1969

УДК – 511

ФОРМУЛЫ ЛИУВИЛЛЯ И ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ФОРМЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ ОБОБЩЕННЫМИ БИНАРНЫМИ ТЭТА-РЯДАМИ

Л. А. Коган

Лиувилль в более чем ста заметках в 1860–1866 годах опубликовал без доказательства формулы для числа представлений чисел различными положительными квадратичными формами с 4-мя и 6-ю переменными специального вида. В формулах Лиувилля для числа представлений чисел квадратичными формами с 4-мя и 6-ю переменными главные члены зависят от делителей представляемого числа, а дополнительные члены зависят от решений некоторых уравнений $n=ax_1^2+bx_1x_2+ex_2^2$ (некоторые формулы Лиувилля вообще не содержат дополнительных членов).

О формулах Лиувилля Б. А. Венков в своей монографии [3] писал: „Результаты Лиувилля хотя и относятся к формам частного вида, однако далеко выходят за пределы того, что может дать общая теория квадратичных форм со многими переменными в ее современном состоянии и потому представляет большой интерес".

Заметим также, что из формулы Лиувилля о представлении натурального числа формой с числом переменных $2l$ ($l\geqslant 2$, целое) следует асимптотическая формула с остаточным членом вида

$$B_\varepsilon n^{\frac{l-1}{2}+\varepsilon}.$$

Такие результаты пока удается получить лишь на основе гипотезы Петерсона о собственных числах операторов Гекке. Эта гипотеза сейчас доказана Эйхлером [25], лишь для случая, соответствующего кватернарным квадратичным формам.

В начале отдельные результаты Лиувилля были доказаны с помощью эллиптических функций. Некоторые формулы Лиувилля были доказаны Пепином [27] арифметическим путем. Большая часть результатов Лиувилля была доказана Я. В. Успенским [19] чисто арифметическим путем. Я. В. Успенскому принадлежит заслуга воссоздания арифметических методов Лиувилля. Некоторые результаты Лиувилля-Успенского изложены в монографии Б. А. Венкова [3]. Большая часть формул Лиувилля, относящихся к квадратичным формам с 4-мя переменными, была выведена А. З. Вальфишем [29–31] с помощью некоторых тригонометрических тождеств.

Некоторые результаты Лиувилля, относящиеся к кватернарным квадратичным формам, получены Клостерманом [28] с помощью модулярных функций и Г. А. Ломадзе [18] с помощью модулярных форм, а также Л. А. Коганом [7, 10—14] на основе метода Якоби-Рамануджана — Харди — Райта — Вальфиша. Все формулы Лиувилля, относящиеся к квадратичным формам с шестью переменными, единым методом, основанным на преобразовании рядов, были доказаны в работах Л. А. Когана [8, 9], Л. А. Когана и Т. В. Федоровой [16], Т. В. Федоровой [20, 21].

Несколько формул Лиувилля для числа представлений чисел квадратичными формами с шестью переменными были выведены Т. В. Вепхвадзе ([4] методом Г. А. Ломадзе.

Все результаты Лиувилля, относящиеся к квадратичным формам с шестью переменными, получены Л. А. Коганом [15] с помощью теории модулярных форм и шаровых функций. Кроме этого, различные авторы получили формулы типа Лиувилля для большого числа квадратичных форм, не рассмотренных ранее Лиувиллем.

Данная статья посвящена проблеме отыскания всех квадратичных форм, для которых могут быть получены формулы типа Лиувилля для числа представлений чисел ими и общих методов получения соответствующих формул.

Заметим, что все дополнительные члены, входящие в формулы Лиувилля для числа представлений чисел квадратичными формами с 4-мя и 6-ю переменными, могут быть введены с помощью коэффициентов Фурье бинарных рядов

$$\sum_{\substack{x_1 x_2 = -\infty \\ x_1 \equiv \eta_1 \pmod N, \\ x_2 \equiv \eta_2 \pmod N}}^{\infty} P_\nu(x_1, x_2)\, e^{2\pi i\tau \frac{Q(x_1, x_2)}{N^2} l}, \tag{1}$$

Здесь $Q(x_1, x_2)$ — целочисленная положительная бинарная квадратичная форма $a x_1^2 + b x_1 x_2 + c x_2^2$, $P_\nu(x_1, x_2)$ — шаровая функция ν-го порядка относительно $Q(x_1, x_2)$, l — натуральное число, τ — комплексное число с мнимой частью большей нуля, $2Q(x_1, x_2) = a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2^2$, $a_{12} = a_{21}$, η_i — целые числа, удовлетворяющие сравнениям

$$\sum_{s=1}^{2} a_{rs} \eta_s \equiv 0 \pmod N, \qquad r = 1,\ 2;$$

N — ступень квадратичной формы $Q(x_1, x_2)$.

То, что все дополнительные члены, входящие в формулы Лиувилля для числа представлений чисел квадратичными формами с шестью переменными, могут быть получены с помощью рядов (1), показано в работе автора [15], там же выведены с помощью этих рядов (при $\eta_i = 0$ и $l = 1$) все формулы Лиувилля, относящиеся к квадратичным формам с шестью переменными.

Некоторые дополнительные члены типа Лиувилля, входящие в формулы для числа представлений чисел квадратичными формами с 4-мя и 8-ю переменными введены с помощью рядов, аналогичных рядам (1), А. Н. Андриановым [1] на основе результатов работы [30], однако можно показать, что все лиувиллевские дополнительные члены, входящие в формулы Лиувилля для числа представлений чисел кватернарными квадратичными формами, могут быть получены с помощью коэффициентов Фурье рядов (1).

