1969

УДК–519.21

ОБ ОЦЕНКЕ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В МНОГОМЕРНОЙ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ. I

В. Паулаускас

1. Обозначения. Обозначим покомпонентное умножение и деление: если $x,\ y \in R_k$, то $x \cdot y = (x_1 y_1, \ldots, x_k y_k)$, $\frac{x}{y} = \left(\frac{x_1}{y_1}, \ldots, \frac{x_k}{y_k}\right)$. Если $\Lambda = \{a_{ij}\}$ – квадратная матрица, то $|\Lambda|$ – ее детерминант, а $|\Lambda_{ij}|$ – алгебраическое дополнение к элементу a_{ij}. Пусть $\xi_i = (\xi_{i1}, \ldots, \xi_{ik})$, $i = 1, 2, \ldots, n$ – независимые k-мерные ($k \geqslant 2$) случайные векторы (с. в.) с функциями распределения (ф. р.) $F_i(x)$, $x \in R_k$ и $M\xi_k = 0$. Матрицу вторых моментов с. в. ξ_k будем обозначать ${}_k\Delta = \{\lambda_{ij}^k\}$, его корреляционную матрицу $- {}_k\Lambda = \{\rho_{ij}^k\}$, дисперсию и третий абсолютный момент случайной величины ξ_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, k$ – σ_{ij}^2 и β_{ij}, соответственно, и далее

$$B_{k,l,m}^2 = \sum_{r=k}^{l} \sigma_{rm}^2, \qquad \bar{B}_{p,l}^2 = (B_{p,l,1}^2, \ldots, B_{p,l,k}^2), \qquad B_{ni}^2 = B_{1,n,i}^2,$$

$$B_n^2 = (B_{n1}^2, \ldots, B_{nk}^2), \qquad D_{mi} = \sum_{j=1}^{m} \beta_{ji}, \qquad L_{3n}^{(i)} = \frac{D_{ni}}{B_{ni}^3}, \qquad S_n = \frac{\sum_{j=1}^{n} \xi_j}{B_n},$$

где $B_n = (B_{n1}, \ldots, B_{nk})$.
Пусть

$${}_j\mathfrak{B} = \{\tilde{\rho}_{ik}^{j,n}\}, \qquad \rho_{ik}^{jn} = \frac{1}{B_{j,n,k} \cdot B_{j,n,k}} \sum_{m=j}^{n} \rho_{ik}^{(m)} \cdot \sigma_{mi} \cdot \sigma_{mk}.$$

Нетрудно видеть, что ${}_j\mathfrak{B}$ является корреляционной матрицей с. в. $\frac{1}{B_{j,n}} \sum_{m=j}^{n} \xi_m$.

Положим $\chi_{nm} = \min\limits_{j \geqslant n} \frac{|{}_j\mathfrak{B}_j|}{|{}_j\mathfrak{B}_{mm}|}$. Пусть ξ_i' – k – мерные независимые нормальные с. в. с ф. р. $\Phi_i'(x)$, $M\xi_i' = 0$ и матрицей вторых моментов, равной соответствующей матрице с. в. ξ_i, а $S_n' = \frac{1}{B_n} \sum_{j=1}^{n} \xi_j'$. $F_{s_n}(x)$ и $\Phi_{s_n'}(x)$ – ф. р. сумм S_n и S_n', соответственно. Введем так называемые „псевдомоменты“:

$$\nu_{ij} = \int |x_j|^3 \left| (F_i - \Phi_i)\,(dx) \right|, \qquad W_{3n}^j = \frac{\sum_{i=1}^{n} \nu_{ij}}{B_{nj}^3}.$$

Определим величины γ_{jl}, $j=1, 2, \ldots, n$, $l=1, 2, \ldots, k$ следующим образом:

$$\gamma_{jl}\geqslant 1, \qquad \tilde{\beta}_{jl}=\beta_{jl}\gamma_{jl}, \qquad \tilde{D}_{nl}=\sum_{j=1}^{n}\tilde{\beta}_{jl}, \qquad \tilde{L}_{3n}^{l}=\frac{\tilde{D}_{nl}}{B_{nl}^{3}}\ ;$$

γ_{jl} подобраны так, что для всех $j=1, 2, \ldots, n$ и $l=1, 2, \ldots, k$ имеют место неравенства

$$\frac{\beta_{jl}}{\sigma_{jl}^{2}}\leqslant\frac{\tilde{D}_{nl}}{B_{1,j,l}^{2}}\ ;$$

C_1, C_2, C_3, ... будут обозначать абсолютные константы.

Нормальный с. в. с нулевым вектором математических ожиданий и единичной матрицей вторых моментов будем обозначать через $N(0, 1)$; его ф. р. — через $\Phi(x)$: плотность распределения $\varphi(x)$, а $\Phi_T(x)$ и $\varphi_T(x)$ будут обозначать ф. р. и плотность с. в. $N\left(0, \frac{1}{T^2}I\right)$.

В дальнейшем будем считать распределение S_n невырожденным.

2. Формулировка результатов. Теорема 1. *Для всех n справедлива оценка*

$$\sup_{x\in R_k}|F_{S_n}(x)\cdot\Phi_{S'_n}(x)|\leqslant C_1(k)\left(\sum_{i=1}^{k}W_{3n}^{(i)}\right)^{\frac{1}{4}}, \tag{2}$$

где $C_1(k)\leqslant C_1k^{\frac{13}{8}}$.

Утверждение теоремы обобщает одномерную оценку В. М. Золотарева, полученную в [2]. Из теоремы 1 и неравенств $\nu_{ij}\leqslant C_2\beta_{ij}$ вытекает следствие.

Следствие. Для всех n справедлива оценка

$$\sup_{x\in R_k}|F_{S_n}(x)-\Phi_{S'_n}(x)|\leqslant C_2(k)\left(\sum_{l=1}^{k}L_{3n}^{(i)}\right)^{\frac{1}{4}}, \tag{3}$$

где $C_2(k)\leqslant C_3k^{\frac{13}{8}}$.

