IX LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1969

УДК–519.21

ОБ ОДНОМ УСИЛЕНИИ ТЕОРЕМЫ ЛЯПУНОВА

В. Паулаускас

Пусть ξ_k, $k=1, 2, \ldots n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины (с. в.) с функцией распределения (ф. р.) $F(x)$, математическим ожиданием $M\xi_k=0$ и $\sigma^2=\int x^2 dF(x)=1$. Через $N(\mathrm{a}, \delta)$ в дальнейшем будем обозначать нормальную с. в. с математическим ожиданием a и дисперсией δ.

Пусть $F_n(x)$, $\Phi(x)$ и $\tilde{F}_n(x)$ ф. р. с. в. $S_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$, $N(0, 1)$ и $\frac{\xi_k}{\sqrt{n}}$, соответственно, и

$$F^i(x)=\underbrace{F*F*\ \ldots\ *F(x)}_{i}.$$

Пусть $\beta_3=\int |x|^3 dF(x)<\infty$, $\nu_3=\int |x|^3 \, |\, d(F-\Phi)(x)\,|$.

Через $C_0, C_1, C_2, \ldots$ будем обозначать абсолютные константы.

Вопрос о близости распределений двух сумм независимых с. в. рассматривался В. М. Золотаревым в работе [2]. Из его общих результатов следует оценка

$$\sup_x |F_n(x)-\Phi(x)|\leqslant C_0\frac{\nu_3^{\frac{1}{4}}}{n^{\frac{1}{8}}}.$$

Основным содержанием заметки будет доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Для всех n справедлива оценка*

$$\sup_x |F_n(x)-\Phi(x)|\leqslant C_1\frac{\max\left(\nu_3, \nu_3^{\frac{1}{4}}\right)}{\sqrt{n}}. \tag{1}$$

Доказательство. Воспользуемся хорошо известной оценкой (см., например [1])

$$\sup_x |F_n(x)-\Phi(x)|\leqslant 2\sup_x |(F_n-\Phi)*\Phi_T(x)|+C_2\frac{1}{T}, \tag{2}$$

где Φ_T – ф. р. величины $N\left(0, \frac{1}{T^2}\right)$.

К первому члену из (2) применим тождественное разложение

$$(F_n-\Phi)*\Phi_T=(\tilde F_n^n-\Phi_n^n)*\Phi_T=\sum_{i=0}^{n-1}\tilde F_n^i*\Phi_n^{n-i-1}*\Phi_T(\tilde F_n-\Phi_n)=$$

$$=\Big[\sum_{i=1}^{n-1}(\tilde F_n^i-\Phi_n^i)*\Phi_n^{n-i-1}*\Phi_T+n\Phi_n^{n-1}*\Phi_T\Big]*(\tilde F_n-\Phi_n)=$$

$$=\Big[\sum_{i=1}^{n-1}V_i+nV_0\Big]*(\tilde F_n-\Phi_n), \tag{3}$$

где Φ_n обозначает ф. р. с. в. $N\left(0,\frac{1}{n}\right)$, поэтому $\Phi=\Phi_n^n$.

Разберем два случая:

а) $\nu_3<1$.

Методом математической индукции покажем, что справедлива оценка

$$\sup_x|F_n(x)-\Phi(x)|\leqslant C_3\frac{\nu_3^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{n}}. \tag{4}$$

Для этого нам сперва надо доказать справедливость (4) при $n=1$ (что не является очевидным, так как $\nu_3<1$). В выражении $\Phi_T*(F-\Phi)(x)=\int\Phi_T(x-y)\,d(F-\Phi)(y)$ для функции Φ_T применим разложение в ряд Тейлора и, используя тот факт, что первые два момента у ф. р. F и Φ совпадают, получим

$$\sup_x|\Phi_T*(F-\Phi)(x)|=\sup_x\Big|\int\Phi_T(x-y)\,d(F-\Phi)(y)\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{6}\sup_x\Big|\frac{\partial^3\Phi_T(x)}{\partial x^3}\Big|\cdot\int|y|^3|d(F-\Phi)(y)|. \tag{5}$$

Пусть $G(x)$ ф. р. с. в. $N(0,\sigma^2)$. Тогда простой расчет покажет, что

$$\sup_x\Big|\frac{\partial^3G(x)}{\partial x^3}\Big|=C_4\frac{1}{\sigma^3}. \tag{6}$$

Из (2), (5) и (6) вытекает

$$\sup_x|F(x)-\Phi(x)|\leqslant C_5\nu_3T^3+C_2\frac{1}{T}. \tag{7}$$

Положив в (7) $T=\frac{C_6}{\nu_3^{\frac{1}{4}}}$, получаем (4) при $n=1$. Теперь предположим что формула (4) справедлива для всех $i\leqslant n-1$. Покажем, что она справедлива и для n.