В связи с этим положительные квадратичные формы $Q(x_1, \ldots, x_{2k})$ с числом переменных $2k$ (k — натуральное число $\geqslant 2$), тэта-ряды которых

$$\vartheta(\tau, Q) = \sum_{x_1, \ldots, x_{2k}} e^{2\pi i\tau Q(x_1, \ldots, x_{2k})}$$

представимы в виде

$$\sum_{x_1, \ldots, x_{2k}=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\tau Q(x_1, \ldots, x_{2k})} = E(\tau) + \Theta(\tau), \tag{2}$$

где $E(\tau)$ — ряд Эйзенштейна, соответствующий тэта-ряду

$$\sum_{x_1, \ldots, x_{2k}=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\tau Q(x_1, \ldots, x_{2k})},$$

а $\Theta(\tau)$ есть линейная комбинация бинарных рядов (1) (при этом, как будет видно из дальнейшего, ν может принимать значения только равное $k-1$) будем называть лиувиллевскими квадратичными формами.

Далее, введем следующее определение 1. Положительные квадратичные формы с числом переменных $2k$ (k-неч.), для тэта-рядов которых равенство (2) выполняется в случае, когда $\Theta(\tau)$ является линейной комбинацией бинарных рядов (1) ($\nu=k-1$) при $\eta_1=\eta_2=0$, $l=1$, т.е. рядов

$$N^\nu \sum_{x_1, x_2=-\infty}^{\infty} P_\nu(x_1, x_2)\, e^{2\pi i\tau Q(x_1, x_2)}, \tag{3}$$

будем называть лиувиллевскими квадратичными формами в узком смысле. (Заметим, что ряды (3) при ν нечетных тождественно равны нулю, см., например, Эйхлер [24] стр. 230.)

Задача отыскания всех лиувиллевских квадратичных форм в некотором смысле напоминает вопрос, поставленный на конференции в Мадисоне (Висконсин). Этот вопрос заключается в следующем. Известно, что

$$\vartheta_3^s(\tau) = \Big(\sum_{x_1=-\infty}^{\infty} e^{\pi i\tau x_1^2}\Big)^s = E_s(\tau) + \Theta_s(\tau), \tag{4}$$

где s целое число большее 4, τ — комплексное число, причем $\operatorname{Im}\tau>0$, $E_s(\tau)$ — ряд Эйзенштейна, соответствующий тэта-ряду $\vartheta_3^s(\tau)$, $\Theta(\tau)$ — параболическая форма. Известно также, что $\vartheta_s(\tau)\equiv 0$ при $s=5, 6, 7, 8$. На конференции в Мадисоне был поднят вопрос, может ли существовать какое-либо целое $s>0$, для которого $\Theta_s(\tau)=0$. Этот вопрос в 1965 г. был решен Ранкиным [31], который показал, что для целых $s>8$ $\Theta_s(\tau)$ в (4) не может равняться нулю тождественно.

В данной статье, используя одну идею работы Ранкина [31], общую теорию квадратичных форм, с помощью теории модулярных форм, а именно результатов Гекке [26] и Шенеберга [32] и применяя оценку И. М. Виноградова [5] о наименьшем квадратичном невычете по простому модулю получаем теорему.

I. *Начиная с достаточно больших q ни одна квадратичная форма типа $(-k,\ q,\ \chi)$ (k — неч. $\geqslant 3$, q — нечетное простое, $\chi(n)=\left(\frac{n}{q}\right)$ — обобщенный символ Якоби) и дискриминанта $-q^{2l+1}$ (l — целое $\geqslant 0$) при*

$$(k-1)\left(\frac{1}{2\sqrt{l}}+\varepsilon\right)-\frac{1}{2}<l\leqslant k-1 \qquad (\varepsilon>0 - \textit{дейст. число.})$$

не является лиувиллевской квадратичной формой в узком смысле.

Применяя оценку Берджеса [23] о наименьшем квадратичном невычете по простому модулю, выводим теорему.

II. *Начиная с достаточно больших q ни одна квадратичная форма типа $(-k,\ q,\chi)\left(k\right.$ — неч. $\geqslant 3$. q — нечетное простое, $\left.\chi(n)=\left(\frac{n}{q}\right)\right)$ и дискриминанта $-q^{2l+1}$ (l целое $\geqslant 0$) при*

$$(k-1)\left(\frac{1}{4\sqrt{l}}+\varepsilon\right)-\frac{1}{2}<l\leqslant k-1$$

не является лиувиллевской квадратичной формой в узком смысле.

Далее, считая справедливой известную гипотезу И. М. Виноградова о наименьшем квадратичном невычете по простому модулю (известно, см., например, книгу Гельфонда и Линника [6] стр. 217, что эта гипотеза И. М. Виноградова вытекает даже в более сильной форме из расширенной гипотезы Римана. Различные связи указанной гипотезы И. М. Виноградова с другими гипотезами можно найти в работе Линника и Реньи [17]) выводим теорему

III. *Начиная с достаточно больших q ни одна квадратичная форма типа$(-k,q,\chi)\left(k\right.$ — нечетное $\geqslant 3$, $\chi(n)=\left(\frac{n}{q}\right)$, q — неч. $\left.\textit{простое}\right)$ не является лиувиллевской в узком смысле.*

Метод вывода теорем I, II, III, позволяет также сформулировать, например, теорему II в виде

II'. По любому вещественному числу $\varepsilon>0$ найдется такое число C_0, зависящее только от ε, что если простое число q и целое число l удовлетворяют условиям $q>C_0$, $(k-1)\left(\frac{1}{4\sqrt{l}}+\varepsilon\right)-\frac{1}{2}<l\leqslant k-1$, то ни одна из квадратичных форм типа $(-k,\ q,\ \chi)$, $\left(\chi(n)=\left(\frac{n}{q}\right)\right.$ — обобщенный символ Якоби, $k\geqslant 3$ — нечетное $\left.\text{число}\right)$ и дискриминанта $-q^{2l+1}$ не являются лиувиллевской в узком смысле $\left(\text{в частности, для } k=3\right.$ для форм с шестью переменными условие $(k-1)\left(\frac{1}{4\sqrt{l}}+\varepsilon\right)-\frac{1}{2}<l\leqslant k-1$ при $\varepsilon\leqslant\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt{l}}\right)$ выполняется всегда. Кроме этого результаты Берджеса [23] позволяют эффективно определить константу $\left.C_0\right)$.