Теорема 2. *Пусть с. в. ξ_i, $i=1, 2, \ldots, n$ таковы, что выполняются неравенства*

$$\frac{\beta_{jl}}{\sigma_{jl}^{2}}\leqslant\frac{D_{nl}}{B_{1,j,l}^{2}} \qquad j=1,2,\ldots,n, \qquad l=1,2,\ldots,k. \tag{4}$$

Тогда справедлива оценка

$$\sup_{x\in R_k}|F_{S_n}(x)-\Phi_{S'_n}(x)|\leqslant C_3(k)\left(\sum_{i=1}^{k}L_{3n}^{(i)}\right)^{\frac{1}{3}}, \tag{5}$$

где $C_3(k)\leqslant C_4\cdot k^{\frac{5}{3}}$ (*полученное численное значение* $C_4=17{,}28$).

Так как для одинаково распределенных величин (4) выполняется, то теорема 2 обобщает теорему 3 из работы В. В. Сазонова [1].

За счет ухудшения оценки (5) можно избавиться от ограничения (4) на с. в. ξ_i.

Теорема 3. *Для всех n*

$$\sup_{x\in R_k} |F_{S_n}(x)-\Phi_{S_n'}(x)|\leqslant C_3(k)\left(\sum_{i=1}^{k}\tilde{L}_{3n}^{(i)}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{6}$$

Во всех трех оценках (2), (5), (6) нет зависимости от степени корреляции между компонентами с. в. ξ_i. В следующие теоремы входят величины χ_{nm}, которые выражают эту зависимость.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (4). *Тогда справедлива оценка*

$$\sup_{x\in R_k} |F_{S_n}(x)-\Phi_{S_n'}(x)|\leqslant C_4(k)\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\chi_{ni}}L_{3n}^{(i)}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{7}$$

где $C_4(k)\leqslant C_5k^{\frac{7}{4}}$.

Теорема 5. *Для всех n справедлива оценка*

$$\sup_{x\in R_k} |F_{S_n}(x)-\Phi_{S_n'}(x)|\leqslant C_4(k)\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\chi_{ni}}\tilde{L}_{3n}^{(i)}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

Г. Бергстремом [4] получен следующий результат.

Пусть

$$\gamma_i^2=\max_{p\leqslant n}\frac{|_p\Delta_{ii}|}{|_p\Delta_{i1}|},\qquad \mu_i^p=\frac{|_p\Delta|}{|_p\Delta_{ii}|},\qquad S_n^{(i)2}=\sum_{j=1}^{n}\mu_i^{(j)}.$$

Тогда для всех n

$$\sup_{x\in R_k} |F_{S_n}(x)-\Phi_{S_n'}(x)|\leqslant C(k)\frac{\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\gamma_j^3\sum_{i=1}^{n}\beta_{ij}}{S_n^{(1)3}}. \tag{α}$$

В конце статьи приведены примеры, показывающие в каких случаях оценки (7) и (8) лучше, чем (α). А именно, рассмотрены две последовательности с. в., для которых оценка (α) дает тривиальный результат, в то время как (8) дает скорость сходимости $\left(\frac{1}{n}^{\frac{1}{4}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\ln n}^{\frac{3}{4}}\right)$.

3. Доказательства теорем. Введем удобное для нас обозначение композиции ф. р.: $F_{ij}(x)=F_i*F_{i+1}*\ \dots\ *F_j(x)$. Тогда $F_{S_n}(x)=F_{1,n}(B_nx)$.

Исходным пунктом для доказательств всех теорем будет следующая оценка из [1]:

$$\sup_{x\in R_k}|F_{S_n}(x)-\Phi_{S_n}(x)|\leqslant$$

$$\leqslant 2\sup_{x\in R_k}|[(F_{S_n}-\Phi_{S_n}')*\Phi_T](x)|+\frac{12k}{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\frac{1}{T}. \tag{9}$$

Для оценки величины $V_n(x)=(F_{S_n}-\Phi_{S_n})*\Phi_T(x)$ будем пользоваться тождественным разложением

$$V_n(x)=\sum_{j=1}^{n} \tilde{F}_{1,j-1}*\tilde{\Phi}_{j+1,n}*\Phi_T*(\tilde{F}_j-\tilde{\Phi}_j)(x)=\sum_{j=1}^{n} U_j(x), \tag{10}$$

где

$$\tilde{F}_j(x)=F_j(x\cdot B_n),\ \tilde{\Phi}_j(x)=\Phi_j(x\cdot B_n),$$

$$\tilde{F}_{1j}(x)=F_{1,j}(x, B_n),\ \tilde{\Phi}_{1,j}(x)=\Phi_{1,j}(x\cdot B_n).$$

Очевидно, что $|U_j(x)|\leqslant\sup\limits_{x\in R_k}|[W_j*(\tilde{F}_j-\tilde{\Phi}_j)](x)]$, где $W_j(x)=\tilde{\Phi}_{j+1,n}*\Phi_T(x)$ есть ф. р. величины $N(0, {}_{j+1}A)$. Если через ${}_i\tilde{\Delta}$ обозначить матрицу вторых моментов с. в. $\tilde{\xi}_i=\frac{\xi_i}{B_n}$, то

$${}_{j+1}A=\sum_{i=j+1}^{n} {}_i\tilde{\Delta}+\frac{1}{T^2}I={}_{j+1}B+\frac{1}{T^2}I. \tag{11}$$

Запишем

$$[W_j*(\tilde{F}_j-\tilde{\Phi}_j)](x)=\int\limits_{R_k} W_j(x-y)(\tilde{F}_j-\tilde{\Phi}_j)(dy) \tag{12}$$

и применим разложение функции W_j в ряд Тейлора:

$$W_j(x-y)=\sum_{j=0}^{2}\frac{1}{j!}\left[\left(-\sum_{m=1}^{k} y_m\frac{\partial}{\partial y_m}\right)^j W_j\right](x)+$$

$$+\frac{1}{6}\left[\left(-\sum_{m=1}^{k} y_m\frac{\partial}{\partial y_m}\right)^3 W_j\right](x+\Theta y). \tag{13}$$

