; \Gamma^{*i}_{jk} = \Gamma^{*i}_{kj}, \tag{4.19}$$

где

$$\Gamma^{*i}_{jk} = \Gamma^i_{jk} - C^i_{jp}\,\Gamma^p_{sk}\,v^{(1)s}, \tag{4.20}$$

то, учитывая (4.14), (4.16) и (4.18), получим

$$\overset{*}{\Theta}{}^{(1)i} = \Theta^{(1)i} + \Gamma^i_{ol}\,\omega^l, \quad \omega^i_j = \overset{*}{\omega}{}^i_j - \Gamma^{*i}_{jk}\,\omega^k - C^i_{jk}\,\Theta^{(1)k},$$

где Γ^{*i}_{jk} имеет значение (4.20).

Так как условие (4.17) равносильно равенствам

$$\nabla_k f_{ij} \equiv f_{ijk} - {}'f_{ijp}\,\Gamma^p_{ok} - f_{ip}\,\Gamma^{*p}_{jk} - f_{pj}\,\Gamma^{*p}_{ik} = 0, \tag{4.21}$$

$${}'\nabla_k f_{ij} \equiv {}'f_{ijk} - f_{ip}\,C^p_{jk} - f_{pj}\,C^p_{ik} = 0, \tag{4.22}$$

то циклируя по нижним индексам выражение (4.22) и свертывая с тензором f^{jl}, получим выражение

$$C^l_{ik} = \frac{1}{2} f^{jl}\,({}'f_{ijk} + {}'f_{jki} - {}'f_{kij}). \tag{4.23}$$

Из (4.16) и (4.22) следует, что

$${}'f_{iko} = 0.$$

Введем систему функций

$$X^k_{ij} = \frac{1}{2} f^{ks}\,(f_{isj} + f_{sji} - f_{jis}). \tag{4.24}$$

Циклируя по нижним индексам i, j, k выражение (4.21), получим

$$\Gamma^{*l}_{ik} = X^l_{ik} - \frac{1}{2} f^{jl}\,({}'f_{ijp}\,\Gamma^p_{ok} + {}'f_{jkp}\,\Gamma^p_{oi} - {}'f_{kip}\,\Gamma^p_{oj}). \tag{4.25}$$

Свертывая полученное выражение с $v^{(1)i}$, имеем

$$\Gamma^{*l}_{ok} = X^l_{ok} - \frac{1}{2} f^{jl}\,({}'f_{ojp}\,\Gamma^p_{ok} + {}'f_{jkp}\,\Gamma^p_{oo} - {}'f_{kop}\,\Gamma^p_{oj}). \tag{4.26}$$

Свертывая выражение (4.26) с $v^{(1)k}$, получим

$$\Gamma^{*l}_{oo} = X^l_{oo} - \frac{1}{2} f^{jl} ({}'f_{ojp} \Gamma^p_{oo} + {}'f_{jop} \Gamma^p_{oo} - {}'f_{oop} \Gamma^p_{oj}) \tag{4.27}$$

или

$$H^l_k \Gamma^{*k}_{oo} = X^l_{oo} + \frac{1}{2} f^{jl} {}'f_{oop} \Gamma^p_{oj}. \tag{4.28}$$

После свертывания последнего выражения с $\overset{*}{H}{}^s_l$ получим

$$\Gamma^{*s}_{oo} = \overset{*}{H}{}^s_l X^l_{oo} + \frac{1}{2} \overset{*}{H}{}^s_l f^{jl} {}'f_{oop} \Gamma^p_{oj}. \tag{4.29}$$

Подставив выражение (4.29) в (4.26) и учитывая, что $\Gamma^{*l}_{ok} = \Gamma^l_{ok}$, имеем

$$H^{ln}_{km} \Gamma^m_{on} = X^l_{ok} - \frac{1}{2} f^{rl} {}'f_{rkp} \overset{*}{H}{}^p_s X^s_{oo}. \tag{4.30}$$

Свертывая выражение (4.30) с тензором $\overset{*}{H}{}^{ik}_{jl}$, введенным с условием

$$H^{ln}_{km} \overset{*}{H}{}^{pk}_{tl} = \delta^p_m \delta^n_t,$$

$$H^{pl}_{tk} \overset{*}{H}{}^{kn}_{lm} = \delta^p_m \delta^n_t,$$

получим

$$\Gamma^i_{oj} = \overset{*}{H}{}^{ik}_{jl} \left(X^l_{ok} - \frac{1}{2} f^{rl} {}'f_{rkp} \overset{*}{H}{}^p_s X^s_{oo} \right). \tag{4.31}$$

Подставляя выражение (4.31) в (4.25) и используя (4.20), получим значение объекта искомой связности однозначно.

Таким образом, при $m=1$ и $a_i = a_i(x^j, v^{(1)j})$ существует тензор f_{ij}, для которого однозначно определяется обобщенная евклидова связность картановского типа, присоединенная к этому тензору.

2. Если $m=1$, $a_i = a_i(x^j, v^{(1)j})$, но тензор $a_{i(1)j}$ симметричен по нижним индексам, то тензор (4.8) принимает вид

$$f_{ij} = \sqrt{|F|}\, a_{i(1)j} + a_i a_j. \tag{4.32}$$

Тогда выражения (4.12) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} {}'f_{iok} &= 0, \\ {}'f_{ojk} &= 0, \\ {}'f_{ook} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.12'}$$

Будем искать евклидовую связность картановского типа, определенную формулами (4.13) и удовлетворяющую условиям (4.15—4.20). В результате аналогичных расчетов получим

$$C^l_{ik} = \frac{1}{2} f^{jl} (a_i a_{j(1)k} + a_j a_{i(1)k} + a_k a_{j(1)i} + a_o a_{j(1)k(1)i}); \tag{4.33}$$

$$X^l_{ij} = \frac{1}{2} f^{ls} (a_{oj} a_{i(1)s} + a_o a_{i(1)sj} + a_{ij} a_s + a_i a_{sj} + a_{oi} a_{s(1)j} + a_o a_{s(1)ji} +$$

$$+ a_{si} a_j + a_s a_{ji} - a_{os} a_{j(1)i} - a_o a_{j(1)is} - a_{js} a_i - a_j a_{is}). \tag{4.34}$$

