1969

УДК–519.21

ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ И СЕМИИНВАРИАНТОВ ДИСКРЕТНОГО ПРОЦЕССА ВОССТАНОВЛЕНИЯ

А. Алешкявичене

Пусть имеется последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимых неотрицательных одинаково распределенных случайных величин с общей функцией распределения $F_1(x)$. Чтобы исключить тривиальный случай, будем предполагать, что ξ_l не равны константе с вероятностью единица.

Обозначим

$$\mu_k = \mathbf{M}\,\xi_1^k, \qquad k=1,2,\ldots,$$

$$S_0=0, \qquad S_m=\sum_{l=1}^{m}\xi_l, \qquad m=1,2,\ldots,$$

и

$$F_m(x)=\mathbf{P}\{S_m<x\}.$$

Случайный процесс

$$N_t=\max\{m: S_m\leqslant t\}, \qquad t\in[0,\infty]$$

принято называть процессом восстановления. Если величины ξ_l интерпретировать как длительности существования последовательности заменяемых элементов, то N_t будет числом восстановлений элемента за отрезок времени $[0, t]$.

Следуя В. Л. Смиту (см. [6]) процесс восстановления будем называть дискретным, если $F_1(x)$ является решетчатым распределением. Процесс восстановления, который не является дискретным, будем называть непрерывным.

Значительная часть работ по теории восстановления посвящена нахождению асимптотических формул для моментов и семиинвариантов процесса восстановления. Почти все первые исследования из этой области (см. [1]–[4]) относятся к первому моменту $\mathbf{M}N_t$. Сформулируем типичный результат, относящийся к $\mathbf{M}N_t$. Если $\mu_2<\infty$, то при $t\to\infty$

$$\mathbf{M}\,N_t=\frac{1}{\mu_1}+\left(\frac{\mu_2}{2\mu_1^2}-1\right)+o(1). \tag{1}$$

Эта теорема для непрерывного процесса восстановления при дополнительных ограничениях впервые была доказана в 1945 г. Тэклиндом ([2]) и в окончательной форме В. Смитом в 1954 г. ([4], [5]), а для дискретного случая – В. Феллером ([1], 1949.)

Для дискретного процесса восстановления В. Феллер ([1], 1949) и для непрерывного процесса В. Смит ([4], 1954) получили следующий результат, касающийся дисперсии: если $\mu_2<\infty$, то при $t\to\infty$

$$\mathbf{D}\, N_t=\frac{\mu_2-\mu_1^2}{\mu_1^3}\, t+o(t). \tag{2}$$

В 1959 году В. Смит в предположении, что при некотором целом $m>0$ $F_m(x)$ имеет абсолютно непрерывную компоненту, получил в окончательной форме асимптотические формулы для старших моментов и семиинвариантов процесса N_t (см. [6]). Сформулируем основной полученный В. Смитом результат. Если при некотором целом $m>0$ $F_m(x)$ имеет абсолютно непрерывную компоненту и $\mu_{m+p+1}<\infty$, $p\geqslant 0$, то существуют постоянные $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{m+1}$, a_m и b_m такие, что m-ый момент и m-ый семиинвариант процесса N_t равны, соответственно,

$$\gamma_1 t^m+\gamma_2 t^{m-1}+\ldots+\gamma_{m+1}+\frac{\lambda(t)}{(1+t)^p} \tag{3}$$

и

$$a_m t+b_m+\frac{\lambda(t)}{(1+t)^p}, \tag{4}$$

где $\lambda(t)$ – функция ограниченной вариации, $\lambda(t)\to 0$ при $t\to\infty$, для любого фиксированного $\alpha>0$

$$\lambda(t)-\lambda(t-\alpha)=o(t^{-1})$$

при $t\to\infty$ и, кроме того, для $p\geqslant 1$ $\frac{\lambda(t)}{1+t}$ принадлежит классу L_1.

В случае, когда $F_1(x)$ можно представить степенным рядом, М. Лидбеттер в 1963 г. получил разложение для моментов факториального типа $\Phi_m(t)=\mathbf{M}(N_t+1)\ldots(N_t+m)$. Коэффициенты этого разложения линейным образом выражаются через коэффициенты разложения $F_1(x)$.

Для дискретного процесса восстановления в 1966 г. В. Лютикас получил асимптотические формулы моментов и семиинвариантов, аналогичные формулам (3) и (4), только с худшими остаточными членами $O\left(\frac{\ln t}{(1+t)^p}\right)$.

В настоящей заметке будем изучать дискретный процесс восстановления N_t, $t=0, 1, 2, \ldots$, и в остаточных членах асимптотических формул моментов и семиинвариантов этого процесса, полученных В. Лютикасом, заменим $\ln t$ функцией $\lambda(t)$, определенной в формулах (3) и (4).

Итак, пусть случайные величины ξ_l, $l=1, 2, \ldots$, решетчаты с максимальным шагом распределения, равным 1, т.е. пусть величины ξ_l, $l=1, 2, \ldots$, принимают только целочисленные значения k с вероятностями

$$p_k=\mathbf{P}\{\xi_l=k\},\quad k=0, 1, 2, \ldots;\ l=1, 2, \ldots$$

Далее будем говорить, что функция $\lambda(t)$ принадлежит классу B, если $\lambda(t)$ является функцией ограниченной вариации, $\lambda(t)\to 0$ при $t\to\infty$ и для любого фиксированного $\alpha>0$

$$\lambda(t)-\lambda(t-\alpha)=o(t^{-1})$$

при $t\to\infty$.

Будем говорить, что функция $\lambda(t)$ принадлежит классу R тогда, когда $\lambda(t)\in B$ и, кроме того, $\frac{\lambda(t)}{1+t}$ принадлежит классу L_1.

Буквами γ_k, $k=1, 2, \ldots, m+1$ в дальнейшем будем обозначать конечные рациональные функции от $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$.

Сформулируем основные результаты, полученные в настоящей заметке.

Теорема 1. *Если* $\mu_{m+p+1}<\infty$, $m>0$ и $p\geqslant 0$, *то при* $t\to\infty$

$$\mathbf{M}\, N_t^m=\gamma_1 t^m+\gamma_2 t^{m-1}+\ldots+\gamma_m t+\gamma_{m+1}+\frac{\lambda(t)}{(1+t)^p}, \tag{5}$$

где $\lambda(t)\in R$.