Подставляя (13) в (12) и принимая во внимание тот факт, что моменты до второго порядка включительно у ф. р. $\tilde{\Phi}_j$ и $\tilde{F}_j$ совпадают, получаем

$$|U_j(x)|\leqslant\sup_{x\in R_k}\frac{1}{6}\left|\int\limits_{R_k}\left[\left(-\sum_{m=1}^{k} y_m\frac{\partial}{\partial y_m}\right)^3 W_j\right](x+\Theta y)(\tilde{F}_j-\tilde{\Phi}_j)(dy)\leqslant\right.$$

$$\leqslant\frac{1}{6}\int\limits_{R_k}\sum_{l,m,p=1}^{k}\sup_{x\in R_k}\left|\frac{\partial^3 W_j(x)}{\partial x_l\,\partial x_m\,\partial x_p}\right||y_l y_m y_p|\,|(\tilde{F}_j-\tilde{\Phi}_j)(dy)|. \tag{14}$$

Из леммы 3 [1] вытекает

$$\left|\frac{\partial^3 W_j(x)}{\partial x_l\,\partial x_m\,\partial x_p}\right|\leqslant C_6\left(\frac{|{}_{j+1}A_{ll}|}{|{}_{j+1}A|_{j+1}\sigma_l}\cdot\frac{|{}_{j+1}A_{mm}|}{|{}_{j+1}A|_{j+1}\sigma_m}\cdot\frac{|{}_{j+1}A_{pp}|}{|{}_{j+1}A|_{j+1}\sigma_p}\right)^{\frac{1}{3}}, \tag{15}$$

где ${}_{j+1}\sigma_i^2 = \frac{B_{j+1,n,i}^{\;2}}{B_{ni}^2} + \frac{1}{T^2}$ является дисперсией i-той компоненты с. в. $N(0, {}_{j+1}A)$.
Из (11) и леммы 10 [4] следует*)

$$\frac{|{}_{j+1}A_{ll}|}{|{}_{j+1}A|} \leqslant \frac{1}{\frac{|{}_{j+1}B|}{|{}_{j+1}B_{ll}|} + \frac{\left|\frac{1}{T^2} I\right|}{\left|\left(\frac{1}{T^2} I\right)_{ll}\right|}} \leqslant \frac{\left|\left(\frac{1}{T^2} I\right)_{ll}\right|}{\left|\frac{1}{T^2} I\right|} = T^2. \tag{16}$$

Из (14), (15) и (16) вытекает

$$|U_j(x) \leqslant C_7 T^2 \int_{R_k} \left(\sum_{l,m,p=1}^{k} \frac{|y_l y_m y_p|}{({}_{j+1}\sigma_l\, {}_{j+1}\sigma_m\, {}_{j+1}\sigma_p)^{1/2}} \right| (\tilde{F}_j - \tilde{\Phi}_j)(dy)| =$$

$$= C_7 T^2 \int_{R_k} \left(\sum_{l=1}^{k} \frac{|y_l|}{{}_{j+1}\sigma_l^{1/2}} \right)^3 |(\tilde{F}_j - \tilde{\Phi}_j)(dy)| \leqslant$$

$$\leqslant C_7 T^2 k^2 \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{{}_{j+1}\sigma_l} \int_{R_k} |y_l|^3 \, |(\tilde{F}_j - \tilde{\Phi}_j)(dy)| =$$

$$= C_7 T^2 k^2 \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{B_{nl}^3\, {}_{j+1}\sigma_l} \int_{R_k} |{}^{\mathsf{f}}y_l|^3 \, |(F_j - \Phi_j)(dy)| =$$

$$= C_7 T^2 k^2 \sum_{l=1}^{k} \frac{\nu_{jl}}{B_{nl}^3\, {}_{j+1}\sigma_l} .$$

Получили оценку

$$\sup_{x \in R_k} |V_n(x)| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \sup_{x \in R_k} |U_j(x)| \leqslant C_7 T^2 k^2 \sum_{j=1} \sum_{l=1}^{K} \frac{\nu_{jl}}{B_{nl}^3 \left(\frac{B_{j+1,nl}^2}{B_{nl}^2} + \frac{1}{T^2} \right) \frac{1}{2}} . \tag{17}$$

Применяя грубую оценку $\left(\frac{B_{j+1,n,l}^2}{B_{nl}^2} + \frac{1}{T^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \leqslant T$ и полагая $\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \sim k^{\frac{1}{2}}$,
из (17) и (9), получаем

$$\sup_{x \in R_k} |F_{s_n}(x) - \Phi_{s_n}(x)| \leqslant C_7 k^2 T^3 \sum_{i=1}^{k} W_{3n}^{(i)} + C_8 k^{\frac{3}{2}} \frac{1}{T} . \tag{18}$$

Полагая в (18) $T = C_9 k^{-\frac{1}{8}} \left(\sum_{i=1}^{k} W_{3n}^{(i)} \right)^{-\frac{1}{4}}$, получаем утверждение теоремы 1.

Доказательство теоремы 2 начнем с (17). Так как $\nu_{ij} \leqslant C_2 \beta_{ij}$, то выбрав в сумме (17) одну фиксированную компоненту l оценим сумму

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{B_{jl}}{B_{nl}^3 \left(\frac{B_{j+1,n,l}^2}{B_{nl}^2} + \frac{1}{T^2} \right)^{1/2}} . \tag{19}$$

*) Строгое обоснование неравенства (16) будет дано в II части работы.

(Здесь и в дальнейшем будем считать $B_{n+1,n,l}^2=0$.) Для удобства обозначим $\delta^2=\frac{1}{T^2}$. Пусть $\frac{2}{3}<a<1$ – некоторое число, удовлетворяющее неравенство

$$\frac{(L_{3n}^{(l)})^2}{a^2}\leqslant(1-a)\,\delta^2. \tag{20}$$

Точный выбор числа a будет указан ниже. Теперь выберем наименьший номер q_l так, чтоб имело место

$$B_{1,q_l,l}^2\geqslant a\,(1+\delta^2)\,B_{nl}^2. \tag{21}$$

Оценки членов суммы (19) будут различными при $j\leqslant q_l$ и $j>q_l$. Из (4) имеем

$$\sigma_{pl}\leqslant\frac{\beta_{pl}}{\sigma_{pl}^2}\leqslant\frac{D_{nl}}{B_{1,p,l}^2},$$

поэтому из (20) и (21) получаем для всех $p\geqslant q_l$.

$$\sigma_{pl}^2\leqslant\frac{D_{nl}^2}{B_{1,p,l}^4}\leqslant\frac{(L_{3n}^{(l)})^2}{a^2\,(1+\delta^2)^2}B_{nl}^2=\eta_l\leqslant(1-a)\,\delta^2\,B_{nl}^2. \tag{22}$$