Имеем

$$\sup_x|V_i*(\tilde F_n-\Phi_n)(x)|=\sup_x\Big|\int V_i(x-y)\,d(\tilde F_n-\Phi_n)(y)\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{6}\sup_x\Big|\frac{\partial^3V_i(x)}{\partial x^3}\Big|\int|y|^3|d(\tilde F_n-\Phi_n)(y)|=\frac{\nu_3}{6n^{\frac{3}{2}}}\sup_x\Big|\frac{\partial^3V_i(x)}{\partial x^3}\Big|, \tag{8}$$

$$V_i(x)=\int(\tilde F_n^i-\Phi_n^i)(x-y)\,d\Phi_a(y)=\int(\tilde F^i-\Phi_n^i)(x-y)\,\varphi_a(y)\,dy=$$

$$=\int(\tilde F_n^i-\Phi_n^i)(y)\,\varphi_a(x-y)\,dy,$$

где $\Phi_a(y)$ и $\varphi_a(y)$ есть ф. р. и плотность распределения с. в. $N(0, a^2)$ и $a^2 = \frac{n-i-1}{n} + \frac{1}{T^2}$. Используя оценку [1]

$$\int \left| \frac{\partial^3 \varphi_a}{\partial x^3} \right| dx \leqslant C_7 \frac{1}{a^3}, \tag{9}$$

получаем

$$\sup_x \left| \frac{\partial^3 V_i(x)}{\partial x^3} \right| \leqslant \sup_y \left| (\tilde{F}_n^i - \Phi_n^i)(y) \right| \cdot \frac{C_7}{\left(\frac{n-i-1}{n} + \frac{1}{T^2}\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{10}$$

Так как $\tilde{F}_n^i(y) = \tilde{F}_i^i\left(\sqrt{\frac{n}{i}}\, y\right) = F_i\left(\sqrt{\frac{n}{i}}\, y\right)$, то для разности $(F_n^i - \Phi_n^i)(y) = (F_i - \Phi)\left(\sqrt{\frac{n}{i}}\, y\right)$ можно применить индукционную предпосылку, то есть формулу (4). Поэтому из (8) и (10) получаем

$$\sup_x | V_i * (\tilde{F}_n - \Phi_n)(x) | \leqslant \frac{C_8 C_3 \nu_3^{\frac{5}{4}}}{n^{\frac{3}{2}} \sqrt{i} \left(\frac{n-i-1}{n} + \frac{2}{T^2}\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{11}$$

Просуммировав неравенства (11) по i и, используя оценки

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i}\left(\frac{n-i-1}{n} + \frac{1}{T^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{T^3}{\sqrt{n-1}} + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{i}\left(\frac{n-i-1}{n} + \frac{1}{T^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \leqslant \frac{T^3}{\sqrt{n-1}} +$$

$$+ \int_1^{n-1} \frac{dx}{\sqrt{x-1}\left(\frac{n-x-1}{n} + \frac{1}{T^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{T^3}{\sqrt{n-1}} + 2\sqrt{n}\, T \frac{\left(\frac{n-2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{n-2}{n} + \frac{1}{T^2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2} \frac{T^3}{\sqrt{n}} + 2\sqrt{3}\sqrt{n}\, T,$$

получаем

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sup_x | V_i * (\tilde{F}_n - \Phi_n)(x) | \leqslant \frac{C_8 C_3 \nu_3^{\frac{5}{4}}}{n^{\frac{3}{2}}} \left(\sqrt{2} \frac{T^3}{\sqrt{n}} + 2\sqrt{3}\, T \sqrt{n}\right). \tag{12}$$