Выражения (4.26) и (4.27) принимают вид

$$\Gamma^{*l}_{ok} = X^l_{ok} - \frac{1}{2} f^{jl}\,{}'f_{jkp}\,\Gamma^p_{oo}\,, \tag{4.35}$$

$$\Gamma^{*l}_{oo} = X^l_{oo}\,,$$

где

$$X^l_{oo} = f^{ls}\,a_s\,a_{oo}\,.$$

Подставляя выражения (4.35) и (4.36) в (4.25), получим

$$\Gamma^{*l}_{ik} = X^l_{ik} - \frac{1}{2} f^{jl}\,X^p_{ok}\,{}'f_{ijp} + \frac{1}{4} f^{jl} f^{qp}\,X^s_{oo}\,{}'f_{ijp}\,{}'f_{qks}, \tag{4.37}$$

а из формул (4.20), (4.33) и (4.37) имеем

$$\Gamma^l_{ik} = X^l_{ik} - \frac{1}{4} f^{jl}\,(2'f_{ijp} + {}'f_{jpi} - {}'f_{pij})\,(2X^p_{ok} - f^{qp}\,{}'f_{qks}\,X^s_{oo}). \tag{4.38}$$

Итак, в случае симметричности тензора $a_{i(1)j}$, получили, что объект евклидовой связности картановского типа $\big((4.33),\ (4.38)\big)$ выражается через компоненты тензоров a_i, $a_{i(1)j}$ и их дифференциальные продолжения.

3. Если $a_i = a_i\,(x^j)$, то функции $a_i\,(x^j)$ и $h\,(x^j,\ v^{(1)j})$ образуют дифференциально-геометрический объект (a_i, h), удовлетворяющий системе дифференциальных уравнений

$$\nabla a_i = a_{ij}\,\omega^j,$$

$$\nabla h - a_i\,\omega^i_{kl}\,v^{(1)k}\,v^{(1)l} = h_j\,\omega^j + h_{(1)j}\,\Theta^{(1)j}. \tag{4.39}$$

Продолжая систему дифференциальных уравнений (4.39), получим

$$\nabla a_{ij} - a_k\,\omega^k_{ij} = a_{ijk}\,\omega^k,$$

$$\Delta h_j - h_{(1)p}\,\Theta^{(1)p}_j - a_i\,\omega^i_{kjl}\,v^{(1)k}\,v^{(1)l} - a_{ij}\,\omega^i_{kl}\,v^{(1)k}\,v^{(1)l} = h_{jk}\,\omega^k +$$

$$+ \check{h}_{j(1)k}\,\Theta^{(1)k}, \tag{4.40}$$

$$\nabla h_{(1)j} - 2a_i\,\omega^i_{kj}\,v^{(1)k} = h_{(1)jk}\,\omega^k + h_{(1)j(1)k}\,\Theta^{(1)k},$$

где

$$a_{ijk} = a_{ikj}, \quad h_{jk} = h_{kj}, \quad \check{h}_{j(1)k} = h_{(1)kj}, \quad h_{(1)j(1)k} = h_{(1)k(1)j}.$$

Частично продолжив предыдущую систему, будем иметь

$$\nabla a_{ijk} - a_{lk}\,\omega^l_{ij} - a_{il}\,\omega^l_{jk} - a_l\,\omega^l_{ijk} = a_{ijkl}\,\omega^l,$$

$$\nabla h_{(1)j(1)k} - 2a_i\,\omega^i_{jk} = h_{(1)j(1)kl}\,\omega^l + h_{(1)j(1)k(1)l}\,\Theta^{(1)l}, \tag{4.41}$$

причем

$$a_{ijkl} = a_{ijlk}, \quad h_{(1)j(1)k(1)l} = h_{(1)j(1)l(1)k}.$$

Рассмотрим функцию

$$F = h - a_{ij}\,v^{(1)i}\,v^{(1)j}, \tag{4.42}$$

удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$dF = F_k\,\omega^k + {}'F_k\,\Theta^{(1)k}, \tag{4.43}$$

где

$$F_k = h_k - a_{ijk}\,v^{(1)i}\,v^{(1)j},$$

$${}'F_k = h_{(1)k} - a_{kj}\,v^{(1)j} - a_{ik}\,v^{(1)i},$$

причем

$$\bar{F}=\rho^3 F.$$

После двухкратного частичного дифференциального продолжения дифференциального уравнения (4.43) получаем тензор

$$''F_{kl}=h_{(1)k(1)l}-a_{kl}-a_{lk}, \qquad (4.44)$$

удовлетворяющий системе дифференциальных уравнений

$$\nabla'' F_{kl}=''F_{kls}\,\omega^s+'''F_{kls}\,\Theta^{(1)s}, \qquad (4.45)$$

где

$$''F_{kls}=h_{(1)k(1)ls}-a_{kls}-a_{lks},$$

$$'''F_{kls}=h_{(1)k(1)l(1)s},$$

причем

$$''F_{kl}=''F_{lk}, \quad ''\bar{F}_{kl}=''F_{kl}.$$

Тензор $'''F_{kls}$ симметричен по всем индексам и удовлетворяет условиям

$$'''F_{kls}\,v^{(1)s}='''F_{kls}\,v^{(1)l}='''F_{kls}\,v^{(1)k}=0. \qquad (4.45')$$

В дальнейших расчетах введем обозначение $''F_{ij}=m_{ij}$. Будем рассматривать тот случай, когда $\det\|m_{ij}\|\neq 0$. Тогда существует тензор m^{jk}, обратный тензору m_{jk} и удовлетворяющий системе дифференциальных уравнений

$$\nabla m^{jk}=m_l^{jk}\,\omega^l+'m_l^{jk}\,\Theta^{(1)l}, \qquad (4.46)$$

причем

$$\bar{m}^{jk}=m^{jk}, \quad \bar{m}_l^{jk}=m_l^{jk}, \quad '\bar{m}_l^{jk}=\rho^{-1}\,'m_l^{jk}.$$