Из (22) и выбора номера q_l следует

$$\begin{aligned}B_{j+1,n,l}^2+\delta^2\,B_{nl}^2&=(1+\delta^2)\,B_{nl}^2-B_{1,j,l}^2\geqslant B_{nl}^2\,(1+\delta^2)-\\&-B_{1,q_l-1,l}^2-\sigma_{q_l l}^2\geqslant B_{nl}^2\,(1+\delta^2)-a\,(1+\delta^2)\,B_{nl}^2-(1-a)\,\delta^2\,B_{nl}^2=\\&=(1-a)\,B_{nl}^2\end{aligned} \tag{23}$$

для всех $j\leqslant q_l$, поэтому

$$\sum_{j=1}^{q_l}\frac{\beta_{jl}}{B_{nl}^3\left(\frac{B_{j+1,n,l}^2}{B_{nl}^2}+\frac{1}{T^2}\right)^{1/2}}\leqslant C_{10}\sum_{j=1}^{q_l}\frac{\beta_{jl}}{B_{nl}^3}. \tag{24}$$

Теперь остается оценить сумму

$$\sum_{j=q_l+1}^{n}\frac{\beta_{jl}}{B_{nl}^3\left(\frac{B_{j+1,n,l}^2}{B_{nl}^2}+\delta^2\right)^{1/2}}=S_l.$$

Из (4) имеем $\beta_{jl}\leqslant\frac{D_{nl}}{B_{1,j,l}^2}\sigma_{jl}^2$, поэтому

$$S_l\leqslant\frac{D_{nl}}{B_{nl}^3}\cdot B_{nl}\sum_{j=q_l+1}^{n}\frac{\sigma_{jl}^2}{B_{1,j,l}^2\,(B_{j+1,n,l}^2+\delta^2\,B_{nl}^2)^{1/2}}=L_{3n}^{(l)}\cdot\tilde S_l\cdot B_{nl}. \tag{25}$$

Исследуем отдельный член суммы $\tilde S_l$. Из (22) имеем

$$\begin{aligned}&B_{j+1,n,l}^2+\delta^2\,B_{nl}^2=(1+\delta^2)\,B_{nl}^2-B_{1,j,l}^2=(1+\delta^2)\,B_{nl}^2-B_{1,j-1,l}^2-\sigma_{jl}^2\geqslant\\&(1+\delta^2)\,B_{nl}^2-\eta_l-B_{1,j-1,l}^2,\end{aligned}$$

$$\frac{\sigma_{jl}^2}{B_{1,j,l}^2\,(B_{j+1,n,l}^2+\delta^2\,B_{nl}^2)^{1/2}}\leqslant\frac{\sigma_{jl}^2}{B_{1,j-1,l}^2[(1+\delta^2)\,B_{nl}^2-\eta_l-B_{1,j-1,el}^2]^{1/2}}.$$

Так как в сумме $\tilde{S}_l$ индекс j возрастает от q_l+1, то $j-1 \geqslant q_l$, а тогда

$$B^2_{1,j-1,l}\,[B^2_{nl}(1+\delta^2)-\eta_l-B^2_{1,j-1,l}]^{\frac{1}{2}}$$

является убывающей функцией по отношению к $B^2_{1,j-1,l}$. Поэтому

$$\frac{\sigma^2_{jl}}{B^2_{1,j,l}\,(B^2_{j+1,n,l}+\delta^2 B^2_n)^{1/2}} < \int\limits_{B^2_{1,j-1,l}}^{B^2_{1,j,l}} \frac{dx}{x\,(b-x)^{1/2}},$$

где для краткости $(1+\delta^2)B^2_{nl}-\eta_l$ обозначено через b. Тогда

$$\tilde{S}_l < \int\limits_{B^2_{1,q_l l}}^{B^2_{nl}} \frac{dx}{x(b-x)^{1/2}}.$$

Делаем замену переменных $b-x=v^2$ и получаем интеграл

$$\int\limits_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{b-v^2},$$

где

$$v_1^2=(1+\delta^2)\,B^2_{nl}-\eta_l-B^2_{nl}=B^2_{nl}\,\delta^2-\eta_l,$$

$$v_2^2=(1+\delta^2)\,B^2_{nl}-\eta_l-B^2_{1,q_l,l}.$$

Подставляя выражение η_l из (22), получаем оценки

$$v_1^2 \geqslant B^2_{nl}\left(\delta^2-\frac{(L^{(l)}_{3n})^2}{a^2(1+\delta^2)}\right) \geqslant B^2_{nl}\,[\delta^2-(1-a)\,\delta^2]=B^2_{nl}\,a\,\delta^2,$$

$$v_2^2 \leqslant B^2_{1,q_l,l}\left(\frac{1}{a}-1\right) \leqslant B^2_{nl}\left(\frac{1-a}{a}\right), \tag{26}$$

$$b \geqslant B^2_{nl}\left[(1+\delta^2)-\frac{(L^{(l)}_{3n})^2}{a^2}\right] \geqslant B^2_{nl}\,[(1+\delta^2)-(1-a)\,\delta^2)] \geqslant B^2_{nl}.$$

Теперь, используя (26), по формуле

$$\int \frac{dv}{b-v^2}=\frac{1}{2\sqrt{b}}\ \ln\ \frac{\sqrt{b}+v}{\sqrt{b}-v},$$

получим

$$\tilde{S}_l \leqslant \frac{1}{B_{nl}}\ln\frac{(\sqrt{1+c}+\sqrt{d})\,(\overline{1+c}-\sqrt{c})}{(\sqrt{1+c}-\sqrt{d})\,(\sqrt{1+c}+\sqrt{c}}=\frac{1}{B_{nl}}\ \ln z, \tag{27}$$

где

$$c=\delta^2-\frac{(L^{(l)}_{3n})^2}{a^2(1+\delta^2)^2}, \qquad d=\frac{1-a}{a}.$$

Ниже покажем, что при надлежащем выборе констант будет $\ln z<\ln C_{11}=C_{12}$, поэтому из (25) и (27) следует $S_l<C_{12}L^{(l)}_{3n}$, а это вместе с (24) и (17) дает

$$|V_n(x)| \leqslant C_{13}\,k^2\,T^2 \sum_{l=1}^{k} L^{(l)}_{3n}. \tag{28}$$

Теперь положим

$$T=\frac{1}{C_{14}k^{\frac{1}{6}}\cdot\left(\sum\limits_{i=1}^{k} L_{3n}^{(i)}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

и из (9) и (28) получим утверждение теоремы 2 с $C_4=\frac{2C_{13}}{C_{14}^2}+C_{14}\cdot C_8$. Нам осталось уточнить выбор числа a, а также указать выбор констант C_{14} и C_4.