Теорема 2. *Если* $\mu_q<\infty$, $0<q\leqslant m$, *то при* $t\to\infty$

$$\mathbf{M}\, N_t^m=\gamma_1 t^m+\gamma_2 t^{m-1}+\ldots+\gamma_{q+1} t^{m-q+1}+(1+t)^{m-q+1}\lambda(t),$$

где $\lambda(t)\in B$.

В дальнейшем семиинвариант m-го порядка величины N_t будем обозначать $\Gamma_m(t)$.

Теорема 3. *Если* $\mu_{m+p+1}<\infty$, $p>0$, *то при* $t\to\infty$

$$\Gamma_m(t)=\gamma_m t+\gamma_{m+1}+\frac{\lambda(t)}{(1+t)^p},$$

где $\lambda(t)\in R$.

Следствие 1. *Если* $\mu_{m+1}<\infty$, *то при* $t\to\infty$

$$\Gamma_m(t)=\gamma_m t+\gamma_{m+1}+\lambda(t), \tag{6}$$

где $\lambda(t)\in R$, *а если только* $\mu_m<\infty$, то

$$\Gamma_m(t)=\gamma_m t+(1+t)\lambda(t), \tag{7}$$

где $\lambda(t)\in B$ и $t\to\infty$.

Докажем теорему 1. Обозначим

$$P(s)=\sum_{k\geqslant 1} p_k S^k,\quad Q(s)=\sum_{k\geqslant 0} q_k s^k,\quad q_k=\sum_{j\geqslant k+1} p_j,\quad R_1(s)=\sum_{k\geqslant 0} r_{1k} s^k,$$

$$r_{ik}=\sum_{j\geqslant k+1} q_j,\ldots,\quad R_m(s)=\sum_{k\geqslant 0} r_{mk} s^k,\quad r_{mk}=\sum_{j\geqslant k+1} r_{m-1,j}.$$

Нетрудно проверить, что

$$Q(s)=(1-s)(1-P(s));\quad R_1(s)=(1-s)(\mu_1-Q(s)),\quad R_2(s)=$$
$$=(1-s)(R_1(1)-R_1(s)),\ldots,$$
$$R_m(s)=(1-s)(R_{m-1}(1)-R_{m-1}(s)). \tag{8}$$

Для нахождения моментов процесса N_t мы воспользуемся производящими функциями моментов этого процесса. Известно, что производящую функцию моментов m-го порядка процесса восстановления N_t можно представить в следующем виде (см. [8]):

$$G_m(s)=\sum_{t=1}^{\infty}\mathbf{M}\, N_t^m s^t=\frac{\sum_{n=0}^{m-1} a_n^{(m)} P^{(m-n)}(s)}{(1-s)\,[1-P(s)]^m}, \tag{9}$$

где $a_n^{(m)}$ — постоянные, вычисляемые при помощи рекуррентного соотношения $a_n^{(m)}=(n+1)\,a_n^{(m-1)}+(m-n)\,a_{n-1}^{(m-1)}$, $a_1^{(2)}=1$ и $a_n^{(m)}=0$ для всех $n\geqslant m$. (Заметим, что $G_m(s)$ мы можем получить и путем m -кратного дифференцирования по z в точке $z=0$ производящей функции $\frac{1-P(s)}{(1-s)[1-e^{iz}P(s)]}$ для величины $Me^{iz}N_t$.) Следовательно, чтоб найти $\mathbf{M}N_t^m$ нужно найти коэффициент при s^t в разложении правой части выражения (9) по степеням s. Для этой цели, используя соотношения (8), преобразуем выражение $G_m(s)$ следующим образом:

$$G_m(s)=\frac{\sum\limits_{n=0}^{m-1}a_n^{(m)}P^{m-n}(s)}{(1-s)^{m+1}Q^m(s)}=\frac{\sum\limits_{n=0}^{m-1}a_n^{(m)}}{\mu_1^m(1-s)^{m+1}}+$$

$$+\frac{\sum\limits_{n=0}^{m-1}a_n^{(m)}\mu_1^mP^{m-n}(s)-Q^m(s)\sum\limits_{n=0}^{m-1}a_n^{(m)}}{\mu_1^mQ^m(s)\;(1-s)^{m+1}}=$$

$$=\frac{\sum\limits_{n=0}^{m-1}a_n^{(m)}}{\mu_1^m(1-s)^{m+1}}+\frac{\mu_1^m\sum\limits_{n=0}^{m-1}a_n^{(m)}[P^{m-n}(s)-1]+[\mu_1^m-Q^m(s)]\sum\limits_{n=0}^{m-1}a_n^{(m)}}{\mu_1^mQ^m(s)\;(1-s)^{m+1}}=$$

$$=\frac{\sum\limits_{n=0}^{m-1}a_n^{(m)}}{\mu_1^m(1-s)^{m+1}}+\frac{R_1(s)\sum\limits_{i=0}^{m-1}\mu_1^iQ^{m-i-1}(s)\sum\limits_{n=0}^{m-1}a_n^{(m)}-\mu_1^mQ(s)\sum\limits_{n=0}^{m-1}a_n^{(m)}\left(\sum\limits_{i=0}^{m-n-1}P^i(s)\right)}{\mu_1^mQ^m(s)\;(1-s)^m}=$$

$$=\frac{\sum\limits_{n=0}^{m-1}a_n^{(m)}}{\mu_1^m(1-s)^{m+1}}+\frac{mR_1(1)\sum\limits_{n=0}^{m-1}a_n^{(m)}-\mu_1^2\sum\limits_{n=0}^{m-1}a_n^{(m)}(m-n)}{\mu_1^{m+1}(1-s)^m}+$$

$$+\frac{R_1(s)\sum\limits_{i=0}^{m-1}[\mu_1^{i+1}Q^{m-i-1}(s)-Q^m(s)]\sum\limits_{n=0}^{m-1}a_n^{(m)}+mQ^m(s)[R_1(s)-R_1(1)]\sum\limits_{n=0}^{m-1}a_n^{(m)}}{\mu_1^{m+1}Q^m(s)\;(1-s)^m}+$$

$$+\frac{\mu_1^{m+1}Q(s)\sum\limits_{n=0}^{m-1}a_n^{(m)}\left(\sum\limits_{i=1}^{m-n-1}[1-P^i(s)]\right)+\mu_1^{m+1}[\mu_1-Q(s)]\sum\limits_{n=0}^{m-1}a_n^{(m)}(m-n)-\mu_1^2[\mu_1^m-Q^m(s)]\sum\limits_{n=0}^{m-1}a_n^{(m)}(m-n)}{\mu_1^{m+1}Q^m(s)\;(1-s)^m}=$$