В работе указывается также на два метода, базирующихся на результатах Гекке [26] и Шенеберга [31], с помощью которых можно (в случае если эффективно найдена константа C_0) отыскать все лиувиллевские квадратичные формы с шестью переменными в узком смысле и получить формулы для числа представлений чисел ими.

Один из методов демонстрируется на квадратичных формах типа $(-3, 23, \chi)$, где $\chi(n)=\left(\frac{n}{23}\right)$.

В статье будем применять следующие обозначения. q — нечетное простое число, p — простое число; N, r, s, n, k — натуральные числа; $a, b, c, d, f, x_1, x_2, \ldots, x_n$ — целые числа; $Q(x)=Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\sum\limits_{1 \leq r \leq s \leq f} b_{rs}x_r x_s$ — положительно-определенная квадратичная форма f — переменных, коэффициенты которой b_{rs} — целые рациональные числа. m — целое неотрицательное число; $L(k, \chi)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^k}$ — ряд Дирихле; $M[m=Q]$ — количество представлений числа m формой Q; $\mu(n)$ — функция Мебиуса; u — нечетное натуральное число; $\left(\frac{m}{u}\right)$ — обобщенный символ Якоби; $\left(\frac{a}{n}\right)$ — символ Кронекера при $a \equiv 0$ или 1 (mod 4) и не равное точному квадрату.

$d(q)$ — максимальное расстояние между соседними квадратичными невычетами в ряду чисел $1, 2, \ldots, q-1$

$$\chi(n)=\left(\frac{n}{q}\right).$$

ε — действительное число большее нуля.

Сформулируем некоторые известные определения и результаты, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Определение 1. (см., например, Гекке [26] и [27] стр. 716).

Пусть Γ — модулярная группа, т. е группа линейных подстановок

$$\tau'=\frac{a\tau+b}{c\tau+d},$$

где $ad-bc=1$. Далее, пусть $\Gamma_0(N)$ обозначает ту подгруппу группы Γ, подстановки которой удовлетворяют сравнению $c \equiv 0 \pmod N$, тогда аналитическая функция $F(\tau)$ называется целой модулярной формой размерности $-r$, присоединенной к подгруппе $\Gamma_0(N)$, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $F(\tau)$ — регулярна и однозначна в верхней полуплоскости;
2) для каждой подстановки группы $\Gamma_0(N)$

$$F\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=\varepsilon(d)(c\tau+d)^r F(\tau), \qquad |\varepsilon(d)|=1; \tag{5}$$

3) в окрестности $\tau=\infty$ имеет место разложение

$$F(\tau)=\sum_{m=0}^{\infty} C_m e^{\frac{2\pi i m}{N}\tau}; \tag{6}$$

4) в окрестности

$$\tau=-\frac{d}{c}\ \left(c \neq 0,\ (c,\ d)=1\right)$$

имеет место разложение

$$(c\tau+d)^r F(\tau)=\sum_{m=0}^{\infty} C'_m e^{2\pi i \frac{m}{N}\cdot\frac{a\tau+b}{c\tau+d}}. \tag{7}$$

Определение 2. Целая модулярная форма $F(\tau)$ называется функцией делителя N, если все показатели, встречающиеся в разложении (6) делятся на N. Тогда (6) принимает вид

$$F(\tau)=\sum_{m=0}^{\infty} A_m e^{2\pi i m\tau}. \tag{8}$$

Определенную таким образом модулярную форму (согласно определению 1) и являющуюся функцией делителя N будем в дальнейшем просто называть модулярной формой типа $\left(-r,\ N,\ \varepsilon(d)\right)$.

Лемма 1. (см., например, [24], стр. 230, [26] [стр. 69–70, [32]). *Пусть $2Q(x)=2Q(x_1, \ldots, x_f)$ — положительная четная квадратичная форма с четным числом f переменных,*

$U=(a_{rs})$ — ее матрица; наконец, $P_\nu(x)$ — шаровая функция, ν-го порядка относительно $Q(x)$; тогда каждый f — кратный ряд

$$\vartheta(\tau, P_\nu, Q)=\sum_{x_1, \ldots, x_f=-\infty}^{\infty} P_\nu(x_1, \ldots, x_f)\, z^{Q(x_1, \ldots, x_f)}$$

$\left(в частности, если $\nu=0$, $P_\nu\equiv 1$, $\vartheta(\tau, Q)=\sum_{m=0}^{\infty} M[m=Q]\,z^m\right)$ является модулярной формой вещественного типа $\left(-\left(\frac{f}{2}+\nu\right),\ N,\ \varepsilon(d)\right)$.

Ступень N равна ступени квадратичной формы Q, характер $\varepsilon(n)$ есть $\varepsilon(n)=\left(\frac{\Delta}{n}\right)$ для $n>0$, $\varepsilon(-n)=-(-1)^{\frac{f}{2}}\varepsilon(n)$. При этом Δ — дискриминант $Q(x)$. Более того, если $\nu>0$, то $\vartheta(\tau, P_\nu, Q)$ — параболическая форма.

Лемма 2 (см., [26], стр. 62). *Ступень и дискриминант квадратичной формы $Q(x)$ имеют одинаковые простые делители.*

Лемма 3 (см., [26], стр. 62). *Для заданной ступени N и числа переменных f (f — четное)' имеется только конечное множество дискриминантов положительно определенных целочисленных квадратичных форм $Q(x)$.*

Они являются делителями N^f.