Можем считать, что

$$\left(\sum_{i=1}^{k} L_{3n}^{(i)}\right)^{\frac{1}{3}}\leqslant\frac{1}{C_4k^{5/6}} \tag{29}$$

(иначе утверждение (5) тривиальное).

Тогда из (20) получаем следующее условие для a:

$$a\leqslant 1-\frac{1}{C_4^4k^7\left(\frac{2}{3}C_{14}\right)^2}\ .$$

Потребуем $C_4^2\,C_{14}>\frac{2}{8\sqrt{2}}$, тогда $a\leqslant\frac{3}{4}$. Далее, чтобы имело смысл неравенство (21), необходимо $a\,(1+\delta^2)<1$, что принимая во внимание (29) дает

$$a<\frac{1}{1+\frac{C_{14}^2}{k^3C_4^2}}\ .$$

а отсюда, чтоб выполнялось $a\leqslant\frac{3}{4}$, необходимо выполнение условия

$$\frac{C_{14}}{C_4}<1. \tag{30}$$

Исследуем выражение $z=(1+c-d)\left(\frac{\sqrt{1+c}-\sqrt{c}}{\sqrt{1+c}-\sqrt{d}}\right)^2$. Так как $\frac{2}{3}\leqslant a\leqslant\frac{3}{4}$, то $\frac{1}{3}\leqslant$ $\leqslant d\leqslant\frac{1}{2}$. С одной стороны $c=\delta^2-(l_{3n}^i)^2\cdot a^{-2}(1+\delta^2)^{-2}\geqslant\delta^2-(1-a)_i^i\delta^2>0$, а с другой, поскольку имеется (30) и $k\geqslant 2$, то

$$c<\delta^2\leqslant\left(\frac{C_{14}}{C_4}\right)^2\frac{1}{k^3}\leqslant\frac{1}{8}\ .$$

Поэтому

$$z<\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{8}\right)\left(\frac{\sqrt{1+\frac{1}{8}}}{1-\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)^2\leqslant 12\ ,$$

так что $C_{12}=\ln C_{11}=\ln 12$. Окончательно имеем: число a должно быть выбрано в интервале $\frac{2}{3}\leqslant a\leqslant\frac{3}{4}$, а константы C_{14} и $C_4=\frac{2C_{13}}{C_{14}^2}+C_{14}C_8$ должны удовлетворять условия

$$C_4^2\,C_{14}>\frac{3}{8\sqrt{2}}\ ,\qquad C_{14}<C_4\ .$$

Этим завершается доказательство теоремы 2.

Для доказательства теоремы 3 достаточно заметить, что теперь вместо условия (4) надо пользоваться неравенством (1) (например, при получении неравенства $S_l \leqslant \tilde{L}_{3n}^{(l)} \cdot \tilde{S}_l \cdot B_{nl}$ (см. (25)), а также применить, где необходимо, неравенства $\beta_{ij} \leqslant \tilde{\beta}_{ij}$, $L_{3n}^{(l)} \leqslant \tilde{L}_{3n}^{(l)}$.

Приступим к доказательству теоремы 4. Как видно из доказательства теоремы 2, оценка (16) является весьма грубой, отбрасывающей зависимость между компонентами с. в. ξ_i. Поэтому мы возвратимся к формулам (14) и (15). Из них имеем

$$|U_j(x)| \leqslant C_7 \int_{R_k} \left[\sum_{l=1}^{k} \left(\frac{|{}_{j+1}A_{ll}|}{{}_{j+1}\sigma_l \, |{}_{j+1}A|} \right)^{\frac{1}{3}} |y_l| \right]^3 |(\tilde{F}_l - \tilde{\Phi}_j)(dy)| \leqslant$$

$$\leqslant C_7 k^2 \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{B_{nl}^3 \, {}_{j+1}\sigma_l} \frac{|{}_{j+1}A_{ll}|}{|{}_{j+1}A|} \cdot \int_{R_k} |y_l|^3 \, (F_j - \Phi_j)(dy)| \leqslant$$

$$\leqslant C_{15} k^2 \sum_{l=1}^{k} \frac{\beta_{jl} \, |{}_{j+1}A_{ll}|}{B_{nl}^3 \, {}_{j+1}\sigma_l \, |{}_{j+1}A|} . \tag{31}$$

Если обозначить через $\mu_{ik}^{j,n}$ элементы матрицы ${}_jB$, то из определения $\tilde{\rho}_{ik}^{jn}$ (см. обозначение ${}_j\beta$) следует

$$\mu_{ik}^{j,n} = \frac{B_{j,n,i} \, B_{j,n,k}}{B_{ni} \, B_{nk}} \, \tilde{\rho}_{ik}^{j,n} . \tag{32}$$

Из (32) следует

$$|{}_jB| = \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{B_{j,n,i}^2}{B_{ni}^2} \right) |{}_j\beta|$$

и

$$|{}_jB_{mm}| = \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^{k} \frac{B_{j,n,i}^2}{B_{ni}^2} \right) |{}_j\beta_{mm}| ,$$

а отсюда

$$\frac{|{}_jB|}{|{}_jB_{mm}|} = \frac{B_{j,n,m}^2}{B_{nm}^2} \, \frac{|{}_j\beta|}{|{}_j\beta_{mm}|} . \tag{33}$$