Аналогично получаем

$$n \cdot \sup_x | V_0 * (\tilde{F}_n - \Phi_n)(x) | \leqslant \frac{C_9 \nu_3}{\sqrt{n}}. \tag{13}$$

Тогда из (2), (3), (12) и (13) вытекает

$$\sup_x | F_n(x) - \Phi(x) | \leqslant \frac{C_8 C_3 \nu_3^{\frac{5}{4}}}{n^{\frac{3}{2}}} \left(\sqrt{2} \frac{T^3}{\sqrt{n}} + 2\sqrt{3}\, T \sqrt{n}\right) +$$

$$+ \frac{C_9 \nu_3}{\sqrt{n}} + \frac{C_3}{T}. \tag{14}$$

Положим $T = \frac{\sqrt{n}}{\nu_3^{\frac{1}{4}} C_{10}}$ и, используя условие $\nu_3 < 1$, получим

$$\sup_x | F_n(x) - \Phi(x) | \leqslant \frac{\nu_3^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{n}} \left(\frac{\sqrt{2} C_8 C_3}{C_{10}^3} + \frac{2\sqrt{3} C_8 C_3}{C_{10}} + C_9 + C_3 C_{10} \right). \tag{15}$$

Теперь остается показать, что константы C_3 и C_{10} можно выбрать так, чтобы имело место неравенство

$$\frac{\sqrt{2}C_8C_3}{C_{10}^3}+\frac{2\sqrt{3}C_8C_3}{C_{10}}+C_9+C_2\cdot C_{10}<C_3 \tag{16}$$

и тогда доказательство будет завершено, поскольку из (15) и (16) будет следовать (4).

(16) преобразуем в неравенство

$$C_3\left[1-\left(\frac{C_8\sqrt{2}}{C_{10}^3}+\frac{2\sqrt{3}C_8}{C_{10}}\right)\right]>C_9+C_2\cdot C_{10}, \tag{17}$$

и теперь, если C_{10} выбрать так, чтобы

$$\frac{C_8\sqrt{2}}{C_{10}^3}+\frac{2\sqrt{3}C_8}{C_{10}}<1,$$

то C_3 всегда можно выбрать таким, чтобы выполнялось (17), а тем самым и (16).

Случай б) $\nu_3\geqslant 1$.

При этом условии методом математической индукции, аналогично случаю а), можно доказать оценку

$$\sup_x|F_n(x)-\Phi(x)|\leqslant C_3\frac{\nu_3}{\sqrt{n}}.$$

Подробного доказательства мы приводить не будем и отметим только те изменения, которые надо внести в доказательство случая а): при доказательстве индукционного базиса ($n=1$) достаточно воспользоваться неравенством $\nu_3^{\frac{1}{4}}\leqslant\nu_3$.

Далее, в (14) первый член будет

$$\frac{C_8C_3\nu_3^3}{n^{\frac{3}{2}}}\left(\sqrt{2}\frac{T^3}{\sqrt{n}}+2\sqrt{3}T\sqrt{n}\right).$$

Полагая $T=\frac{\sqrt{n}}{C_{10}\nu_3}$ и используя неравенство $\frac{1}{\nu_3}\leqslant\nu_3$, получим в (15) правую сторону неравенства

$$\frac{\nu_3}{\sqrt{n}}\left(\frac{\sqrt{2}C_8C_3}{C_{10}^3}+\frac{2\sqrt{3}C_8C_3}{C_{10}}+C_9+C_2\cdot C_{10}\right).$$

Дальнейшие рассуждения по поводу выбора констант C_{10} и C_3 остаются такими же, как и в случае а).

Тем самым теорема доказана.

Замечания. 1. Для более точного подбора константы C_3 можно пользоваться следующей процедурой.

Из доказательства индукционной предпосылки ($n=1$) получаем $\tilde{C}_3=2(C_2)^{\frac{3}{4}}\cdot(2C_8)^{\frac{1}{4}}$. Потом в (16) берем знак равенства и выбираем C_{10} такой, чтобы C_3 была минимальной, т. е.

$$\tilde{\tilde{C}}_3=\min_{x\in A}\frac{(C_9+C_2x)x^3}{x^3-(\sqrt{2}C_8+2\sqrt{3}C_8x^2)},$$

$$A=\left\{x:\frac{\sqrt{2}C_8}{x^3}+\frac{2\sqrt{3}C_8}{x}<1\right\}.$$

Окончательно берем $C_3=\max(\tilde{C}_3,\tilde{\tilde{C}}_3)$.