$$=\frac{\sum\limits_{n=0}^{m-1}a_n^{(m)}}{\mu_1^m(1-s)^{m+1}}+\frac{mR_1(1)\sum\limits_{n=0}^{m-1}a_n^{(m)}-\mu_1^2\sum\limits_{n=0}^{m-1}a_n^{(m)}(m-n)}{\mu_1^{m+1}(1-s)^m}-\frac{mR_2(s)\sum\limits_{n=0}^{m-1}a_n^{(m)}}{\mu_1^{m+1}\;(1-s)^{m-1}}+$$

$$+\frac{1}{\mu_1^{m+1}Q^m(s)\,(1-s)^{m-1}}\left\{R_1^2(s)\sum\limits_{i=0}^{m-1}\left[\sum\limits_{j=0}^{i}\mu_1^jQ^{i-j}(s)\right]Q^{m-i-1}(s)\sum\limits_{n=0}^{m-1}a_n^{(m)}+\right.$$

$$+\mu_1^{m+1}Q^2(s)\sum\limits_{n=0}^{m-1}a_n^{(m)}\left[\sum\limits_{i=1}^{m-n-1}\sum\limits_{j=0}^{i-1}P^j(s)\right]+\mu_1^{m+1}R_1(s)\sum\limits_{n=0}^{m-1}a_n^{(m)}(m-n)-$$

$$-\mu_1^2 R_1(s) \sum_{i=0}^{m-1} \mu_1^i Q^{m-i-1}(s) \sum_{n=0}^{m-1} a_n^{(m)}(m-n) \Bigg\} =$$

$$= \frac{\sum_{n=0}^{m-1} a_n^{(m)}}{\mu_1^m (1-s)^{m-1}} + \frac{mR_1(1) \sum_{n=0}^{m-1} a_n^{(m)} - \mu_1^2 \sum_{n=0}^{m-1} a_n^{(m)}(m-n)}{\mu_1^{m+1}(1-s)^m} +$$

$$+ \frac{1}{\mu_1^{m+2}(1-s)^{m-1}} \Bigg[(-1)\, m \mu_1 R_2(1) \sum_{n=0}^{m-1} a_n^{(m)} + m\, \frac{m+1}{2} R_1^2(1) \sum_{n=0}^{m-1} a_n^{(m)} +$$

$$+ \mu_1^4 \sum_{n=0}^{m-1} a_n^{(m)} \sum_{i=1}^{m-n-1} i + \mu_1^2 R_1(1) \sum_{n=0}^{m-1} a_n^{(m)}(m-n) -$$

$$- m \mu_1^2 R_1(1) \sum_{n=0}^{m-1} a_n^{(m)}(m-n) \Bigg] + W_{m4}(s), \tag{10}$$

где

$$W_{m4}(s) = \frac{m\,[R_2(1) - R_2(s)] \sum_{n=0}^{m-1} a_n^{(m)}}{\mu_1^{m+1}(1-s)^{m-1}} +$$

$$+ \frac{1}{\mu_1^{m+2} Q^m(s)\,(1-s)^{m-1}} \Bigg\{ R_1^2(s)\, \mu_1 \sum_{i=0}^{m-1} \Big[\sum_{j=0}^{i} \mu_1^j Q^{i-j}(s) \Big] Q^{m-i-1}(s) \sum_{n=0}^{m-1} a_n^{(m)} +$$

$$+ \mu_1^{m+2} Q^2(s) \sum_{n=0}^{m-1} a_n^{(m)} \Big[\sum_{i=1}^{m-n-1} \sum_{j=0}^{i-1} P^j(s) \Big] + \mu_1^{m+2} R_1(s) \sum_{n=0}^{m-1} a_n^{(m)}(m-n) -$$

$$- \mu_1^3 R_1(s) \sum_{i=0}^{m-1} \mu_1^i Q^{m-i-1}(s) \sum_{n=0}^{m-1} a_n^{(m)}(m-n) - Q^m(s) \Big[m\, \frac{1+m}{2} R_1^2(1) \sum_{n=0}^{m-1} a_n^{(m)} -$$

$$- \mu_1^4 \sum_{n=0}^{m-1} a_n^{(m)} \sum_{i=1}^{m-n-1} i - \mu_1^2 R_1(1) \sum_{n=0}^{m-1} a_n^{(m)}(m-n) -$$

$$+ m \mu_1^2 R_1(1) \sum_{n=0}^{m-1} a_n^{(m)}(m-n) \Big] \Bigg\}. \tag{11}$$

Продолжая процесс разложения, функцию $W_{m4}(s)$ можем записать следующим образом:

$$W_{m4}(s) = \frac{w_{m4}(\mu_1, \ldots, \mu_4)}{\mu_1^{m+3}(1-s)^{m-2}} + \frac{w_{m5}(\mu_1, \ldots, \mu_5)}{\mu_1^{m+4}(1-s)^{m-3}} + \ldots +$$

$$+ \frac{w_{m,m+1}(\mu_1, \ldots, \mu_{m+1})}{\mu_1^{2m}(1-s)} + W_{m,m+2}(s), \tag{12}$$

где

$$W_{m,\,m+2}(s)=\frac{(-1)^m mR_{m+1}(s)\sum\limits_{n=0}^{m-1}a_n^{(m)}}{\mu_1^{m+1}}+$$

$$+\frac{\bar{w}_{m,\,m+2}\left(P(s),\,Q(s),\,R_1(s),\,\ldots,\,R_m(s)\right)}{\mu_1^{m+1}\,Q^m(s)}, \tag{13}$$

а $w_{mi}(u_1,\ \ldots,\ u_i)$ и $\bar{w}_{mi}(u_1,\ \ldots,\ u_i)$ — многочлены, зависящие только от $u_1,\ \ldots,\ u_i$.