Так как $\frac{|{}_j\beta|}{|{}_j\beta_{mm}|} \leqslant 1$, то $\chi_{nm} \leqslant 1$. Поэтому из (16) и (33) вытекает

$$\frac{|{}_{j+1}A_{ll}|}{|{}_{j+1}A|} \leqslant \frac{1}{\dfrac{|{}_{j+1}B|}{|{}_{j+1}B_{ll}|} + \dfrac{\left|\dfrac{1}{T^2} I\right|}{\left|\left(\dfrac{1}{T^2} I\right)_{ll}\right|}} \geqslant \frac{1}{\dfrac{B_{j+1\,n,l}^2}{B_{nl}^2} \, \dfrac{|{}_{j+1}\beta|}{|{}_{j+1}\beta_{ll}|} + \dfrac{1}{T^2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\dfrac{B_{j+1,n,l}^2}{B_{nl}^2} \, \chi_{nl} + \dfrac{1}{T^2}} \leqslant \frac{1}{\chi_{nl}} \, \frac{1}{\dfrac{B_{j+1,n,l}^2}{B_{nl}^2} + \dfrac{1}{T^2}} . \tag{34}$$

Из (31) и (34) имеем

$$|U_j(x)|\leqslant C_{15}k^2\sum_{l=1}^{k}\frac{\beta_{jl}}{\chi_{nl}\left(B_{j+1,n,l}^2+\frac{1}{T^2}B_{nl}^2\right)^{3/2}},$$

а отсюда

$$|V_n(x)|\leqslant\sum_{j=1}^{n}|U_j(x)|\leqslant C_{15}k^2\sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_{jl}}{\chi_{nl}(B_{j+1,n,l}^2+\delta^2B_{nl}^2)^{3/2}},\tag{35}$$

где, как и раньше, обозначено $\delta=\frac{1}{T}$.

Теперь выберем

$$\delta=C_{16}k^{\frac{1}{4}}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\chi_{nl}}L_{3n}^{(l)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

и некоторое число $\frac{2}{3}\leqslant a\leqslant\frac{3}{4}$. Возьмем из суммы (35) одну фиксированную компоненту и оценим сумму

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_{jl}}{(B_{j+1,n,l}^2+\delta^2B_{nl}^2)^{3/2}}.$$

Как и в доказательстве теоремы 2, выберем наименьшее число q_l такое, чтоб было справедливо неравенство (21). Будем также предполагать выполненым (20) (для этого ниже покажем, что для выполнения (20) необходимо $C_5C_{16}>1$). Тогда из (23) имеем

$$\sum_{j=1}^{q_l}\frac{B_{jl}}{(B_{j+1,n,l}^2+\delta^2B_{nl}^2)^{3/2}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{(1-a)^3}}\sum_{j=1}^{q_l}\frac{\beta_{jl}}{B_{nl}^3}=C_{17}\sum_{j=1}^{q_l}\frac{\beta_{jl}}{B_{nl}^3}.\tag{36}$$

Из (4) получаем

$$\sum_{j=q_l+1}^{n}\frac{\beta_{jl}}{(B_{j+1,n,l}^2+\delta^2B_{nl}^2)^{3/2}}\leqslant D_{nl}\sum_{j=q_l+1}^{n}\frac{\sigma_{jl}^2}{B_{1,j,l}^2(B_{j+1,n,l}+\delta^2B_{nl}^2)^{3/2}}=D_{nl}\cdot R_l.\tag{37}$$

Из (22) вытекает

$$\frac{\sigma_{jl}^2}{B_{1,j,l}^2(B_{j+1,n,l}^2+\delta^2B_{nl}^2)^{3/2}}\leqslant\frac{\sigma_{jl}^2}{B_{1,j-1,l}^2[B_{nl}^2(1-\delta^2)-\eta_l-B_{1,j-1,l}^2]^{3/2}}.$$

Обозначив $b=B_{nl}^2(1+\delta^2)-\eta_l$, в знаменателе получим функцию $x(b-x)^{\frac{3}{2}}$, производной которой является функция $(b-x)^{\frac{1}{2}}(b-\frac{5}{2}x)$. Во-первых, $b-x\geqslant0$, так как

$$B_{nl}^2(1+\delta^2)-\eta_l-B_{1,j-1,l}^2\geqslant B_{nl}^2\left(\delta^2-\frac{(L_{3n}^{(l)})^2}{a^3(1+\delta^2)^2}\right)\geqslant B_{nl}^2\left(\delta^2-\frac{(L_{3n}^{(l)})^2}{a^2}\right)\geqslant0.$$

Во-вторых, сомножитель $b-\frac{5}{2}x<0$, так как в сумме (37) $j-1\geqslant q_l$ и из (21) следует

$$B_{nl}^2(1+\delta^2)-\eta_l-\frac{5}{2}B_{1,j-1,l}^2\leqslant B_{nl}^2(1+\delta^2)-\frac{5}{2}a(1+\delta^2)B_{nl}^2=$$

$$=B_{nl}^2(1+\delta^2)\left(1-\frac{5}{2}a\right)\leqslant 0.$$

Поэтому $x(b-x)^{\frac{3}{2}}$ является убывающей функцией и мы получаем

$$R_l<\int\limits_{B_{1,q_l l}^2}^{B_{nl}^2}\frac{dx}{x(b-x)^{3/2}}.$$

Произведя замену $b-x=v^2$, получаем интеграл

$$2\int\limits_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{v^2(b-v^2)}=\frac{2}{b}\int\limits_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{v^2}+\frac{2}{b}\int\limits_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{b-v^2}=\frac{2}{b}\left(\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_2}\right)+$$

$$+\frac{2}{b^{3/2}}\ln\left(\frac{\sqrt{b}+v_2}{\sqrt{b}-v_2}\right)\left(\frac{\sqrt{b}-v_1}{\sqrt{b}+v_1}\right). \tag{38}$$

Из (26) следует

$$\frac{2}{b}\left(\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_2}\right)\leqslant\frac{2}{B_{nl}^3}\left(\frac{1}{\sqrt{a}\,\delta}-\sqrt{\frac{a}{1-a}}\right)\leqslant\frac{2}{\sqrt{a}\,B_{nl}^3\delta}. \tag{39}$$

Так как в формуле (38) выражение под знаком логарифма ограничено константой C_{11} (см. доказательство теоремы 2), то из (37), (38) и (39) следует

$$\sum_{j=q_l+1}^{n}\frac{\beta_{jl}}{(B_{j+1,n,l}^2+\delta^2B_{nl}^2)^{3/2}}\leqslant C_{18}\frac{L_{3n}^{(l)}}{\delta}. \tag{40}$$

Из (35), (36) и (40) вытекает

$$|V_n(x)|\leqslant C_{12}k^2\frac{1}{\delta}\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{\chi_{nl}}L_{3n}^{(l)}=\frac{C_{19}}{C_{16}}k^{\frac{7}{4}}\left(\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{\chi_{nl}}L_{3n}^{(l)}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{41}$$

Из (41) и (9) получаем (7) с $C_5=\frac{C_{19}}{C_{16}}+C_{16}C_8$. Как и раньше, доказательство теоремы заканчивается указанием условий, которые должны удовлетворять свободно выбираемые числа и константы C_{16} и C_5.