Лемма 4 (см., [2] стр. 319). *Для того, чтобы натуральное число n представлялось некоторой бинарной квадратичной формой дискриминанта D, необходимо и достаточно, чтобы оно не содержало простых чисел p с улсовием $\chi_1(p)=-1$ в нечетной степени.* Для этого, в свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы

$$\left(\frac{a,\ D}{p}\right)=1 \text{ для всех } p\nmid D.$$

Здесь χ_1 — характер квадратического поля $R(\sqrt{d})$ дискриминанта D. Значения этого характера $\chi_1(a)$ на целых числах a взаимно простых с D определяются следующими равенствами:

$$\chi_1(a)=\begin{cases}\left(\frac{a}{|d|}\right) \text{ при } d\equiv 1 \pmod 4,\\ (-1)^{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{a}{|d|}\right) \text{ при } d\equiv 3 \pmod 4,\\ (-1)^{\frac{a^2-1}{8}+\frac{a-1}{2}\cdot\frac{d'-1}{2}}\left(\frac{a}{|d'|}\right) \text{ при } d=2d'.\end{cases} \tag{9}$$

$\left(\frac{a,\ D}{p}\right)$ — символ Гильберта.

Перейдем к выводу теорем, сформулированных выше. Рассмотрим положительные квадратичные формы $Q(x)$ типа $(-k,\ q,\ \chi)$, где q — нечетное простое число, $\chi(n)=\left(\frac{n}{q}\right)$,

k — нечетное большее или равное 3. На основании лемм 1, 2, 3 получаем, что (при нечетных k) q для квадратичных форм указанного выше типа может иметь только вид $4l+3$ и возможные значения для дискриминанта будут $-q^{2l+1}$, при этом $2l+1\leqslant 2k$. Следовательно,

$$0\leqslant l\leqslant k-1. \tag{10}$$

Пусть

$$\vartheta(\tau,\ Q)=\sum_{x_1,\ \dots,\ x_{2k}=-\infty}^{\infty} z^{Q(x_1,\ \dots,\ x_{2k})}=\sum_{m=0}^{\infty} M[m=Q]\,z^m$$

— тэта-ряд положительной квадратичной формы $Q(x)$ типа $(-k,\ q,\ \chi)$, тогда на основании работы Гекке [26], стр. 40, III, имеем

$$\vartheta(\tau,\ Q)=E(\tau)+Q(\tau), \tag{11}$$

где $E(\tau)$ — ряд Эйзенштейна, соответствующий тэта-ряду $\vartheta(\tau,\ Q)$, $\Theta(\tau)$ — параболическая форма типа $(-k,\ q,\ \chi)$, при этом

$$E(\tau)=1+\frac{(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}q^{k-l-1}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{d|n} d^{k-1}\chi\left(\frac{n}{d}\right)\right)z^n}{(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{q^{k-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^k}(k-1)!\,L(k,\ \chi)}+$$

$$+\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{d|n} d^{k-1}\chi(d)\right)z^n}{(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{q^{k-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^k}(k-1)!\,L(k,\ \chi)}. \tag{12}$$

В силу (11), (12) получаем для n натуральных

$$M[n=Q]=\rho(n)+\psi(n), \tag{13}$$

где

$$\rho(n)=\frac{(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]} q^{k-l-1}\sum\limits_{d|n} d^{k-1}\chi\left(\frac{n}{d}\right)+\sum\limits_{d|n} d^{k-1}\chi(d)}{(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{q^{k-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^k}(k-1)!\,L(k,\chi)}, \qquad (14)$$

$\psi(n)$ — n-ый коэффициент Фурье параболической формы $\Theta(\tau)$. Далее, в случае $(n, q)=1$

$$\rho(n)=\frac{(2\pi)^k\{q^{k-l-1}\chi(n)+(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}\}\sum\limits_{d|n} d^{k-1}\chi(d)}{q^{k-\frac{1}{2}}(k-1)!\,L(k,\chi)}, \qquad (15)$$

Пусть всюду в дальнейшем t — наименьший квадратичный невычет по модулю q (q — неч. простое), t_1 — соседний с t квадратичный невычет по модулю q среди чисел $1, 2, \ldots, q-1$. Будем считать, что справедлива гипотеза. И. М. Виноградова о наименьшем квадратичном невычете по простому модулю q. По этой гипотезе

$$t=O(q^{\varepsilon}). \qquad (16)$$

Далее на основании известных результатов [22] имеем

$$\frac{1}{L(k,\chi)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)\,\chi(n)}{n^k}.$$

Отсюда при $k\geqslant 3$

$$\frac{1}{|L(k,\chi)|}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}<\frac{\pi^2}{6},$$

следовательно

$$|L(k,\chi)|>\frac{6}{\pi^2}, \quad \text{при} \quad k\geqslant 3. \qquad (17)$$

На основании (15), (16), (17) выводим, что

$$|\rho(t)|<1, \qquad (18)$$

начиная с достаточно больших q.

Покажем теперь, что при $l<k-1$

$$|\rho(t)|>0.$$

Пусть $n=p_1^{\alpha_1}\ldots p_r^{\alpha_r}$ — канонические разл. числа n. Тогда в силу того, что числовая функция $\chi(n)$ вполне мультипликативна имеем

$$\sum_{d|n} d^{k-1}\chi(d)=\prod_{i=1}^{r}\{1+\chi(p_i)p_i^{k-1}+\ldots+\chi^{\alpha_i}(p_i)p_i^{\alpha_i(k-1)}\}=$$

$$=\prod_{i=1}^{r}\frac{\{\chi(p_i)p_i^{k-1}\}^{\alpha_i+1}-1}{\chi(p_i)p_i^{k-1}-1}, \qquad (19)$$

Из (15), (19) следует, что

$$|\rho(t)|>0 \text{ при } l<k-1. \tag{20}$$

Итак,

$$0<|\rho(t)|<1 \text{ при } l<k-1, \tag{21}$$

начиная с достаточно больших q.