Теперь нетрудно найти $\mathbf{M}N_t^m$, как коэффициент при s^t в разложении правой части выражения (7) по степеням s. Итак,

$$\mathbf{M}\,N_t^m=\frac{\sum\limits_{n=0}^{m-1}a_n^{(m)}}{\mu_1^m}\cdot\frac{(t+1)(t+2)\ldots(t+m)}{m!}+$$

$$+\frac{(t+1)\ldots(t+m-1)}{(m-1)!\,\mu_1^{m+1}}\left[mR_1(1)\sum_{n=0}^{m-1}a_n^{(m)}-\mu_1^2\sum_{n=0}^{m-1}a_n^{(m)}(m-n)\right]+$$

$$+\frac{(t+1)\ldots(t+m-2)}{(m-2)!\,\mu_1^{m+2}}\left[\frac{1}{2}\,m(m+1)R_1^2(1)\sum_{n=0}^{m-1}a_n^{(m)}-m\,\mu_1R_1(1)\sum_{n=0}^{m-1}a_n^{(m)}+\right.$$

$$+\mu_1^4\sum_{n=0}^{m-1}a_n^{(m)}\sum_{i=1}^{m-n-1}i+\mu_1^2R_1(1)\sum_{n=0}^{m-1}a_n^{(m)}(m-n)-$$

$$\left.-m\,\mu_1^2R_1(1)\sum_{n=0}^{m-1}a_n^{(m)}(m-n)\right]+\frac{(t+1)\ldots(t+m-3)}{(m-3)!\,\mu_1^{m+3}}\,w_{m2}(\mu_1,\,\ldots,\,\mu_4)+\ldots+$$

$$+\frac{w_{m,\,m+1}(\mu_1,\,\ldots,\,\mu_{m+1})}{\mu^{2m}}+\Lambda_m(t;s). \tag{14}$$

Здесь

$$\Lambda_m(t;s)=\frac{(-1)^m m\sum\limits_{n=0}^{m-1}a_n^{(m)}}{\mu_1^{m+1}}\,r_{m+1,\,t}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i\,\mu_1^{m+1}}\int\limits_{|s|=r<1}\frac{\bar{w}_{m,\,m+2}\left(P(s),\,Q(s),\,R_1(s),\,\ldots,\,R_m(s)\right)}{Q^m(s)}\,\frac{ds}{s^{t+1}}. \tag{15}$$

Нам осталось оценить остаточный член

$$\Lambda_m(t;s)=\Lambda_{m1}(t;s)+\Lambda_{m2}(t;s), \tag{16}$$

где через $\Lambda_{m1}(t;s)$ и $\Lambda_{m2}(t;s)$ обозначили соответственно первый и второй слагаемые правой части равенства (15).

Имеем

$$\Lambda_{m2}(t;s)=\frac{1}{2\pi i\,\mu_1^{m+1}}\int\limits_{|s|=r<1}\frac{\bar{w}_{m,\,m+2}\left(P_t(s),\,Q_t(s),\,R_{1t}(s),\,\ldots,\,R_{mt}(s)\right)}{Q_t^m(s)\,s^{t+1}}\,ds. \tag{17}$$

Функции

$$P_t(s)=\sum_{k\leqslant t} p_k s^k, \qquad Q_t(s)=\sum_{k\leqslant t} q_k s^k, \qquad R_{it}(s)=\sum_{k\leqslant t} r_{ik} s^k, \quad i=1,\ldots, m,$$

представляют собой соответственно конечные суммы разложений в степенные ряды функций $P(s)$, $Q(s)$, $R_1(s)$, …, $R_m(s)$. И так как существуют такие t_0 и c_0, для которых

$$\inf_{|s|\leqslant 1} |Q_t(s)|\geqslant c_0 \qquad \text{при } t>t_0 \tag{18}$$

(см. [10]), то в интеграле (17) контур $|s|=r<1$ можем заменить на $|s|=1$. Далее в интеграле (17) проводим $p+1$ —кратное интегрирование по частям

$$\Lambda_{m2}(t;s)=\frac{1}{2\pi i\,\mu_1^{m+1}}\,\frac{(t-p-1)!}{t!}\int\limits_{|s|=1}\frac{d^{p+1}}{ds^{p+1}}\times$$

$$\times\left[\frac{\ddot{w}_{m,\,m+2}\left(P_t(s), Q_t(s), R_{1t}(s), \ldots, R_{mt}(s)\right)}{Q_t^m(s)}\right]\frac{ds}{s^{t-p}}\,. \tag{19}$$

Нетрудно заметить, что сходимость ряда $\sum\limits_{k\geqslant 1} k^{m+p+1}p_k$, эквивалентная сходимости рядов

$$\sum_{k\geqslant 1} k^{m+p} q_k,\ \sum_{k\geqslant 1} k^{m+p-1} r_{1k},\ldots,\ \sum_{k\geqslant 1} k^p r_{mk},$$

обеспечивает равномерную ограниченность производных функций $P_t(s)$, $Q_t(s)$, R_{1t}, (s), …, $R_{mt}(s)$:

$$\begin{aligned}
&|P_t^{(\nu)}(s)|\leqslant C_1, && \nu=0,1,\ldots,m+p+1,\\
&|Q_t^{(\nu)}(s)|\leqslant C_2, && \nu=0,1,\ldots,m+p,\\
&|R_{1t}^{(\nu)}(s)|\leqslant C_3, && \nu=0,1,\ldots,m+p-1,\ldots,\\
&|R_{mt}^{(\nu)}(s)|\leqslant C_{m+2}, && \nu=0,1,\ldots,p.
\end{aligned}\tag{20}$$

Здесь и в дальнейшем буквы C_k и c_k, $k=1,2,\ldots$ будут обозначать постоянные, независящие от t и s. Далее, чтоб оценить подынтегральную функцию в (19), осталось оценить величину $|R_{mt}^{(p+1)}(e^{i\varphi})|$. Используя преобразование Абеля и соотношения (8) (см. еще [10], неравенство (11)), получаем

$$|R_{mt}^{p+1)}(e^{i\varphi})|\leqslant C_{m+3}\,\frac{\psi_t(t\,|\,\varphi\,|)}{|\,\varphi\,|+\frac{1}{t}}+C_{m+4}, \tag{21}$$

где

$$\psi_t(x)=\frac{1}{t}\,(1+x)\sum_{(1+x)\,k\leqslant t} k^{p+2}r_{m-1,k}+\sum_{(1+x)\,k>t} k^{p+1}r_{m-1,k}.$$