Продолжая систему (4.46), будем иметь

$$\nabla m_{ijk}-m_{il}\,\omega_{jk}^l-m_{lj}\,\omega_{ik}^l-'m_{ijl}\,\Theta_k^{(1)l}=m_{ijkl}\,\omega^l+'\check{m}_{ijkl}\,\Theta^{(1)l},$$

$$\nabla' m_{ijkl}='m_{ijkl}\,\omega^l+''m_{ijkl}\,\Theta^{(1)l}. \qquad (4.47)$$

$$m_{ijkl}=m_{ijlk}, \quad '\check{m}_{ijkl}='m_{ijlk}, \quad ''m_{ijkl}=''m_{ijlk}.$$

В рассматриваемом случае всегда существует система функций

$$K_{ki}^l=\frac{1}{2}\,m^{jl}\,(m_{kji}+m_{jik}-m_{ikj}), \qquad (4.48)$$

удовлетворяющая системе дифференциальных уравнений

$$\nabla K_{ki}^l-\omega_{ki}^l-\frac{1}{2}\,m^{jl}\,('m_{kjp}\,\Theta_i^{(1)p}+'m_{jip}\,\Theta_k^{(1)p}-'m_{ikp}\,\Theta_j^{(1)p})=$$

$$=K_{kis}^l\,\omega^s+'K_{kis}^l\,\Theta^{(1)s}. \qquad (4.49)$$

Учитывая соотношения (4.45′), образуем систему функций

$$M^l=K_{ki}^l\,v^{(1)k}\,v^{(1)i}, \qquad (4.50)$$

удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений типа (3.26), частичные дифференциальные продолжения которой дают величины $\frac{1}{2}\,'M_p^l$ и $\frac{1}{2}\,''M_{pt}^l$, образующие соответственно объекты линейной связности и аффинной связности без кручения.

Таким образом, доказана

Теорема 5. *Если* $m=1$, $a_i=a_i(x^j)$ *и тензор* (4.44) *не вырожденный, т. е.* $\|\det m_{ij}\|\neq 0$, *то всегда существует аффинная связность без кручения, присоединенная к ассоциированному пространству* $(L_n^{(1)}, F)$ *и инвариантная относительно преобразований* (1.17).

Здесь под ассоциированным пространством $(L_n^{(1)}, F)$ понимается подпространство $(L_n^{(1)}, F)$ пространства $\left(L_n^{(1)}, (a_i, h)\right)$.

§ 5. Случай $m=4$, $n=2$

1. В этом случае существует такое ковекторное поле $\overset{(a)}{m}_\alpha$ $(a=1, 2)$, компоненты которого удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$d\overset{(a)}{m}_\alpha-\overset{(a)}{m}_\beta\Theta^\beta_\alpha+\overset{(b)}{m}_\alpha\mathfrak{D}^a_b=\overset{(a)}{m}_{\alpha i}\,\omega^i+\overset{(a)}{m}_{\alpha(1)i}\,\Theta^{(1)i} \tag{5.1}$$

с частичным дифференциальным продолжением

$$\begin{gathered}\nabla\overset{(a)}{m}_{\alpha i}-\overset{(a)}{m}_{\alpha(1)k}\,\Theta^{(1)k}_i=\overset{(a)}{m}_{\alpha ij}\,\omega^j+\overset{(\check a)}{m}_{\alpha i(1)j}\,\Theta^{(1)j},\\ \nabla\overset{(a)}{m}_{\alpha(1)i}=\overset{(a)}{m}_{\alpha(1)ij}\,\omega^j+\overset{(a)}{m}_{\alpha(1)i(1)j}\,\Theta^{(1)j},\\ \nabla\overset{(a)}{m}_{\alpha(1)i(1)j}=\overset{(a)}{m}_{\alpha(1)i(1)jk}\,\omega^k+\overset{(a)}{m}_{\alpha(1)i(1)j(1)k}\,\Theta^{(1)k},\\ \overset{(a)}{m}_{\alpha ij}=\overset{(a)}{m}_{\alpha ji},\quad \overset{(\check a)}{m}_{\alpha i(1)j}=\overset{(a)}{m}_{\alpha(1)ji},\quad \overset{(a)}{m}_{\alpha(1)i(1)j}=\overset{(a)}{m}_{\alpha(1)j(1)i},\\ \overset{(a)}{m}_{\alpha(1)i(1)j(1)k}=\overset{(a)}{m}_{\alpha(1)i(1)k(1)j},\end{gathered} \tag{5.2}$$

что система уравнений (см. [8])

$$a^\alpha_i\overset{(a)}{m}_\alpha=0 \tag{5.3}$$

имеет решение

$$\overset{(\bar a)}{m}_\alpha=A^a_b\overset{(b)}{m}_\alpha,\quad \det\|A^a_b\|\neq 0, \tag{5.4}$$

определенное с точностью до матриц $\|A^a_b\|$ (их мы будем считать функциями от x^j и $v^{(1)j}$), удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений

$$\nabla A^a_b=A^a_{bi}\,\omega^i+A^a_{b(1)i}\,\Theta^{(1)i}. \tag{5.5}$$

Совокупность этих матриц $\|A^a_b\|$ образует группу с инвариантными формами $\mathfrak{D}^a_b$, причем

$$D\mathfrak{D}^a_b=\mathfrak{D}^c_b\wedge\mathfrak{D}^a_c. \tag{5.6}$$

Тогда система функций

$$\overset{(a)}{F}=h^\alpha\overset{(a)}{m}_\alpha \tag{5.7}$$

удовлетворяет условиям

$$\overset{(\bar a)}{F}=\rho^2\overset{(a)}{F},\quad \overset{(\bar a)}{F}=A^a_b\overset{(b)}{F}. \tag{5.8}$$

Так как имеет место второе уравнение системы (1.16) и (5.1), то дифференцируя обычным образом функции (5.7), получим

$$d\overset{(a)}{F}=\overset{(a)}{F}_i\,\omega^i+{}'\overset{(a)}{F}_i\,\Theta^{(1)i},\tag{5.9}$$