Рассмотрим случай $l=k-1$. Из (15), (18), (19) следует, что

$$0<|\rho(t)|<1 \tag{22}$$

начиная с достаточно больших q, при $l=k-1$ и $(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}=-1$.

В силу (15), (16), (17), (19) и учитывая, что $d(q)<2\sqrt{q}$ (см., например, [6] стр, 217) имеем

$$0<|\rho(tt_1)|<1 \tag{23}$$

начиная с достаточно больших q при $l=k-1$ и $(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}=1$. Далее, очевидно, что $M[n=Q]$ — число целое, поэтому в силу (21), (22), (23) начиная с достаточно больших q

$$\psi(t)\neq 0 \text{ при } l<k-1, \tag{24}$$

$$\psi(t)\neq 0 \text{ при } l=k-1 \text{ и } (-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}=-1, \tag{25}$$

$$\psi(tt_1)\neq 0 \text{ при } l=k-1 \text{ и } (-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}=1. \tag{26}$$

Принимая во внимание лемму (1) и принятые там обозначения рассмотрим параболические формы

$$\sum_{x_1,\, x_2=-\infty}^{\infty} P_\nu(x_1, x_2)\, z^{Q(x_1, x_2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{n=Q(x_1, x_2)} P_\nu(x_1, x_2)\right\} z^n \tag{27}$$

типа $(-k, q, \chi)$ (k — нечет. $\geqslant 3$). В силу лемм (1), (2), (3) выводим, что бинарные обобщенные тэта-ряды (27) будут модулярными формами типа $(-k, q, \chi)$ (k — неч. $\geqslant 3$) только в случае, когда дискриминант $Q(x_1, x_2)$ равен $-q$, при этом ν должно равняться $k-1$.

На основании леммы (4) имеем, что t, tt_1 не представимы ни одной бинарной квадратичной формой дискриминанта $-q$. Следовательно,

$$\sum_{t=Q(x_1, x_2)} P_\nu(x_1, x_2)=0, \qquad \sum_{tt_1=Q(x_1, x_2)} P_\nu(x_1, x_2)=0, \quad (\nu=k-1)$$

для всех квадратичных форм $Q(x_1, x_2)$ дискриминанта $-q$.

На основании этого, а также (11), (12), (13), (24—26) и определения 1 следует теорема III.

Аналогично тому, как была выведена теорема III, пользуясь результатом

$$t=0\left(q^{\frac{1}{2\sqrt{e}}}\cdot \ln^2 q\right)$$

И. М. Виноградова [5] (вместо гипотезы И. М. Виноградова (16)), получаем теорему I.

Далее точно также, применяя известный результат $t=B_\varepsilon t^{\frac{1}{4\sqrt{e}}+\varepsilon}$ Берджеса [23], выводим теорему II.

Весьма вероятным нам кажется следующее предположение: пусть f — четное натуральное число $\geqslant 4$,

$$Q(x)=Q(x_1, \ldots, x_f)=\sum_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant f} b_{rs} x_r x_s - \tag{28}$$

положительная квадратичная форма с f переменными, коэффициенты которой b_{rs} — целые рациональные числа, тогда число лиувиллевских приведенных примитивных квадратичных форм (28) конечно.

В работах автора [15] дан алгоритм для получения точных формул типа Лиувилля для положительных квадратичных форм с шестью переменными, при этом метод дает возможность попутно отсеивать квадратичные формы, не являющиеся лиувиллевскими в узком смысле.

Заметим также, что в редких случаях, когда размерность пространства параболических форм типа $\left(-3,\ q,\ \chi(n)\right)$ совпадает с числом линейно независимых параболических форм

$$\sum_{x_1,\ x_2} P_\nu(x_1,\ x_2)\, z^{Q(x_1,\ x_2)} \quad \text{типа} \quad \left(-3,\ q,\ \chi(n)\right),$$

здесь целесообразно применять метод, который мы продемонстрируем на квадратичных формах типа $\left(-3,\ 23,\ \chi(n)\right)$ $\left(\chi(n)=\left(\frac{n}{q}\right)\right)$. Метод этот базируется в основном на результатах Гекке [26], Шенеберга [32] и лемме 6 автора.

Доказательство леммы 6 основано на следующей лемме 5 (см. Гекке [26]).

Лемма 5. *Пусть*

$$Q(x)=Q(x_1, \ldots, x_f)=\sum_{1\leqslant r,\ s\leqslant f} b_{rs} x_r x_s = b_{11} x_1^2 + b_{12} x_1 x_2 + \ldots$$

является положительно определенной квадратичной формой, коэффициенты которой b_{rs} — целые рациональные числа, тогда квадратические полиномы относительно x

$$\varphi_{rs}=x_r x_s-\frac{1}{f}\,\frac{A_{rs}}{D}\cdot 2Q(x)=x_r x_s-\frac{1}{f\cdot N}\,\frac{A_{rs}}{\delta}\cdot 2Q(x), \quad (r,\ s=1,\ \ldots,\ f)$$

удовлетворяют линейному соотношению

$$\sum_{r,\ s=1}^{f} a_{rs}\varphi_{rs}=0$$

и представляют точно $\frac{f(f+1)}{2}-1$ линейно независимых полиномов. Они образуют базис множества шаровых функций 2-го порядка относительно $Q(x)$, где D — детерминант целочисленной симметрической матрицы $U=(a_{rs})$, соответствующей форме $2Q$;

$$\frac{1}{D}(A_{rs})=U^{-1};$$

δ — наибольший общий делитель чисел

$$\frac{A_{11}}{2}, \ \ldots, \ \frac{A_{rr}}{2}, \ \ldots, \ A_{rs}, \ \ldots,$$