Используя оценки (20) и (21), находим оценку для подынтегральной функции в формуле (19):

$$\left|\frac{d^{p+1}}{ds^{p+1}}\left[\frac{\ddot{w}_{m,\,m+2}\left(P_t(s), Q_t(s), R_{1t}(s), \ldots, R_{mt}(s)\right)}{Q_t^m(s)}\right]\right|\leqslant$$

$$\leqslant C_{m+5}\frac{\psi_t(t\,|\,\varphi\,|)}{|\,\varphi\,|+\frac{1}{t}}+C_{m+6},$$

откуда для $\Lambda_{m2}(t; s)$ получаем

$$|\Lambda_{m2}(t;s)| \leqslant \frac{C_{m+7}}{(1+t)^{p+1}} \int\limits_0^{\pi t} \frac{\psi_t(x)}{1+x}\, dx + \frac{C_{m+8}}{(1+t)^{p+1}}\,.$$

Так как $\sup\limits_{x \leqslant \pi t} \psi_t(x) = 0(1)$, то

$$|\Lambda_{m2}(t;s)| = 0\left(\frac{\ln t}{(1+t)^{p+1}}\right). \tag{22}$$

Далее, из сходимости ряда $\sum\limits_{k \geqslant 1} k^{m+p+1} p_k$ и соотношений (8) следует, что

$$|\Lambda_{m1}(t;s)| = 0\left(\frac{1}{(1+t)^p\, \varphi(t)}\right), \tag{23}$$

где $\varphi(t)$ определена так, чтоб сходился ряд

$$\sum_{t \geqslant 1} \frac{1}{t\,\varphi(t)} < \infty\,. \tag{24}$$

Нетрудно проверить, что функция

$$\lambda(t) = \frac{1}{\varphi(t)} \tag{25}$$

удовлетворяет всем указанным в теореме условиям.

Из соотношений (14), (16), (22), (23) и (25) следует утверждение теоремы 1.

Теорема 2 доказывается аналогично. Только в соотношении (7) для функции $G_m(s)$ используем следующее разложение:

$$G_m(s) = \frac{\sum\limits_{n=0}^{m-1} a_n^{(m)}}{\mu_1^m (1-s)^{m+1}} + \frac{w_{m2}(\mu_1, \mu_2)}{\mu_1^{m+1}(1-s)^m} + \ldots + \frac{w_{mq}(\mu_1, \ldots, \mu_q)}{\mu_1^{m+q-1}(1-s)^{m-q+2}} +$$
$$+ \frac{(-1)^{q-1} m R_q(s) \sum\limits_{n=0}^{m-1} a_n^{(m)}}{\mu_1^{m+1}(1-s)^{m-q+1}} + \frac{w_{m,q+1}\big(P(s); Q(s), R_1(s), \ldots, R_{q-1}(s)\big)}{\mu_1^{m+q-1} Q^m(s)(1-s)^{m-q+1}}\,. \tag{26}$$

Если коэффициенты при s^t в выражениях $\dfrac{1}{(1-s)^{m-q+1}}$ и

$$\frac{w_{m,q+1}\big(P(s), Q(s), R_1(s), \ldots, R_{q-1}(s)\big)}{Q^m(s)}$$

обозначим соответственно a_t и b_t, то из (26) получим, что

$$\mathrm{M}\, N_t^m = \frac{1}{\mu_1^m} \sum_{n=0}^{m-1} a_n^{(m)} \frac{(t+1)\ldots(t+m)}{m!} + \frac{w_{m2}(\mu_1, \mu_2)}{\mu_1^{m+1}} \frac{(t+1)\ldots(t+m-1)}{(m-1)!} +$$
$$+ \ldots + \frac{w_{mq}(\mu_1, \ldots, \mu_q)}{\mu_1^{m+q-1}} \frac{(t+1)\ldots(t+m-q+1)}{(m-q+1)!} + \frac{m \sum\limits_{n=0}^{m-1} a_n^{(m)}}{2\pi i \cdot \mu_1^{m+1}} \times$$
$$\times \int\limits_{|s|=r<1} \frac{(-1)^{q-1} R_q(s)}{(1-s)^{m-q+1}} \frac{ds}{s^{t+1}} + \frac{1}{\mu_1^{m+q-1}} \{b_0 a_t + b_1 a_{t-1} + \ldots + b_t a_0\}\,. \tag{27}$$

Но

$$a_t=\frac{(t+1)\dots(t+m-q)}{(m-q)!} \tag{28}$$

и

$$b_t=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|s|=r<1}\frac{\bar{w}_{m,q+1}\left(P(s),Q(s),R_1(s),\dots,R_{q-1}(s)\right)}{Q^m(s)}\frac{ds}{s^{t+1}}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i t}\int\limits_{|s|=1}\frac{d}{ds}\left[\frac{\bar{w}_{m,q+1}\left(P_t(s),Q_t(s),R_{1t}(s),\dots,R_{q-1,t}(s)\right)}{Q_t^m(s)}\right]\frac{ds}{s^t}=$$

$$=0\left(\frac{\ln t}{1+t}\right). \tag{29}$$

Следовательно, из (28) и (29) находим, что

$$b_0a_t+b_1a_{t-1}+\dots+b_ta_0=0\,(t^{m-q}\ln^2 t). \tag{30}$$

Далее имеем

$$\int\limits_{|s|=r<1}\frac{R_q(s)}{(1-s)^{m-q+1}}\frac{ds}{s^{t+1}}=\int\limits_{|s|=r<1}\frac{R_{q,t+m}(s)}{(1-s)^{m-q+1}}\frac{ds}{s^{t+1}}. \tag{31}$$

Но

$$\begin{gathered}R_{q,t+m}(1)-R_{q,t+m}(s)=(1-s)\,{}_{(1)}R_{q+1,t+m-1}(s),\\ {}_{(1)}R_{q+1,t+m-1}(1)-{}_{(1)}R_{q+1,t+m-1}(s)=(1-s)\,{}_{(2)}R_{q+2,t+m-2}(s),\dots,\\ {}_{(m-q)}R_{m,t+q}(1)-{}_{(m-q)}R_{m,t+q}(s)=(1-s)\,{}_{(m-q+1)}R_{m+1,t+q-1}(s),\end{gathered} \tag{32}$$