где

$$\overset{(a)}{F}_i=h_i^\alpha\,\overset{(a)}{m}_\alpha+h^\alpha\,\overset{(a)}{m}_{\alpha i},$$

$${}'\overset{(a)}{F}_i=h_{(1)i}^\alpha\,\overset{(a)}{m}_\alpha+h^\alpha\,\overset{(a)}{m}_{\alpha(1)i}.$$

Дифференцируя обычным образом систему (5.3) соответственно один и два раза, получим равенства (в силу линейной независимости форм ω^i, $\Theta^{(1)i}$), связывающие компоненты дифференциальных продолжений тензора a_i^α и ковектора $\overset{(a)}{m}_\alpha$:

$$a_{i(1)i}^\alpha\,\overset{(a)}{m}_\alpha+a_i^\alpha\,\overset{(a)}{m}_{\alpha(1)i}=0,$$

$$a_{p(1)i(1)l}^\alpha\,\overset{(a)}{m}_\alpha+a_{p(1)i}^\alpha\,\overset{(a)}{m}_{\alpha(1)l}+a_{p(1)l}^\alpha\,\overset{(a)}{m}_{\alpha(1)i}+a_p^\alpha\,\overset{(a)}{m}_{\alpha(1)i(1)l}=0.$$

После двукратного частичного продолжения дифференциального уравнения (5.9), учитывая предыдущие равенства, получим систему тензоров

$$''\overset{(a)}{F}_{ij}=h_{(1)i(1)j}^\alpha\,\overset{(a)}{m}_\alpha+h_{(1)i}^\alpha\,\overset{(a)}{m}_{\alpha(1)j}+h_{(1)j}^\alpha\,\overset{(a)}{m}_{\alpha(1)i}+h^\alpha\,\overset{(a)}{m}_{\alpha(1)i(1)j},\tag{5.10}$$

причем

$$''\overset{(a)}{F}_{ij}={}''\overset{(a)}{F}_{ji},\quad ''\overset{(\bar a)}{F}_{ij}={}''\overset{(a)}{F}_{ij}.$$

Если будем считать, что в пространстве $L_n^{(1)}$ финслеровы метрики введены при помощи метрических функций $\overset{(a)}{F}$ (определенных формулой (5.7)), то симметрические тензоры (5.10) являются метрическими тензорами соответствующих финслеровых пространств.

Из систем (5.1)–(5.5) и частичного дифференциального продолжения системы (5.5) получим формулы преобразования компонент частичных дифференциальных продолжений ковекторов $\overset{(a)}{m}_\alpha$ при перенормировке ковекторов $\overset{(a)}{m}_\alpha$, т. е. при изменении финслерова пространства в пучке финслеровых пространств, определенном системой матриц $\| A_b^a \|$:

$$\overset{(\bar a)}{m}_{\alpha i}=A_{bi}^a\,\overset{(b)}{m}_\alpha+A_b^a\,\overset{(b)}{m}_{\alpha i},$$

$$\overset{(\bar a)}{m}_{\alpha(1)i}=A_b^a\,\overset{(b)}{m}_{\alpha(1)i}+A_{b(1)i}^a\,\overset{(b)}{m}_\alpha,$$

$$\overset{(\bar a)}{m}_{\alpha(1)i(1)j}=A_b^a\,\overset{(b)}{m}_{\alpha(1)i(1)j}+A_{b(1)j}^a\,\overset{(b)}{m}_{\alpha(1)i}+A_{b(1)i}^a\,\overset{(b)}{m}_{\alpha(1)j}+A_{b(1)i(1)j}^a\,\overset{(b)}{m}_\alpha.$$

Используя предыдущие равенства и формулу (5.10), получим закон преобразования тензоров $''\overset{(a)}{F}_{ij}$ относительно преобразований (5.4)

$$''\overset{(\bar a)}{F}_{ij}=A_b^a\,''\overset{(b)}{F}_{ij}+2\,A_{b((1)i}^a\,{}'\overset{(b)}{F}_{j)}+A_{b(1)i(1)j}^a\cdot\overset{(b)}{F}.\tag{5.11}$$

Рассмотрим тот случай, когда преобразование (5.4) индицирует конформное преобразование метрических тензоров $\overset{(a)}{''F}_{ij}$ соответствующих финслеровых пространств, т. е. когда

$$\overset{(a)}{''F}_{ij}=A^a_b\,\overset{(b)}{''F}_{ij}. \tag{5.12}$$

Аналогично теореме 2 доказывается

Теорема 6. *Преобразование* (5.4) *индицирует конформное преобразование* (5.12) *метрических тензоров* $\overset{(a)}{''F}_{ij}$ *в том и только в том случае, когда* $A^a_b=A^a_b(x)$.

Рассмотрим относительный тензор

$$h_{ij}=\sigma_{ab}\,\sigma^{kl}\,\overset{(a)}{''F}_{ik}\,\overset{(b)}{''F}_{jl}, \tag{5.13}$$

где σ_{ab} и σ^{kl} — соответственно ковариантные и контравариантные двухвекторы ($\sigma_{ab}=\delta^{12}_{ab}$, $\sigma^{kl}=\delta^{kl}_{12}$, где δ^{12}_{ab} и δ^{kl}_{12} — обобщенные символы Кронеккера — Крамлета), удовлетворяющие соответственно дифференциальным уравнениям

$$\nabla\sigma_{ab}=-2\sigma_{ab}\,\mathfrak{D}^c_c, \tag{5.13'}$$

$$\nabla\sigma^{kl}=2\sigma^{kl}\,\omega^s_s. \tag{5.13''}$$

Дифференцируя (5.13) и учитывая предыдущие дифференциальные уравнения, получим

$$\nabla h_{ij}+(2\mathfrak{D}^c_c-2\omega^s_s)\,h_{ij}=h_{ijk}\,\omega^k+{}'h_{,jk}\,\Theta^{(1)k}. \tag{5.14}$$

Рассмотрим случай, когда относительный тензор h_{ij} не вырожденный, т. е. $h=\det\|h_{ij}\|\neq 0$.