$N=\frac{D}{\delta}$ *— ступень квадратичной формы $Q(x)$.*

Лемма 6. *Пусть*

$$Q(x)=\sum_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant f} b_{rs}x_r x_s \text{ и } R(x)=\sum_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant f} b'_{rs}x_r x_s$$

положительные квадратичные формы с четным числом f переменных, коэффициенты которых — целые рациональные числа, и квадратичная форма $Q(x)$ эквивалентна или собственно эквивалентна квадратичной форме $R(x)$. Далее пусть согласно лемме 1 линейно-независимые квадратические полиномы относительно x $W_1(x), W_2(x), \ldots, W_{\frac{f(f+1)}{2}-1}(x)$ образуют базис множества шаровых функций второго порядка относительно $Q(x)$, а линейно-независимые квадратические полиномы относительно x $V_1(x)$, $V_2(x), \ldots, V_{\frac{f(f+1)}{2}-1}(x)$ образуют базис множества шаровых функций второго порядка относительно $R(x)$, тогда каждый ряд

$$\sum_{x_1, \ldots, x_f=-\infty}^{\infty} V_k(x_1, \ \ldots, \ x_f)\, z^{R(x_1, \ldots, x_f)}, \ \left(k=1, \ \ldots, \ \frac{f(f+1)}{2}-1\right)$$

является линейной комбинацией рядов

$$\sum_{x_1, \ldots, x_f=-\infty}^{\infty} W_t(x_1, \ \ldots, \ x_f)\, z^{Q(x_1, \ldots, x_f)}$$

$$\left(t=1, \ 2, \ \ldots, \ \frac{f(f+1)}{2}-1\right),$$

а также всякий ряд

$$\sum_{x_1, \ldots, x_f=-\infty}^{\infty} W_t(x_1, \ \ldots, \ x_f)\, z^{Q(x_1, \ldots, x_f)}, \quad \left(t=1, \ 2, \ \ldots, \ \frac{f(f+1)}{2}-1\right)$$

есть линейная комбинация рядов

$$\sum_{x_1, \ldots, x_f=-\infty}^{\infty} V_k(x_1, \ \ldots, \ x_f)\, z^{R(x_1, \ldots, x_f)},$$

$$\left(k=1, \ 2, \ \ldots, \ \frac{f(f+1)}{2}-1\right),$$

Доказательство. Итак, пусть формы $Q(x)$ и $R(x)$ удовлетворяют условиям леммы. Положим

$$\varphi_{lk}=x_l x_k-\frac{A_{lk}}{f\cdot D}\cdot 2Q(x), \text{ где} \tag{29}$$

D — детерминант целочисленной симметрической матрицы A квадратичной формы $2Q(x)$;

$$\frac{1}{D}(A_{ik}) = A^{-1}.$$

Далее пусть

$$\varphi'_{ik} = x'_i x'_k - \frac{B_{ik}}{f \cdot D_1} \cdot 2R(x), \text{ где} \tag{30}$$

D_1 — детерминант целочисленной симметрической матрицы B квадратичной формы $2R(x)$;

$$\frac{1}{D_1}(B_{ik})B^{-1}.$$

В силу того, что $Q(x)$ эквивалентна (или собственно эквивалентна) форме $R(x)$ следует, во-первых, что дискриминанты этих форм $\Delta = (-1)^{\frac{f}{2}} D$ и $\Delta_1 = (-1)^{\frac{f}{2}} D_1$ равны, поэтому

$$D = D_1, \tag{31}$$

а также, во-вторых, существует линейное преобразование (с матрицей преобразования S)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1f} \\ s_{f1} & \cdots & s_{ff} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_j \end{pmatrix},$$

переводящее форму $Q(x)$ в форму $R(x')$, причем матрица $S = (s_{ik})$ — целочисленная, определитель которой равен ± 1 (1). Далее пусть

$$S^{-1} = \frac{1}{\det S} \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{f1} \\ t_{1f} & \cdots & t_{ff} \end{pmatrix}.$$

Линейное преобразование с матрицей S^{-1} переводит φ'_{ik} в

$$\varphi''_{ik} = \frac{1}{(\det S)^2 f} \left(\sum_{r=1}^{f} t_{ri} x_r \right) \left(\sum_{p=1}^{f} t_{pk} x_p \right) - \frac{B_{ik}}{f \cdot D_1} \cdot 2Q(x). \tag{32}$$

С помощью теории матриц можно доказать следующее тождество:

$$\frac{1}{(\det S)^2 f} \left(\sum_{r=1}^{f} t_{ri} x_r \right) \left(\sum_{p=1}^{f} t_{pk} x_p \right) - \frac{B_{ik}}{f \cdot D} \cdot 2Q(x) =$$

$$= \frac{1}{(\det S)^2 f} \sum_{r=1}^{f} \sum_{p=1}^{f} t_{ri} t_{pk} \left\{ x_r x_p - \frac{A_{rp}}{f \cdot D} 2Q(x) \right\}. \tag{33}$$

В силу (29), (30), (31), (32), (33) и леммы 5 следует лемма 6. Кроме этого, нам понадобится еще следующая лемма.

Лемма 7 (см. Гекке [26]). *Если у модулярной формы вещественного типа $(-k, N, \chi)$ в ее степенном ряду первые коэффициенты равны нулю для всех*

$$n \leqslant k \cdot \frac{N}{12} \cdot \prod_{p \mid N} \left(1 + \frac{1}{p} \right) + 2,$$

то эта модулярная форма есть тождественный нуль.