где

$$R_{q+i,t+m-i}(s)=\sum_{k=0}^{t+m-i}r^{(i)}_{q+i,k}s^k \quad \text{и} \quad r^{(i)}_{q+i,k}=\sum_{j=k+1}^{t+m-i+1}r^{(i-1)}_{q+i-1,j}$$

$$i=1,\dots,m-q+1.$$

и поэтому

$$\frac{(-1)^{q-1}R_{q,t+m}(s)}{(1-s)^{m-q+1}}=\frac{(-1)^{q-1}R_{q,t+m}(1)}{(1-s)^{m-q+1}}+\frac{(-1)^q\,{}_{(1)}R_{q+1,t+m-1}(1)}{(1-s)^{m-q}}+\dots+$$

$$+\frac{(-1)^{m-1}\,{}_{(m-q)}R_{m,t+q}(1)}{(1-s)}+(-1)^m\,{}_{(m-q+1)}R_{m+1,t+q-1}(s). \tag{33}$$

С другой стороны,

$${}_{(i)}R_{q+i,t+m-i}(1)=o\left(\sum_{k=1}^{t+m-i}k^{q+i+1}p_k\right)=o\left(\sum_{k=1}^{\left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]}k^{q+i+1}p_k+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=\left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]+1}^{t+m-i}k^{q+i+1}p_k\right)=o\left(\frac{t^{i+1}}{\varphi^{i+1}(t)}+\frac{t^{i+1}}{\varphi\left(\left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]\right)}\right)=$$

$$=o\left(\frac{t^{i+1}}{\varphi\left(\left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]\right)}\right),\qquad i=0,1,\dots,m-q+1 \tag{34}$$

(здесь $\varphi(t)$ определена как и в соотношении (25)), и коэффициент $r_{m+1,t}^{(m-q+1)}$ при s^t в ${}_{(m-q+1)}R_{m+1,t+q-1}(s)$ имеет порядок

$$O\left(\frac{(1+t)^{m-q+1}}{\varphi(t)}\right). \tag{35}$$

Из соотношений (27), (30) – (35) получаем утверждение теоремы 2.

Приступим к доказательству теоремы 3. Известно, что $\Gamma_m(t)$ является линейной комбинацией с числовыми коэффициентами конечного числа членов вида

$$\mathbf{M}\, N_t^{m_1}\, \mathbf{M}\, N_t^{m_2} \dots \mathbf{M}\, N_t^{m_r},$$

где $m_1+m_2+\dots+m_r=m$. Из теоремы 1 имеем

$$\mathbf{M}\, N_t^{m_j}=\gamma_1 t^{m_j}+\gamma_2 t^{m_j-1}+\dots+\gamma_{m_j}t+\gamma_{m_j+1}+\frac{\Lambda_{m_j}(t)}{(1+t)^{m+p-m_j}}, \Lambda_{m_j}\in R,$$

$$j=1,\dots,r.$$

Но тогда и

$$\mathbf{M}\, N_t^{m_1}\mathbf{M}\, N_t^{m_2}\dots\mathbf{M}\, N_{n_t}^{m_r}=\gamma_1 t^m+\gamma_2 t^{m-1}+\dots+\gamma_{mt}+\gamma_{m+1}+\frac{\lambda(t)}{(1+t)^p},$$

где $\lambda(t)\in R$ (см. [6], доказательство теоремы 3). Следовательно, и

$$\Gamma_m(t)=\gamma_1 t^m+\gamma_2 t^{m-1}+\dots+\gamma_m t+\gamma_{m+1}+\frac{\lambda(t)}{(1+t)^p}, \qquad \lambda(t)\in R. \tag{36}$$

Чтоб доказать теорему, осталось еще показать, что коэффициенты γ_1, $\gamma_2, \dots, \gamma_{m-1}$ в правой части соотношения (36), которые зависят только от первых $m-1$ моментов $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{m-1}$ распределения $F_1(x)$, обращаются в нуль. Для этого нам понадобится характеристическая функция $f_t(z)=\mathbf{M}e^{izN_t}$ величины N_t.

Известно, что характеристическая функция $f_t(z)$ является коэффициентом при s_t в разложении выражения

$$\frac{1-P(s)}{(1-s)\left(1-e^{iz}P(s)\right)}=\frac{Q(s)}{1-e^{iz}P(s)} \tag{37}$$

по степеням s (см. [1], теорема 8, и [10]). Но, так как нас будут интересовать только коэффициенты при s^t, то вместо выражения (37) мы можем рассмотреть выражение

$$\frac{Q_t(s)}{1-e^{iz}P_t(s)}. \tag{38}$$

Пусть, далее, $s_t(z)$ является корнем уравнения

$$1-e^{iz}P_t(s)=0. \tag{39}$$

Нетрудно видеть, что при $z=0$ уравнение (39) имеет наименьший по модулю положительный корень $s_t(o)$, удовлетворяющий неравенству

$$1<s_t(0)\leqslant\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{t}p_k}=1+0\left(\frac{1}{t^{m+p+1}}\right). \tag{40}$$

Далее, найдутся такие c_1 и t_1, что

$$\inf_{|s|\leqslant 1} \left| P_t'\Big(s_t(0) \Big) \right| \geqslant c_1$$

при всех $t \geqslant t_1$ (доказывается аналогично (18)). Тогда при всех $t \geqslant t_1$ $s_t(0)$ является простым корнем. Следовательно, мы можем воспользоваться свойствами неявных функций (см. напр. [6], стр 95—102), согласно которым существует такое число $\Delta_t > 0$, что уравнение (39) определяет в интервале $[-\Delta_t,\ \Delta_t]$ однозначную, непрерывную и $m+p+1$ —кратно дифференцируемую функцию $s = s_t(z)$, обращающую это уравнение в тождество и удовлетворяющую равенство $s_t(0) = 1 + \delta_t$. Вместо интервала $[-\Delta_t,\ \Delta_t]$ можно взять интервал, в котором

$$[1 - e^{iz} P_t(s)]_s' \neq 0 .$$

Далее найдутся такие c_2 и t_2, что при $t \geqslant t_2$

$$|P_t'(s)| \geqslant c_2 \qquad \text{для всех} \quad s \in \left\{ s : |s| < 1 + \frac{\bar{\Delta}_t^2}{2},\ |\arg s| \leqslant \bar{\Delta}_t \right\}, \tag{41}$$