Тогда величина

$$h=\sigma^{i_1i_2}\,\sigma^{j_1j_2}\,h_{i_1j_1}\,h_{i_2j_2} \tag{5.15}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$d\ln h-8\omega^s_s+4\mathfrak{D}^c_c=h_i\,\omega^i+{}'h_i\,\Theta^{(1)i}. \tag{5.16}$$

Величины

$$H_{ij}=h^u h_{ij} \tag{5.17}$$

(u — рациональное число) являются решением системы дифференциальных уравнений

$$\nabla H_{ij}-H_{ij}\{(8u+2)\,\omega^s_s-(4u+2)\,\mathfrak{D}^c_c\}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \omega^i,\ \Theta^{(1)i}). \tag{5.18}$$

Если $\det\|A^a_b\|=1$ (или $\mathfrak{D}^c_c=0$) и $u=-\frac{1}{4}$, то H_{ij} образует тензор и

$$\nabla H_{ij}=H_{ijk}\,\omega^k+{}'H_{ijk}\,\Theta^{(1)k}, \tag{5.19}$$

причем

$$\overline{H}_{ij}=H_{ij},\quad \tilde{H}_{ij}=H_{ij}, \tag{5.20}$$

т. е. тензор H_{ij} является инвариантом относительно вышеуказанного пучка финслеровых пространств.

Для тензора H_{ij} всегда существует система функций

$$N_{ij}^{k}=\frac{1}{2}\,H^{kl}(H_{jli}+H_{lij}-H_{ijl}), \tag{5.21}$$

удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений

$$\nabla N_{ij}^{k}-\omega_{ij}^{k}-\frac{1}{2}\,H^{kl}({}'H_{jlp}\,\Theta_{i}^{(1)p}+{}'H_{lip}\,\Theta_{j}^{(1)p}-{}'H_{ijp}\,\Theta_{l}^{(1)p})\equiv$$
$$\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \omega^{i},\ \Theta^{(1)i}) \tag{5.22}$$

и обладающих следующими свойствами:

$$N_{ij}^{k}=N_{ji}^{k},\quad \bar{N}_{ij}^{k}=N_{ij}^{k},\quad \tilde{N}_{ij}^{k}=N_{ij}^{k}. \tag{5.23}$$

Так как и в этом случае величины ${}'H_{ijk}$ обладают свойством симметричности по нижним индексам и условию ${}'H_{ijk}v^{(1)k}=0$, то, подобно (3.25), образуем систему функций

$$P^{k}=N_{ij}^{k}\,v^{(1)i}\,v^{(1)j}, \tag{5.24}$$

удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений

$$\nabla P^{k}-\omega_{ij}^{k}\,v^{(1)i}\,v^{(1)j}=P_{l}^{k}\,\omega^{l}+{}'P_{l}^{k}\,\Theta^{(1)l} \tag{5.25}$$

и

$$\bar{P}^{k}=\rho^{2}P^{k},\quad \tilde{P}^{k}=P^{k}. \tag{5.26}$$

После двукратного частичного дифференциального продолжения получим выражение

$$\Gamma_{ls}^{k}=\frac{1}{2}\,{}''P_{ls}^{k}, \tag{5.27}$$

которое является объектом аффинной связности без кручения, общим для всех финслеровых пространств пучка финслеровых пространств, определенных матрицами $\|A_{b}^{a}\|$, и инвариантным относительно преобразований (1.17), т. е.

$$\bar{\Gamma}_{ls}^{k}=\Gamma_{ls}^{k},\quad \tilde{\Gamma}_{ls}^{k}=\Gamma_{ls}^{k}.$$

2. Если $a_{i}^{\alpha}=a_{i}^{\alpha}(x^{j})$, то компоненты ковекторного поля $\overset{(a)}{m}_{\alpha}$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$d\overset{(a)}{m}_{\alpha}-\overset{(a)}{m}_{\beta}\,\Theta_{\alpha}^{\beta}+\overset{(b)}{m}_{\alpha}\,\mathfrak{D}_{b}^{a}=\overset{(a)}{m}_{\alpha i}\,\omega^{i}, \tag{5.28}$$

а дифференциальные уравнения дифференциально-геометрического объекта $(a_{i}^{\alpha},\ h^{\alpha})$ и его дифференциальных продолжений совпадают с уравнениями (2.9), (2.10).

Если в данном случае ранг матрицы

$$\left\|\begin{matrix} a_{1}^{1} & a_{1}^{2} & a_{1}^{3} & a_{1}^{4}\\ a_{2}^{1} & a_{2}^{2} & a_{2}^{3} & a_{2}^{4}\\ a_{11}^{1} & a_{11}^{2} & a_{11}^{3} & a_{11}^{4}\\ a_{12}^{1} & a_{12}^{2} & a_{12}^{3} & a_{12}^{4}\\ a_{22}^{1} & a_{22}^{2} & a_{22}^{3} & a_{22}^{4}\end{matrix}\right\|$$

равен 4, то на основании работы [8] тензоры

$$\overset{(a)}{\mathfrak{A}}_{ij}=\overset{(a)}{a^{\alpha}_{(ij)}}m_{\alpha}, \tag{5.29}$$

линейно независимы, и пару этих тензоров можно считать обобщенным тензором. Тензоры $\overset{(a)}{\mathfrak{A}}_{ij}$ инварианты относительно преобразований, определенных формулами (1.17), и охватываются подобъектом второго порядка $(a^{\alpha}_{i}, a^{\alpha}_{ij})$ дифференциального продолжения дифференциально-геомертического объекта $(a^{\alpha}_{i},\ h^{\alpha})$, т. е. имеем

$$\nabla\overset{(a)}{\mathfrak{A}}_{ij}=\overset{(a)}{\mathfrak{A}}_{ijk}\,\omega^{k}, \tag{5.30}$$

причем

$$\overset{(\bar a)}{\mathfrak{A}}_{ij}=\overset{(a)}{\mathfrak{A}}_{ij},\quad \overset{(\tilde a)}{\mathfrak{A}}_{ij}=A^{a}_{b}\overset{(b)}{\mathfrak{A}}_{ij}. \tag{5.31}$$

Рассмотрим относительный тензор

$$q_{ij}=\sigma_{ab}\,\sigma^{kl}\overset{(a)}{\mathfrak{A}}_{ik}\overset{(b)}{\mathfrak{A}}_{jl},\quad \bar q_{ij}=q_{ij},\quad \tilde q_{ij}=q_{ij}, \tag{5.32}$$

где σ_{ab} и σ^{kl} – соответственно ковариантные и контравариантные двухвекторы.