С помощью лемм 1, 2, 3, 5, 6, находим все возможные бинарные обобщенные ряды типа $\left(-3, 23, \chi(n)\right)$ и $\left(\chi(n)=\left(\frac{n}{23}\right)\right)$ и пользуясь леммой 7 убеждаемся, что из них 3 параболические формы будут линейно независимы, например, формы

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{n=x_1^2+x_1x_2+6x_2^2} 11x_1^2-12x_1x_2-72x_2^2\right\}z^n=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_1(n)z^n, \tag{34}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{n=x_1^2+x_1x_2+6x_2^2} -2x_1^2-2x_1x_2+11x_2^2\right\}z^n=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_2(n)z^n, \tag{35}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{n=2x_1^2+x_1x_2+3x_2^2} -8x_1^2-4x_1x_2+11x_2^2\right\}z^n=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_3(n)z^n. \tag{36}$$

Далее, на основании формул из работы Гекке [26], имеем, что размерность пространства параболических форм типа $(-3, 23, \chi)$ $\left(\chi(n)=\left(\frac{n}{23}\right)\right)$ равна 3. Следовательно, бинарные тэта-ряды (34), (35), (36) образуют базис пространства параболических форм типа $(-3, 23, \chi)$ $\left(\chi(n)=\left(\frac{n}{23}\right)\right)$. На основании этого и (11), (12), (13), имеем для любой квадратичной формы $Q(x)$ типа $(-3, 23, \chi)$ $\left(\chi(n)=\left(\frac{n}{23}\right)\right)$ и дискриминанта q^{2l+1} $(0\leqslant l\leqslant 2)$

$$M[n=Q(x)]=\rho(n)+c_1\psi_1(n)+c_2\psi_2(n)+c_3\psi_3(n), \tag{37}$$

где

$$\rho(n)=\frac{23^{3-l-1}\sum\limits_{d|n} d^2\chi\left(\frac{n}{d}\right)-\sum\limits_{d|n} d^2\chi(d)}{24}, \tag{38}$$

$$\psi_1(n)=\sum_{n=x_1^2+x_1x_2+6x_2^2} 11x_1^2-12x_1x_2-72x_2^2, \tag{39}$$

$$\psi_2(n)=\sum_{n=x_1^2+x_1x_2+6x_2^2} -2x_1^2-2x_1x_2+11x_2^2, \tag{40}$$

$$\psi_3(n)=\sum_{n=2x_1^2+x_1x_2+3x_2^2} -8x_1^2-4x_1x_2+11x_2^2, \tag{41}$$

c_1, c_2, c_3 — некоторые постоянные величины. Придавая теперь в (37) n частные значения, мы для каждой конкретной квадратичной формы $Q(x)$, указанного выше типа, можем определить соответствующие постоянные c_1, c_2, c_3. Так, проделывая несложные вычисления, мы, например, для квадратичных форм

$$Q_1(x)=x_1^2+x_1x_2+6x_2^2+x_3^2+x_3x_4+6x_4^2+x_5^2+x_5x_6+6x_6^2,$$

$$Q_2(x)=x_1^2+x_1x_2+6x_2^2+x_3^2+x_3x_4+6x_4^2+2x_5^2+x_5x_6+3x_6^2,$$

$$Q_3(x)=x_1^2+x_1x_2+6x_2^2+2x_3^2+x_3x_4+3x_4^2+2x_5^2+x_5x_6+3x_6^2,$$

$$Q_4(x)=2x_1^2+x_1x_2+3x_2^2+2x_3^2+x_3x_4+3x_4^2+2x_5^2+x_5x_6+3x_6^2,$$

типа $\left(-3,\ 23,\ \chi(n)\right)\left(\chi(n)=\left(\frac{n}{23}\right)\right)$ и дискриминанта 23^3 получаем следующие формулы для числа представлений

$$M[n=Q_1(x)]=\rho(n)+\frac{61}{264}\psi_1(n)-\frac{867}{552}\psi_2(n)-\frac{181}{69}\psi_3(n), \tag{42}$$

$$M[n=Q_2(x)]=\rho(n)+\frac{37}{264}\psi_1(n)-\frac{89}{184}\psi_2(n)-\frac{52}{69}\psi_3(n), \tag{43}$$

$$M[n=Q_3(x)]=\rho(n)+\frac{13}{264}\psi_1(n)-\frac{65}{184}\psi_2(n)-\frac{31}{69}\psi_3(n), \tag{44}$$

$$M[n=Q_4(x)]=\rho(n)-\frac{1}{24}\psi_1(n)+\frac{39}{184}\psi_2(n)+\frac{14}{69}\psi_3(n). \tag{45}$$

В формулах (42—45)

$$\rho(n)=\frac{23\sum\limits_{d/n} d^3\chi\left(\frac{n}{d}\right)-\sum\limits_{d\backslash n} d^3\chi(d)}{24}, \quad \chi(n)=\left(\frac{n}{23}\right),$$

а $\psi_1(n)$, $\psi_2(n)$, $\psi_3(n)$ определены соответственно по формулам (39), (40), (41).