где $\bar{\Delta}_t = \dfrac{\sqrt{c \ln t}}{\sqrt{t}}$ и $c = \min(1, \mu_1)$. Тогда вместо интервала $[-\Delta_t,\ \Delta_t]$ можно, например, взять интервал $[-\bar{\Delta}_t,\ \bar{\Delta}_t]$. Следовательно, при всех $|z| \leqslant \bar{\Delta}_t$ справедливо разложение

$$s_t(z) = 1 + \delta_t + s_t'(0)\, z + s_t''(0)\, \frac{z^2}{2} + \ldots +$$

$$+ s_t^{(m+p+1)}(0)\, \frac{z^{m+p+1}}{(m+p+1)!} + o\left(|z|^{m+p+1}\right). \tag{42}$$

Для вычисления производных $s_t'(0), \ldots, s_t^{(m+p+1)}(0)$ воспользуемся уравнениями

$$P_t\Big(s_t(z)\Big) \equiv e^{-iz},$$

$$s_t'(z)\, P_t\Big(s_t(z)\Big) \equiv -ie^{-iz},$$

$$s_t''(z)\, P_t'\Big(s_t(z)\Big) + s_t'^2(z)\, P_t''\Big(s_t(z)\Big) = (-i)^2 e^{-iz},$$

$$s_t'''(z)\, P_t'\Big(s_t(z)\Big) + 3 s_t''(z)\, s_t'(z)\, P_t''\Big(s_t(z)\Big) + s_t'^3(z)\, P_t'''\Big(s_t(z)\Big) = (-i)^3 e^{-iz}$$

и т.д. Отсюда при $z = 0$ получаем

$$s_t'(0) = -\frac{i}{P_t'(1+\delta_t)} = -\frac{i}{\mu_1} + o\left(\frac{1}{t^{m+p}}\right),$$

$$s_t''(0) = \frac{1}{P_t'(1+\delta_t)}\, [i^2 - s_t'^2(0)\, P_t''(1+\delta_t)] = -i^2\, \frac{\mu_2 - \mu_1^2 - \mu_1}{\mu_1^3} + o\left(\frac{1}{t^{m+p-1}}\right),$$

$$s_t'''(0) = \frac{1}{P_t'(1+\delta_t)}\, [(-i)^3 - 3 s_t''(0)\, s_t'(0)\, P_t''(1+\delta_t) - s_t'^3(0)\, P_t'''(1+\delta_t)] =$$

$$= -\frac{i^3}{\mu_1^5}\, [\mu_1^4 - 3(\mu_2 - \mu_1^2 - \mu_1)(\mu_2 - \mu_1) - \mu_1(\mu_3 - 3\mu_2 + 2\mu_1)] +$$

$$+ o\left(\frac{1}{t^{m+p-2}}\right) \tag{43}$$

и т.д.

Согласно соотношениям (42) и (43)

$$s_t(z) = 1 + \delta_t - \frac{1}{\mu_1} iz - \frac{\mu_2 - \mu_1^2 - \mu_1}{\mu_1^3} \frac{(iz)^2}{2} - \frac{1}{\mu_1^5} [\mu_1^4 -$$

$$- 3(\mu_2 - \mu_1^2 - \mu_1)(\mu_2 - \mu_1) - \mu_1 (\mu_3 - 3\mu_2 + 2\mu_1)] + \ldots +$$

$$+ R(\mu_1, \ldots, \mu_{m+p+1}) \frac{(iz)^{m+p+1}}{(m+p+1)!} + o\left(\frac{|z|}{t^{m+p}} + |z|^{m+p+1}\right), \tag{44}$$

где $R(u_1, \ldots, u_r)$ — рациональная функция от $u_1, \ldots, u_r$.

При всех $|z| \leqslant \bar{\Delta}_t$ и $t \geqslant t_3 = \max(t_0, t_2)$ имеем (см. [9])

$$\frac{Q_t(s)}{1 - e^{iz} P_t(s)} = e^{-iz} \frac{Q_t(s)}{P_t(s_t(z)) - P_t(s)} = e^{-iz} \frac{Q_t(s_t(z))}{P'_t(s_t(z))(s_t(z) - s)} +$$

$$+ e^{-iz} \frac{Q_t(s) P'_t(s_t(z))(s_t(z) - s) - Q_t(s_t(z)) [P_t(s_t(z) - P_t(s))]}{P'_t(s_t(z))(s_t(z) - s)[P_t(s_t(z)) - P_t(s)]}. \tag{45}$$

Характеристическую функцию $f_t(z)$ величины N_t можем найти как коэффициент при s^t правой части выражения (45). Итак, согласно (41) для $|z| \leqslant \bar{\Delta}_t$ и $t \geqslant t_3$

$$f_t(z) = e^{-iz} \frac{Q_t(s_t(z))}{P'_t(s_t(z))} s_t^{-(t+1)}(z) + \frac{e^{-iz}}{2\pi i} \times$$

$$\times \int\limits_{|s|=1} \frac{Q_t(s) P'_t(s_t(z))(s_t(z) - s) - Q_t(s_t(z)) [P_t(s_t(z)) - P_t(s)]}{P'_t(s_t(z))(s_t(z) - s)[P_t(s_t(z) - P_t(s)]} \frac{ds}{s^{t+1}}. \tag{46}$$

Отсюда

$$\ln f_t(z) = -iz + \ln \frac{Q_t(s_t(z))}{P'_t(s_t(z))} - (t+1) \ln s_t(z) + \ln\left[1 + \frac{s_t^{t+1}(z)}{2\pi i}\right] \times$$

$$\times \int\limits_{|s|=1} \frac{-\frac{Q_t(s) - Q_t(s_t(z))}{s - s_t(z)} P'_t(s_t(z)) + Q_t(s_t(z)) \frac{P_t(s) - P_t(s_t(z)) - P'_t(s_t(z))(s - s_t(z))}{[s - s_t(z)]^2}}{Q_t(s_t(z)) \frac{P_t(s) - P_t(s_t(z))}{s - s_t(z)}} \frac{ds}{s^{t+1}}. \tag{47}$$

У нас

$$\Gamma_m(t) = [\ln f_t(z)]_{z=0}^{(m)}, \tag{48}$$

поэтому из соотношения (47) легко находим, что

$$\Gamma_m(t) = O(t_m). \tag{49}$$

Действительно, существуют постоянные c_3 и c_4, зависящие только от $m+1$ и m первых моментов соответственно (см. (41)) такие, что

$$\left|\left[\ln \frac{Q_t(s_t(z))}{P'_t(s_t(z))}\right]_{z=0}^{(m)}\right| \leqslant c_3$$