Будем считать, что

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\chi_{nl}}L_{3n}^{(i)}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{1}{C_5k^{7/4}}. \tag{42}$$

Число a выберем, как и раньше, в интервале $\frac{2}{3}\leqslant a\leqslant\frac{3}{4}$. Тогда условие (20) будет выполнено, если будет выполнено неравенство

$$\frac{1}{C_5^2k^3a^3(1-a)}\leqslant C_{16}^2.$$

Так как функция $x^2(1-x)$ в интервале $\left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right]$ убывает и $k \geqslant 2$, то для выполнения последнего неравенства достаточно потребовать чтобы

$$C_5 \cdot C_{16} \geqslant 1. \tag{43}$$

Условие $a(1+\delta^2)<1$ дает другое неравенство для констант:

$$\frac{C_{16}}{C_5} \leqslant 1. \tag{44}$$

Итак, окончательно получаем

$$C_5 = \frac{C_{19}}{C_{16}} + C_{16} \cdot C_8,$$

причем C_{16} выбираем так, чтобы выполнялись (43) и (44). Простой расчет показывает, что $C_{16}=0{,}43$, $C_5=18{,}4$ удовлетворяют эти требования.

Для доказательства теоремы 5 достаточно вспомнить замечания к доказательству теоремы 3.

4. Примеры. Интересно сравнить полученные результаты с результатами Бергстрема [4], которые даны в пункте 2 (см. (α)).

Во-первых, во всех теоремах настоящей работы зависимость от размерности k получена лучшей, чем в (α), так как $C(k)=C_0(k)k^{\frac{9}{2}} ln^{\frac{1}{2}} k^2$, $C_0(k)$ ограничена для всех k и $C_0(k)=\frac{4}{\sqrt{3\pi}}+o(1)$ для больших k.

Далее, в правую сторону оценки (α) входят величины $\mu_1^{(j)}$, γ_i, и это позволяет указать те случаи, когда оценка (7) или (8) является лучшей чем (α), несмотря на то, что в этих оценках ляпуновские отношения возведены в степень $\frac{1}{2}$. Следующие два примера наглядно показывают эти случаи. (Для простоты расчетов возьмем двумерные величины, т. е. $k=2$.)

а) Пусть $\xi_i=(\xi_{i1}, \xi_{i2})$ $i=1, 2, \ldots, n$ — независимые с. в. Коэффициент корреляции между компонентами с. в. ξ_i обозначим через ρ_i. Тогда (α) принимает вид

$$\sup_{x\in R_2} |F_{S_n}(x)-\Phi_{S_n}(x)| \leqslant \frac{1}{2} C(2) \left\{ \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_{i1}}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_{i1}^2(1-\rho_i^2)\right]^{\frac{3}{2}}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\left(\max\limits_{j\leqslant n} \frac{\sigma_{j1}}{\sigma_{j2}}\right)^3 \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_{i2}}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_{i1}^2(1-\rho_i^2)\right]^{\frac{3}{2}}} \right\}, \tag{α^*}$$

а (8) дает оценку

$$\sup_{x\in R_2} |F_{S_n}(x)-\Phi_{S_n}(x)| \leqslant C_4(2)\left[\frac{1}{1-\bar{\rho}_n^2}(\tilde{L}_{3n}^{(1)}+L_{3n}^{(2)})\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{8*}$$

где

$$|\tilde{\rho}_n| = \max_{1\leqslant j\leqslant n-1} \left|\frac{1}{B_{j+1,n,1}\,B_{j+1,n,2}}\right| \left|\sum_{k=j+1}^{n} \rho_k\,\sigma_{k1}\,\sigma_{k2}\right| =$$

$$= \max_{2\leqslant j\leqslant n} \left|\frac{1}{B_{j,n,1}\,B_{j,n,2}} \sum_{k=j}^{n} \rho_k\,\sigma_{k1}\,\sigma_{k2}\right|.$$

Возьмем последовательность ξ_i, $i=1, 2, \ldots, n$ с $\sigma_{k1}^2=\sigma_{k2}^2=k$, $\beta_{k1}=\beta_{k2}=k^{\frac{3}{2}}$. Чтобы имело место (1), достаточно выбрать $\gamma_{kj}=\frac{5}{4}$, $k=1, 2, \ldots, n$, $j=1, 2$. Тогда

$$\tilde{L}_{3n}^{(1)}=\tilde{L}_{3n}^{(2)}=\frac{\frac{5}{4}\sum\limits_{j=1}^{n} j^{\frac{3}{2}}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} i\right)^{\frac{3}{2}}} \leqslant \frac{\frac{5}{4}\cdot\frac{2}{5}\,(n+1)^{\frac{5}{2}}}{\left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{2}\,\frac{(n+1)^{\frac{5}{2}}}{\left(n(n-1)\right)^{\frac{3}{2}}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{20}\,\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Теперь выберем $\rho_1=1$, $\rho_2=-1$, $\rho_3=1$, $\rho_4=-1, \ldots, \rho_{n-1}=1$, $\rho_n=0$. Пусть

$$\rho_n^{(k)}=\frac{1}{B_{k,n,1}B_{k,n,2}}\sum_{j=k}^{n}\rho_j\,\sigma_{j1}\,\sigma_{j2}=\frac{\sum\limits_{j=k}^{n}\rho_j\,j}{\sum\limits_{j=k}^{n} j}.$$

Легко видеть, что

$$\rho_n^{(n)}=\rho_n=0, \qquad \rho_n^{(n-1)}=\frac{n-1}{2n-1}, \qquad \rho_n^{(n-2)}=\frac{1}{3n-3}, \qquad \rho_n^{(n-3)}=\frac{n-2}{4n-6}\ldots$$