2. Если $\sigma^2 \neq 1$, то утверждение теоремы можно записать в виде

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant C_3 \frac{\max\left[\frac{\nu_3}{\sigma^3}, \left(\frac{\nu_3}{\sigma^3}\right)^{\frac{1}{4}}\right]}{\sqrt{n}}, \tag{18}$$

где $F_n(x)$ — ф. р. величины $S_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i$.

Доказанная теорема является усилением классической теоремы Ляпунова, которая дает оценку

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant C_{11} \frac{\beta_3}{\sqrt{n}\sigma^3}. \tag{19}$$

(Конечно, опуская сравнение численных значений констант C_3 и C_{11}.)

А именно, если $\frac{\nu_3}{\sigma^3} > 1$, то $\max\left(\frac{\nu_3}{\sigma^3}, \left(\frac{\nu_3}{\sigma^3}\right)^{\frac{1}{4}}\right) = \frac{\nu_3}{\sigma^3} \leqslant \frac{C_{12}\beta_3}{\sigma^3}$ а если $\frac{\nu_3}{\sigma^3}| < 1$,то $\max\left(\frac{\nu_3}{\sigma^3}, \left(\frac{\nu_3}{\sigma^3}\right)^{\frac{1}{4}}\right) = \left(\frac{\nu_3}{\sigma^3}\right)^{\frac{1}{4}} \leqslant 1 \leqslant \frac{\beta_3}{\sigma^3}$, поэтому из (18) следует (19).

Автор выражает благодарность В. А. Статулявичусу за постановку задачи и ценные указания при ее решении*).

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
23.IX.1968

Литература

1. V. V. Sazonov, On the Multi-dimensional Central Limit Theorem, Sankhya, ser. A, Vol. 30, part 2.
2. В. М. Золотарев, О близости распределений двух сумм независимых случайных величин, Теор. вероят. и ее прим., т. IX., вып. 3 (1965).

APIE LIAPUNOVO TEOREMOS SUSTIPRINIMĄ

V. Paulauskas

(*Reziumė*)

Sakykime, ξ_k, $k=1, 2, \ldots n$ — nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su pasiskirstymo funkcija (p. f.) $F(x)$, matematine viltimi $M\xi_k=0$ ir $\sigma^2 = \int x^2 dF(x) = 1$. Tarkime, kad $\Phi(x)$ — normalinio atsitiktinio dydžio su nuline matematine viltimi ir vienetine dispersija p. f., $S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ ir $F_n(x)$ — sumos S_n p. f. Imsime $\beta_3 = \int |x|^3 dF(x) < \infty$ ir $\nu_3 = \int |x|^3 |d(F-\Phi)(x)|$.

Teorema. *Visiems n teisingas įvertinimas:*

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant C \frac{\max(\nu_3, \nu_3^{\frac{1}{4}})}{\sqrt{n}},$$

kur C — absoliutinė konstanta.

---

*) После того, как заметка была сдана в печать, автору удалось, используя другие рассуждения и вычисления на ЭВМ, получить следующую оценку:

$$C_3 \leqslant 2{,}16$$

ON THE REINFORCEMENT OF THE LIAPUNOV THEOREM

V. Paulauskas

(Summary)

Let ξ_k, $k=1, 2, \ldots n$ be a sequence of independent, identically distributed random variables with distribution function (d. f.) $F(x)$, mean $M\xi_k=0$ and $\sigma^2=\int x^2 dF(x)=1$.

Let $\Phi(x)$ be d. f. of the normal random variable with mean zero and variance one, $S_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ and $F_n(x)$ be d. f. of the sum S_n.

We consider $\beta_3=\int |x|^3 dF(x)<\infty$ and $\nu_3=\int |x|^3 |d(F-\Phi)(x)|$.

Theorem. *For all* n

$$\sup_x |F_n(x)-\Phi(x)| \leqslant C\frac{\max(\nu_3, \nu_3^{\frac{1}{4}})}{\sqrt{n}}$$

where C *is an absolute constant.*