Проводя расчеты, аналогичные формулам (5.14) – (5.18), над величинами

$$\varphi_{ij}=q^{u}\,q_{ij}\quad (u \text{ – рациональное число}), \tag{5.33}$$

получим

$$\nabla\varphi_{ij}-\varphi_{ij}\{(8u+2)\,\omega^{s}_{s}-(4u+2)\,\mathfrak{D}^{c}_{c}\}=\varphi_{ijk}\,\omega^{k}. \tag{5.34}$$

При условиях, предъявленных системе (5.18), величины φ_{ij}, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений (5.34), образуют тензор, и уравнения (5.34) превращаются в систему уравнений вида

$$\nabla\varphi_{ij}=\varphi_{ijk}\,\omega^{k}$$

с дифференциальным продолжением

$$\nabla\varphi_{ijk}-\varphi_{lj}\,\omega^{l}_{ik}-\varphi_{il}\,\omega^{l}_{jk}=\varphi_{ijkl}\,\omega^{l}. \tag{5.35}$$

Образуем систему функций

$$\Phi^{k}_{ij}=\frac{1}{2}\,\varphi^{kl}\,(\varphi_{jli}+\varphi_{lij}-\varphi_{ijl}), \tag{5.36}$$

где φ^{kl} – тензор, обратный тензору φ_{kl}, а φ_{ijl} – компоненты продолжения тензора φ_{ij}.

Из (5.35) и (5.36) следует, что

$$\nabla\Phi^{k}_{ij}-\omega^{k}_{ij}=\Phi^{k}_{ijp}\,\omega^{p}, \tag{5.37}$$

т. е. в качестве объекта аффинной связности Φ^{k}_{ij} можно выбрать объект Кристоффеля, присоединенный к тензору φ_{ij}.

§ 6. Случай $m=\frac{n(n+1)}{2}$

Если $a^{\alpha}_{i}=a^{\alpha}_{i}(x^{j})$, то всегда существует система функций

$$\varphi^{\alpha}_{i}=h^{\alpha}_{(1)i}-2a^{\alpha}_{ij}\,v^{(1)j}, \tag{6.1}$$

удовлетворяющая системе дифференциальных уравнений

$$\nabla\varphi^{\alpha}_{i}=\varphi^{\alpha}_{ij}\,\omega^{j}+{}'\varphi^{\alpha}_{ij}\,\Theta^{(1)j}, \tag{6.2}$$

где

$$\varphi^{\alpha}_{ij} = h^{\alpha}_{(1)ij} - 2a^{\alpha}_{lij}\, v^{(1)l}, \quad '\varphi^{\alpha}_{ij} = h^{\alpha}_{(1)i(1)j} - 2a^{\alpha}_{ij},$$

причем

$$\bar{\varphi}^{\alpha}_{i} = \rho\varphi^{\alpha}_{i}. \tag{6.3}$$

Частично продолжая (6.2), получим

$$\nabla\, '\varphi^{\alpha}_{ij} = '\varphi^{\alpha}_{ijk}\, \omega^{k} + ''\varphi^{\alpha}_{ijk}\, \Theta^{(1)k}, \tag{6.4}$$

а также

$$''\varphi^{\alpha}_{ijk} = ''\varphi^{\alpha}_{ikj}, \quad '\bar{\varphi}^{\alpha}_{ij} = '\varphi^{\alpha}_{ij}.$$

Рассмотрим симметрический тензор

$$H^{\alpha}_{ij} = '\varphi^{\alpha}_{(ij)}, \tag{6.5}$$

удовлетворяющий системе дифференциальных уравнений

$$\nabla H^{\alpha}_{ij} = H^{\alpha}_{ijk}\, \omega^{k} + 'H^{\alpha}_{ijk}\, \Theta^{(1)k}, \tag{6.6}$$

где $'H^{\alpha}_{ijk}$ симметричен по всем нижним индексам и выполнены условия

$$'H^{\alpha}_{ijk}\, v^{(1)k} = 'H^{\alpha}_{ijk}\, v^{(1)j} = 'H^{\alpha}_{ijk}\, v^{(1)i} = 0, \tag{6.7}$$

причем

$$\bar{H}^{\alpha}_{ij} = H^{\alpha}_{ij}.$$

Учитывая то, что в рассматриваемом случае также имеет место условие $m \leqslant 2n$, вытекающее из системы дифференциальных уравнений (1.15), имеем $n \leqslant 3$. Поэтому рассмотрению подлежат лишь следующие случаи: а) $m = n = 1$; б) $n = 2$, $m = 3$; в) $n = 3$, $m = 6$. Из них наиболее интересны случаи (б) и (в). В этих случаях тензор H^{α}_{ji} можно рассматривать как квадратичную матрицу (α — номер строки, перестановка ij — номер столбца).

1. Если $n = 2$, $m = 3$, то всегда существует система величин

$$H^{\alpha\beta} = \sigma^{i_1 i_2}\, \sigma^{j_1 j_2}\, H^{\alpha}_{i_1 j_1}\, H^{\beta}_{i_2 j_2}, \tag{6.8}$$

где $\sigma^{i_1 i_2}$ и $\sigma^{j_1 j_2}$ — контравариантные двухвекторы, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений (5.13″). Величины (6.8) удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\nabla H^{\alpha\beta} - 4\omega^{s}_{s}\, H^{\alpha\beta} = H^{\alpha\beta}_{i}\, \omega^{i} + 'H^{\alpha\beta}_{i}\, \Theta^{(1)i}. \tag{6.9}$$

При этом величина

$$H = \frac{2}{3!\,2!}\, \sigma_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\, \sigma_{\beta_1\beta_2\beta_3}\, H^{\alpha_1\beta_1}\, H^{\alpha_2\beta_2}\, H^{\alpha_3\beta_3}, \tag{6.10}$$

где $\sigma_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$ и $\sigma_{\beta_1\beta_2\beta_3}$ — ковариантные трехвекторы, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений типа

$$\nabla\sigma_{\alpha\beta\gamma} = -3\sigma_{\alpha\beta\gamma}\, \Theta^{\sigma}_{\sigma},$$

является решением дифференциального уравнения

$$d \ln H - \frac{1}{12}\,(12\,\omega^{s}_{s} - 6\,\Theta^{\sigma}_{\sigma}) = H_{i}\, \omega^{i} + 'H_{i}\, \Theta^{(1)i}. \tag{6.11}$$

Предположим, что величина $H \neq 0$ (например, выбирая $H^{\alpha}_{w} = \delta^{\alpha}_{w}$, где w — занумерованные перестановки ij, получим $H = 1$).