Ташкент

Поступило в редакцию
3.VII.1968

Литература

1. А. Н. Андрианов, Представление чисел некоторыми квадратичными формами в связи с теорией эллиптических кривых, ИАН СССР, сер. математическая, т. 29, вып. I (1965), 227—238.
2. З. И. Боревич, и И. Р. Шафаревич, Теория чисел, М. (1964).
3. Б. А. Венков, Элементарная теория чисел, М.-Л. (1937).
4. Т. В. Вепхвадзе, О некоторых формулах Лиувилля, Сообщения АН Груз. ССР, 40 : 2, Тбилиси (1965), 279—286.
5. И. М. Виноградов, Избранные труды, Изд. АН СССР, М. (1952).
6. А. О. Гельфонд, Ю. В. Линник, Элементарные методы в аналитической теории чисел., М. (1962).
7. Л. А. Коган, О числе представлений целого числа квадратичными формами $x^2+y^2+z^2+pt^2$, $x^2+p(y^2+z^2+t^2)$, ИАН УзССР, серия физ.-мат. наук (1960), 24—33.
8. Л. А. Коган, О некоторых квадратичных формах, ДАН УзССР (1961), № 5, 10—13.
9. Л. А. Коган, О представлении чисел некоторыми квадратичными формами с 6-ю переменными, Учен. зап. Ташкент, госпединститута им. Низами, т. 38, вып. 2, Ташкент (1963), 3—22.
10. Л. А. Коган, Точные формулы для представлений чисел некоторыми квадратичными формами, ИАН УзССР, серия физ.-мат. наук (1964), № 5, 12—17.
11. Л. А. Коган, О представлении чисел некоторыми квадратичными формами с четырьмя и тремя переменными, ДАН УзССР, № 12 (1965).
12. Л. А. Коган, О числе представлений чисел некоторыми квадратичными формами с четырьмя переменными, I, Научные труды ТашГУ, вып. 228, Математика (1963), 49—55.
13. Л. А. Коган, О числе представлений чисел некоторыми квадратичными формами с четырьмя переменными, II, Научные труды ТашГУ, вып. 25. Математика (1964).
14. Л. А. Коган, О представлении чисел некоторыми квадратичными формами с четырьмя переменными, ИАН УзССР, сер. физ.-мат. наук, № 2, 5—10.
15. Л. А. Коган, Модулярные формы и арифметика квадратичных форм, I, II, Учен. зап. ТашПИ, в печати.
16. Л. А. Коган, Т. В. Федорова, О некоторых квадратичных формах с 6-ю переменными, Математика, новая серия, вып. 29, Изд. „Наука" УзССР (1965), 23—38.

17. Ю. В. Линник, А. Реньи, О некоторых гипотезах теории характеров Дирихле, ИАН СССР, II (1947), 539—546.
18. Г. А. Ломадзе, О представлении чисел некоторыми квадратичными формами с четырьмя переменными, Труды Тбилисского госуниверситета, вып. 76. Тбилиси (1959), 107—159.
19. Я. В. Успенский, О числе представлений чисел некоторыми квадратичными формами с четырьмя и шестью переменными, Сообщ. Харьков. матем. общества, вторая серия 15 (1916), 81—147.
20. Т. В. Федорова, О некоторых квадратичных формах с шестью и восемью переменными, ДАН УзССР (1966), № 3, 3—5.
21. Т. В. Федорова, О некоторых квадратичных формах с шестью переменными, Труды ТашПИ, вып. 7, Ташкент (1966), 89—97.
22. Н. Г. Чудаков, Введение в теорию L-функций Дирихле, М.-Л. (1947).
23. D. Burgess, The distribution of quadratic residues and nonresidues, Mathematika, 4, p. 2, N 8 (1957), 106—112.
24. M. Eichler, Quadratische Formen und Modulfunktionen, Acta Arithm., 4 (1958), 217—239.
25. M. Eichler, Quaternäre quadratische Formen und die Riemannsche Vermutung für die Kongruenzzetafunktion, Arch. d. Math., 5 (1954), 355—366.
26. E. Hecke, Analytische Arithmetik der positiven quadratischen Formen, København, 1940.
27. E. Hecke, Über Dirichlet — Reihen mit Fünktionalgleichung und ihre Nulstellen auf den Mitelgeraden, Mathematische Werke, Göttingen, 1959, 708—730.
28. H. D. Kloosterman, On the representation of numbers in the form $ax^2+by^2+cz^2+dt^2$, Proceedings of the London Mathematical Society 2, 25 (1925), 143—173.
29. P. Pepin, Sur quelques formes quadratiques quaternaires Journal de Mathematiques pures et appliquées 4, 6 (1890), 5—67.
30. W. Pfetzer, Die Wirkung der Modulsubstitutionen auf mehrfache Thetareihen zu quadratischen Formen ungerader Variablenzahl., Arch. d. Math., 6, (1953), 448—453.
31. R. A. Rankin, Sums of squares and cusp forms. Amer. I. Math., 1965, 87, N 4, 857—860.
32. Schoeneberg, Das Verhalten von mehrfachen Thetareihen bei Modulsubstitutionen, Math. Annalen, 116 (1939), 511—523.
33. A. Walfisz, Zur additiven Zahlen theorie, VI, Труды Тбилисского математического института, им. А. М. Размадзе, 5 (1938), 197—254.
34. A. Walfisz, Zur additiven Zahlentheorie, VIII, Труды Тбилисского математического института им. А. М. Размадзе 8 (1940), 69—107.
35. A. Walfisz, Zur additiven Zahlentheorie, IX, Труды Тбилисского математического института им. А. М. Рамадзе, 9 (1941), 75—96.

LIUVILIO FORMULĖS IR PARABOLINĖS FORMOS, GAUTOS IŠ APIBENDRINTŲ BINARINIŲ TETA-EILUČIŲ

L. Koganas

(*Reziumė*)

Straipsnyje išvystomas metodas, pagrįstas moduliarinių formų teorija ir I. M. Vinogradovo bei D. Berdžeso mažiausios kvadratinės neliekamosios tyrimais.

Šiuo metodu galima nustatyti Liuvilio tipo formulės egzistenciją skaičių išraiškos, teigiamai apibrėžtomis kvadratinėmis formomis, skaičiui.

DIE FORMELN VON LIOUVILLE UND SPITZENFORMEN, DIE VON VERALLGEMEINERTEN BINÄREN THETAREIHEN ERZEUGT SIND

L. Kogan

(*Zusammenfassung*)

Im Aufsatz ist eine Methode entwickelt, die auf der Theorie von Modulformen und Untersuchungen von I. M. Winogradow und D. Burgess über den kleistequadratischen Nichtrest gegründet ist.

Diese Methode gestattet die Existenz der Formeln der Typen von Liouville für die Anzahl der Darstellungen von Zahlen durch positiv-definierte quadratische Formen festzustellen.

7. Leid. Nr. 10895