и

$$|\tilde{\rho}_n|=\max_{2\leqslant j\leqslant n}|\rho_n^{(j)}|=\rho_n^{(n-1)}=\frac{n-1}{2n-1}<\frac{1}{2}.$$

Поэтому (8*) дает

$$\sup_{x\in R_2}|F_{S_n}(x)'-\Phi_{S_n'}(x)|\leqslant C_4(2)\left(\frac{4}{3}\,C_{20}\,\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{2}}=C_{21}\,n^{-\frac{1}{4}},$$

в то время как оценка (α*) является тривиальной, так как

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\beta_{k1}\right)\left[\sum_{k=1}^{n}\sigma_{k1}^2(1-\rho_k^2)\right]^{-\frac{3}{2}}$$

за счет того, что $|\rho_k^2|=1$, $k=1, 2, \ldots, n-1$ расчет в бесконечность, как n.

б) Теперь возьмем последовательность ξ_i, $i=1, 2, \ldots, n$ с

$$\sigma_{i1}^2=i, \qquad \beta_{i1}=i^{\frac{3}{2}}, \qquad \sigma_{i2}^2=\frac{1}{i}, \qquad \beta_{i2}=\frac{1}{i^{3/2}}, \qquad |\rho_i|\leqslant\frac{1}{2}.$$

Тогда ясно, что и $|\tilde{\rho}_n| \leqslant \frac{1}{2}$. Для второй компоненты выполняется (4), поэтому

$$\tilde{L}_3^{(2)} = L_{3n}^{(2)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{3/2}}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right)^{\frac{3}{2}}} \leqslant C_{22} \frac{1}{(\ln n)^{3/2}},$$

а для первой компоненты, как и в примере а), имеем

$$\tilde{L}_{3n}^{1} \leqslant C_{20} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Поэтому (8*) дает оценку

$$\sup_{x \in R_2} |F_{S_n}(x) - \Phi_{S_n}(x)| \leqslant C_{23} \frac{1}{(\ln n)^{3/4}},$$

а оценка (α*) снова тривиальна, так как

$$\frac{\left(\max\limits_{j \leqslant n} \frac{\sigma_{j1}}{\sigma_{j2}}\right)^3 \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_{i2}}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_{i1}^2 (1-\rho_i^2)\right]^{\frac{3}{2}}} \geqslant \frac{n^3 \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{3/2}}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} i\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\sqrt{2}\, n^3 \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{3/2}}}{[n(n-1)]^{3/2}} \geqslant 1.$$

По этим примерам легко сконструировать последовательность и при $k>2$, для которой оценка (α) являлась бы тривиальной, а (8) — нет.

Следует еще заметить, что в двумерном случае лучшие результаты, чем оценка (8) дает оценка, полученная автором в [3].

Автор выражает глубокую благодарность В. В. Сазонову и В. А. Статулявичусу, за внимание к настоящей работе.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
23.IX.1968

Литература

1. V. V. Sazonov, On the Multi-dimensional Central Limit Theorem, Sankhya, ser. A, Vol. 30, part 2.
2. В. М. Золотарев, О близости распределений двух сумм независимых случайных величин, Теор. вероят. и ее прим., Т. IX. вып. 3 (1965).
3. В. Паулаускас, А. Слушнис, Оценка скорости сходимости в двумерной центральной предельной теореме, Лит. матем. сб., VIII, № 3 (1968).
4. H. Bergstrom, On the Central Limit Theorem in the Case of Not Equally Distributed Random Variables, Skand. Aktuarietidskrift, № 1—2 (1949).

APIE KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERTINIMĄ DAUGIAMATĖJE CENTRINĖJE RIBINĖJE TEOREMOJE. I

V. Paulauskas

(Reziumė)

Sakykime, $\xi_i=(\xi_{i1}, \dots, \xi_{ik})$ $i=1, 2, \dots ,n$ – nepriklausomi atsitiktiniai vektoriai su nuline matematine viltimi. Dydžio ξ_{ij} dispersiją žymime

$$\sigma_{ij}^2 \text{ ir } B_{nl}^2=\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ji}^2, \quad S_n=\left(\frac{1}{B_{n1}} \sum_{j=1}^{n} \xi_{j1}, \dots, \frac{1}{B_{nk}} \sum_{j=1}^{n} \xi_{jk}\right).$$

Tarkime, kad S_n' yra atsitiktinis normalinis vektorius su nuline matematine viltimi ir antrųjų momentų matrica, sutampančia su dydžio S_n atitinkama matrica. $F_{S_n}(x)$ ir $\Phi_{S_n}(x)$ žymima atitinkamai, dydžių S_n ir S_n' pasiskirstymo funkcijos.

Darbe gaunami dydžio $\sup\limits_{x\in R_k} | F_{S_n}(x)-\Phi_{S_n}(x) |$ įvertinimai (2), (5), (6), (7) ir (8), apibendrinantieji kai kuriuos V. Sazonovo ir V. Zolotariovo rezultatus.

ON THE ESTIMATION OF THE RATE OF CONVERGENCE IN THE MULTI-DIMENSIONAL CENTRAL LIMIT THEOREM. I

V. Paulauskas

(Summary)

Let $\xi_i=(\xi_{i1}, \dots, \xi_{ik})$, $i=1, 2, \dots, n$ be independent random vectors with means zero σ_{ij}^2 denotes variance of the random variable

$$\xi_{ij} \text{ and } B_{ni}^2=\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ji}^2, \quad S_n=\left(\frac{1}{B_{n1}} \sum_{j=1}^{n} \xi_{j1}, \dots, \frac{1}{B_{nk}} \sum_{j=1}^{n} \xi_{jk}\right).$$

Let S_n' stand for the normal random vector with the same first and second moments as S_n. Let $F_{S_n}(x)$ and $\Phi_{S_n'}(x)$, respectively, denote distribution functions of S_n and S_n'.

In present paper estimations (2), (5), (6), (7) and (8) of the quantity $\sup\limits_{x\in R_k} | F_{S_n}(x)-\Phi_{S_n'}(x)|$ are obtained. These estimations generalize some rezults of V. Sazonov and V. Zolotariov.