Тогда величины

$$\overset{*}{H}{}^{ij}_{\alpha}=\frac{\partial \ln H}{\partial H^{\alpha}_{ij}} \tag{6.12}$$

образуют тензор, обратный тензору H^{α}_{ij}, удовлетворяющий системе дифференциальных уравнений

$$\nabla \overset{*}{H}{}^{ij}_{\alpha}=\overset{*}{H}{}^{ij}_{\alpha k}\,\omega^{k}+{}'\overset{*}{H}{}^{ij}_{\alpha k}\,\Theta^{(1)k}. \tag{6.13}$$

Так как $d\ln H=\overset{*}{H}{}^{ij}_{\alpha}\ dH^{\alpha}_{ij}$, то в силу (6.6) и (6.11) получим (сравнивая коэффициенты при одинаковых формах)

$$\overset{*}{H}{}^{ij}_{\alpha}\,H^{\alpha}_{sj}=\frac{1}{2}\ \delta^{i}_{s}.$$

$$\overset{*}{H}{}^{ij}_{\alpha}\,H^{\sigma}_{ij}=\frac{1}{2}\ \delta^{\sigma}_{\alpha}.$$

Проводя аналогичные расчеты для случая $n=3$, $m=6$, получим

$$\overset{**}{H}{}^{ij}_{\alpha}\,H^{\sigma}_{ij}=\frac{1}{240}\ \delta^{\sigma}_{\alpha},$$

$$\overset{**}{H}{}^{ij}_{\alpha}\,H^{\alpha}_{sj}=\frac{1}{240}\ \delta^{i}_{s},$$

или предыдущие формулы можно записать в общем виде

$$\overset{*}{H}{}^{ij}_{\alpha}\,H^{\alpha}_{sj}=\frac{1}{(m-1)!\,(n-1)!}\ \delta^{i}_{s}, \tag{6.14}$$

$$\overset{*}{H}{}^{ij}_{\alpha}\,H^{\sigma}_{ij}=\frac{1}{(m-1)!\,(n-1)!}\ \delta^{\sigma}_{\alpha}.$$

2. Если $n=3$, $m=2$, то существует выражение

$$H_{ijkl}=\sigma_{\alpha\beta}\,H^{\alpha}_{ik}\,H^{\beta}_{jl}, \tag{6.15}$$

пердетерминант которого вычисляется по формуле

$$\Pi=\frac{1}{12}\ \sigma^{i_1 i_2 i_3}\,\sigma^{j_1 j_2 j_3}\,\sigma^{k_1 k_2 k_3}\,\sigma^{l_1 l_2 l_3}\,H_{i_1 j_1 k_1 l_1}\,H_{i_2 j_2 k_2 l_2}\,H_{i_3 j_3 k_3 l_3}. \tag{6.16}$$

Предположим, что гипердетерминант $\Pi\neq 0$ (например, приняв

$$H^{\alpha}_{ij}=\begin{cases}1, & \text{когда или } \alpha=i, \text{ или } \alpha=j, \text{ или } \alpha=i=j,\\ 0 & \text{— в остальных случаях,}\end{cases}$$

получим $\Pi=1$).

Выражение (6.16) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$d\ln\Pi-\frac{1}{12}\ (12\,\omega^{s}_{s}-6\,\Theta^{\sigma}_{\sigma})=\Pi_{i}\,\omega^{i}+{}'\Pi_{i}\,\Theta^{(1)i}. \tag{6.17}$$

Рассмотрим тензоры

$$\overset{***}{H}{}^{ij}_{\alpha}=\frac{\partial \ln \Pi}{\partial H^{\alpha}_{ij}}\ ,$$

удовлетворяющие дифференциальным уравнениям типа (6.13). Очевидно, что тензоры $\overset{***}{H}{}^{ij}_{\alpha}$ и H^{α}_{ij} связаны равенствами (6.14).

Таким образом, при $n=2$, $m=3$; $n=3$, $m=6$ и при $n=3$, $m=2$ вышеуказанными способами можно сконструировать тензоры, обратные тензорам H_{ij}^{α}.

Тогда существует система величин

$$y_{ki}^{p} = {}_{3}\frac{(m-1)!\,(n-1)!}{2} \overset{*}{H}{}_{\alpha}^{jp} (H_{ijk}^{\alpha} + H_{jki}^{\alpha} - H_{kij}^{\alpha}), \tag{6.18}$$

удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений

$$\nabla y_{ki}^{p} - \frac{1}{2}\,\omega_{ki}^{p} - \frac{(m-1)!\,(n-1)!}{2} \overset{*}{H}{}_{\alpha}^{jp} ('H_{ijq}^{\alpha}\,\Theta_{k}^{(1)q} + 'H_{jkq}^{\alpha}\,\Theta_{i}^{(1)q} -$$

$$- 'H_{kiq}^{\alpha}\,\Theta_{j}^{(1)q}) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^{i},\ \Theta^{(1)i}), \tag{6.19}$$

причем

$$y_{ki}^{p} = y_{ik}^{p}, \quad \bar{y}_{ki}^{p} = y_{ki}^{p}. \tag{6.20}$$

Рассматривая систему величин

$$\Gamma^{p} = y_{ki}^{p}\, v^{(1)k}\, v^{(1)i}, \tag{6.21}$$

проводя расчеты, аналогичные расчетам по формулам (4.50)–(4.53) и учитывая условия (6.7), получим систему величин Γ_{ki}^{p}, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений

$$\nabla \Gamma_{ki}^{p} - \omega_{ki}^{p} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^{i},\ \Theta^{(1)i}) \tag{6.22}$$

и

$$\Gamma_{ki}^{p} = \Gamma_{ik}^{p}, \quad \bar{\Gamma}_{ki}^{p} = \Gamma_{ki}^{p}.$$

Таким образом, получили, что, если $a_{i}^{\alpha} = a_{i}^{\alpha}(x)$ и величины m, n принимают одно из значений: $n=2$, $m=3$; $n=3$, $m=6$; $n=3$, $m=2$, то всегда существует объект аффинной связности без кручения Γ_{ki}^{p}, инвариантный относительно преобразований, определенных формулами (1.17).