и

$$|[\ln s_t(z)]_{z=0}^{(m)}| \leqslant c_4. \tag{50}$$

Далее имеем

$$|[s_t^{t+1}(z)]_{z=0}^{(k)}| = 0(t^k), \qquad k = 0, 1, \ldots, m, \tag{51}$$

и, если

$$W\left(s_1 s_t(z)\right)=$$

$$=\frac{-\dfrac{Q_t(s)-Q_t\left(s_t(z)\right)}{s-s_t(z)}\,P_t'\left(s_t(z)\right)+Q_t\left(s_t(z)\right)\dfrac{P_t(s)-P_t\left(s_t(z)\right)-P_t'\left(s_t(z)\right)\left(s-s_t(z)\right)}{[s-s_t(z)]^2}}{Q_t\left(s_t(z)\right)\dfrac{P_t(s)-P_t\left(s_t(z)\right)}{s-s_t(z)}},$$

то

$$\left|\left[\int\limits_{|s|=1} W\left(s,s_t(z)\right)\frac{ds}{s^{t+1}}\right]^{(k)}_{z=0}\right|=\left|\int\limits_{|s|=1}\left[W\left(s,s_t(z)\right)\right]^{(k)}_{z=0}\frac{ds}{s^{t+1}}\right|=$$

$$=\frac{(t-m-p+k+1)!}{t!}\left|\int\limits_{|s|=1}\frac{d^{m+p-k-1}}{ds^{m+p-k-1}}\left[W\left(s,s_t(z)\right)\right]^{(k)}_{z=0}\frac{ds}{s^{t-m-p+k+2}}\right|=$$

$$=O\left(\frac{1}{t^{m+p-k-1}}\right);\qquad k=0,1,\ldots,m. \tag{52}$$

Из соотношений (47), (48), (50)–(52) получаем (49). Следовательно, коэффициенты $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{m-1}$ в правой части соотношения (36) обращаются в нуль. Теорема 3 доказана.

Соотношение (6) доказывается аналогично теореме 3, только нужно воспользоваться теоремой 1 при $p=0$ и вместо соотношения (55) – следующим соотношением (см. оценки интеграла в (19))

$$\left[\int\limits_{|s|=1} W\left(s;s_t(z)\right)\frac{ds}{s^{t+1}}\right]^{(k)}_{z=0}=$$

$$=\frac{(t-m+k)!}{t!}\left|\int\limits_{|s|=1}\frac{d^{m-k}}{ds^{m-k}}\left[W\left(s,s_t(z)\right)\right]^{(k)}_{z=0}\frac{ds}{s^{t-m+k+1}}\right|=$$

$$=O\left(\frac{\ln t}{t^{m-k}}\right),\qquad k=0,1,\ldots,m. \tag{53}$$

При доказательстве соотношения (7) вместо теоремы 1 воспользуемся теоремой 2 и вместо соотношения (53) – соотношением

$$\left[\int\limits_{|s|=1} W\left(s,s_t(z)\right)\frac{ds}{s^{t+1}}\right]^{(k)}_{z=0}=$$

$$=\frac{(t-m-k)!}{t!}\left|\int\limits_{|s|=1}\frac{d^{m-k}}{ds^{m-k}}\left[W\left(s,s_t(z)\right)\right]^{(k)}_{z=0}\frac{ds}{s^{t-m+k+1}}\right|=$$

$$=O\left(\frac{\ln t}{t^{m-k-1}}\right),\qquad k=0,1,\ldots,m.$$

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
24.V.1968

Литература

1. W. Feller, Fluctuation theory of recurrent events, Trans. Amer. Math. Soc., 67 (1949), 98–119.
2. Täcklind, Fourieranalytische Behandlung vom Erneuerungsproblem, Skand. Aktuar Tidskr., 1945, 68–105.

3. D. Blackwell, A renewal theorem, Duke Math. J., 15(1948), 145–150.
4. W. L. Smith, Asymptotic renewal theorems, Proc. Roy. Soc. Edinb. A., 64(1954), 9–48.
5. W. L. Smith, On renewal theory, counter problems, and quasi-Poisson processes, Proc. Camb. Phil. Soc., 53(1957), 175–193.
6. W. L. Smith, On the cumulants of renewal processes, Biometrica, 46(1959), No 1–2.
7. M. R. Leadbetter, On series expansion for the renewal moments, Biometrica, 50(1963), No 1–2.
8. В. Лютикас, О производящей функции моментов числа восстановлений в случае дискретного процесса восстановления, Лит. матем. сб., V, № 3 (1965), 421–425.
9. В. Лютикас, Вычисление моментов и семиинвариантов числа восстановлений в случае дискретного процесса восстановления, Лит. матем. сб., VI, № 1 (1966), 75–83.
10. А. Алешкявичене, Центральная предельная теорема для сумм дискретных процессов восстановления, Лит. матем. сб., VII, № 3, (1967), 381–388.
11. А. О. Гельфонд, Оценка остаточного члена в предельной теореме для рекуррентных событий, Теория вероят. и ее примен., 9(1964), 2.
12. И. Г. Арамaнович, Р. С. Гутер, А. А. Люстерник и др., Математический анализ, дифференцирование и интегрирование, Физматгиз, 1961.

DISKRETINIO ATSTATYMO PROCESO MOMENTŲ IR SEMIINVARIANTŲ IŠSKAIČIAVIMAS

A. Aleškevičienė

(*Reziumė*)

Šiame darbe gautos diskretinio atstatymo proceso momentų ir semiinvariantų asimptotinės išraiškos atstatymo proceso „laukimo laiko" momentais. Šiam atvejui gautos momentų ir semiinvariantų išraiškos yra analogiškos išraiškoms, kurias gavo V. Smitas (žr. [6]) atstatymo proceso, kurio pasiskirstymo funkcijos k-ji kompozicija kokiam nors sveikam skaičiui $k>0$ turi absoliučiai tolydinę komponentę, momentams ir semiinvariantams.

CALCULATION OF THE MOMENTS AND CUMULANTS OF THE DISCRETE RENEWAL PROCESS

A. Aleškevičienė

(*Summary*)

The asymptotic formulas for the moments and cumulants of the discrete renewal process expressed in terms of moments of „life-time" for the renewal process are obtained. In this case the formulas for moments and cumulants obtained are analogous to those of W. Smith (see [6]) for the moments and cumulants of the renewal process the k-th convolution of distribution of which has absolutely continuous component for some integer $k>0$.