В заключение выражаю глубокую благодарность В. И. Близникасу за постановку задачи и помощь при ее решении.

Вильнюсский Государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
12.XII.1968

Литература

1. В. И. Близникас, Евклидова связность картановского типа в метрическом пространстве линейных элементов, Лит. матем. сб., **II**, № 2 (1962), 33–37.
2. В. И. Близникас, Некоторые внутренние геометрии гиперповерхности пространства аффинной связности, Лит. матем. сб., **IV**, № 2 (1964), 165–181.
3. В. И. Близникас, Неголономное дифференцирование Ли и линейные связности в пространстве опорных элементов, Лит. матем. сб., **VI**, № 2 (1966), 142–209.
4. В. И. Близникас, О геометрии нормальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений высшего порядка, Лит. матем. сб., **VII**, № 2 (1967) 231–248.
5. В. И. Близникас, О геометрии систем дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными, Лит. матем. сб., **VII**, № 2 (1967), 250–264.
6. В. И. Близникас, Аффинные связности, присоединенные к квазилинейной системе дифференциальных уравнений первого порядка с частными производными, Известия высших учебных заведений, Математика, 1968, № 1 (68), 18–22.
7. В. И. Близникас, К. И. Гринцевичюс, О неголономной линейчатой геометрии, Третья Прибалтийская геометрическая конференция (Тезисы докладов), Паланга, 1968 21–25.

8. В. И. Близникас, О геометрии систем дифференциальных уравнений первого порядка с частными производными, Тр. геомет. семинара, Ин-т науч. информ. АН СССР, 1969, II, 33–53.
9. А. М. Васильев, Системы трех дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка при трех независимых функциях и двух независимых переменных (локальная теория), Матем. сб., 70(112), 4, 1966, 457–480.
10. Г. М. Кузьмина, О геометрии системы двух дифференциальных уравнений в частных производных, Уч. зап. Моск. гос. пед. инст., 1965, № 243, 99–109.
11. A. Krisztеn, Zur Geometrie der partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung, Math. Ann., 1965, 158, N 1, 35–45.
12. Г. Ф. Лаптев, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований, Тр. Моск. матем. о-ва, 2, 1953, 275–382.
13. Э. М. Шварцбурд, Структурные уравнения системы четырех дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка, Уч. зап. Моск. гос. пед. инст., 1965, № 243, 192–201.

ANTROS EILĖS KVAZITIESINIŲ DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SISTEMŲ GEOMETRIJOS KLAUSIMU

Z. Lupeikis

(Reziumė)

Straipsnyje G. Laptevo metodu nagrinėjami antros eilės kvazitiesinių diferencialinių lygčių sistemų

$$a_i^\alpha\left(x^j, \frac{dx^j}{dt}\right)\frac{d^2x^i}{dt^2}+h^\alpha\left(x^j, \frac{dx^j}{dt}\right)=0,$$

$$(i, j, \ldots =1, 2, \ldots, n; \quad \alpha, \beta, \ldots =1, 2, \ldots, m) \qquad (1)$$

geometrijos klausimai, kai $m=n$; $m=n+1$; $m=4$, $n=2$; $m=1$, n – bet koks sveikas skaičius; $m=2$, $n=3$; $m=3$, $n=2$; $m=6$, $n=3$.

Atskirai išnagrinėti aukščiau nurodytų atvejų geometrijos klausimai, kai funkcijos a_i^α priklauso tik nuo x^j.

Diferencialinių lygčių sistemos (1) geometriją suprasime kaip geometriją pirmos eilės tiesinių elementų erdvės $L_n^{(1)}$ su fundamentaliniu diferencialiniu-geometriniu objektu (a_i^α, h^α).

Minėtiems atvejams surasti simetriniai afininio sąryšio objektai, invariantiniai transformacijų (1.17) atžvilgiu.

ÜBER GEOMETRIE DES QUASILINEARISCHEN SYSTEMS DER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG

Z. Lupeikis

(Zusammenfassung)

In dem vorliegenden Artikel wird mit Hilfe der Methode von G. Laptew die Geometrie des quasilinearischen Systems der Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$a_i^\alpha\left(x^j, \frac{dx^j}{dt}\right)\frac{d^2x^i}{dt^2}+h^\alpha\left(x^j, \frac{dx^j}{dt}\right)=0,$$

$$(i, j, \ldots =1, 2, \ldots, n; \quad \alpha, \beta, \ldots =1, 2, \ldots, m), \qquad (1)$$

behandelt, wenn $m=n$; $m=n+1$; $m=4$, $n=2$; $m=1$, n – eine beliebige naturelle Zahl ist; $m=2$, $n=3$; $m=3$, $n=2$; $m=6$, $n=3$.

Speziell sind die obenerwähnten geometrischen Fälle behandelt worden, wenn die Funktionen a_i^α nur von x^j abhängen.

Die Geometrie des Systems der Differentialgleichungen (1) betrachten wir als die Geometrie des Raumes $L_n^{(1)}$ der Linienelemente der ersten Ordnung mit einem fundamentalen geometrisch-differentialen Objekt (a_i^α, h^α).

Für diese Fälle sind symmetrische Affinzusammenhangsobjekte, Invarianten zu den Transformationen (1.17), festgestellt worden.