IX LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1969

УДК–511

ПРИБЛИЖЕННОЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ζ-ФУНКЦИИ ГЕККЕ ВЕЩЕСТВЕННОГО КВАДРАТИЧНОГО ПОЛЯ

А. Матуляускас

§ 1. Введение

Будем рассматривать вещественное квадратичное числовое поле K с дискриминантом $d>0$ и его расширение до системы идеальных чисел $\mathfrak{Z}$ (см. [9]). Целые идеальные числа будем обозначать буквами $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \eta, \lambda, \mu, \rho, \tau$; сопряженные числа будем отмечать верхними индексами, вполне положительные числа – символом $\succ 0$. Обозначим через $N\alpha$ норму числа α.

В соответствии с разбиением поля K на h классов идеалов, множество идеальных чисел распадается на h классов идеальных чисел.

Пусть $\mathfrak{m}$ – отличный от нуля целый идеал поля K. Вполне положительные единицы поля K, сравнимые с $1 \bmod \mathfrak{m}$ условимся называть единицами $\bmod\ \mathfrak{m}$. Пусть $\eta>1$ – основная единица $\bmod\ \mathfrak{m}$. Характером Гекке первого рода с показателем m называется функция

$$\xi^m(\alpha)=\exp\{2\pi i m w(\alpha)\}, \tag{1.1}$$

где $\alpha\in\mathfrak{Z}$, $\alpha\neq 0$, а

$$w(\alpha)=\frac{1}{2\ln\eta}\ln\left|\frac{\alpha}{\alpha'}\right|. \tag{1.2}$$

Распределим все целые взаимно простые с $\mathfrak{m}$ числа по классам вычетов $\bmod\ \mathfrak{m}$ в узком смысле, относя к одному классу два числа α_1 и $\alpha_2\neq 0$, если α_1 и α_2 принадлежат одному классу идеальных чисел, $[\alpha_1\equiv\alpha_2 \pmod{\mathfrak{m}}$ и $\alpha_1\alpha_2^{-1}\succ 0$. Классы вычетов $\bmod\ \mathfrak{m}$ образуют конечную абелеву группу $\mathfrak{Z}(\mathfrak{m})$. Пусть $\chi(\alpha)$ – групповой характер $\bmod\ \mathfrak{m}$ группы $\mathfrak{Z}(\mathfrak{m})$. Если для каждой единицы ε поля K

$$\chi(\varepsilon)\xi^m(\varepsilon)=1,$$

то функция

$$\Xi\alpha=\chi(\alpha)\,\xi^m(\alpha) \tag{1.3}$$

называется характером Гекке второго рода $\bmod\ \mathfrak{m}$ с показателем m. Характер $\Xi(\alpha)$ считается первообразным или производным характером $\bmod\ \mathfrak{m}$ в зависимости от того, будет ли соответственный групповой характер $\chi(\alpha)$ первообразным или производным $\bmod\ \mathfrak{m}$.

Пусть $\mathfrak{M}$ – некоторое множество идеальных чисел. Условимся значками $*$ и $(\mathfrak{m})$ при знаке суммы

$$\sum_{\alpha\in\mathfrak{M}}{}^{*}, \quad \sum_{\alpha\in\mathfrak{M}}^{(\mathfrak{m})}$$

указывать, что при суммировании из каждой системы ассоциированных в обычном смысле, соответственно mod $\mathfrak{m}$, чисел берется только по одному представителю.

Пусть $s=\sigma+it$ — комплексное переменное, $\Xi(\alpha)$ — первообразный характер Гекке второго рода mod $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{K}$ — фиксированный класс идеальных чисел. Тогда ζ -функция Гекке $\zeta(s, \Xi, \mathfrak{K})$, определяемая при $\sigma>1$ в виде

$$\zeta(s, \Xi, \mathfrak{K}) = \sum_{\alpha\in\mathfrak{K},\, \alpha\neq 0}^{*} \Xi(\alpha)\,|N\alpha|^{-s}, \tag{1.4}$$

является целой функцией и удовлетворяет функциональному уравнению

$$\zeta(s, \Xi, \mathfrak{K}) = W(\xi)\,\psi(s)\,\zeta(1-s, \bar{\Xi}, \mathfrak{K}'), \tag{1.5}$$

где $\mathfrak{K}'=\mathfrak{K}^{-1}\mathfrak{d}\mathfrak{m}$, $\mathfrak{d}$ — дифферента поля K, $\bar{\Xi}$ — характер, сопряженный с Ξ, $|W(\xi)|=1$,

$$\psi(s) = A^{1-2s}\frac{\Gamma(1-s;\,\bar{\xi})}{\Gamma(s;\,\xi)}, \quad A=\frac{1}{\pi}\sqrt{dN\mathfrak{m}}, \tag{1.6}$$

$$\Gamma(s;\,\xi) = \Gamma\left(\frac{s+a_1}{2}-\frac{\pi i m}{2\ln\eta}\right)\Gamma\left(\frac{s+a_2}{2}+\frac{\pi i m}{2\ln\eta}\right),$$

$\bar{\xi}=\xi^{-1}$, $N\mathfrak{m}$ — норма идеала $\mathfrak{m}$, a_1 и a_2 — некоторые числа, равные 0 или 1 и подобранные так, что для всех чисел $\alpha\equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$

$$\chi(\alpha) = (\operatorname{sgn}\alpha)^{a_1}(\operatorname{sgn}\alpha')^{a_2}.$$

Случай производного характера $\Xi(\alpha)$, ввиду соотношения

$$\zeta(s, \Xi, \mathfrak{K}) = \vartheta(s, \Xi_1)\,\zeta(s, \Xi_1, \mathfrak{K}),$$

где Ξ_1 — характер, производящий Ξ,

$$\vartheta(s, \Xi_1) = \prod_{(\lambda)\backslash\mathfrak{m}} \{1-\Xi_1(\lambda)\,|N\lambda|^{-s}\}$$

и произведение распространяется на все простые делители идеала $\mathfrak{m}$, легко сводится к рассмотренному. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать лишь ζ -функции с первообразными характерами.

В критической полосе $0\leqslant\sigma\leqslant 1$ ζ -функцию Гекке можно задать приближенной формулой, представляющей ее в виде суммы частичных сумм рядов (1.4) и (1.5), которыми определяется ζ -функция Гекке в областях $\sigma>1$ и $\sigma<0$ соответственно. Эта формула, имеющая многочисленные приложения в геометрии простых чисел, называется приближенным функциональным уравнением.

Приближенное функциональное уравнение для ζ -функции Гекке мнимого квадратично го поля было получено К. Булотой [2] в 1962 г. Год спустя Чандрасекхаран и Нарасимхан [8] вывели приближенные функциональные уравнения для класса функций, представляемых рядами Дирихле. Недавно этот результат был значительно усилен А. Лавриком ([4], [5]). Он установил новую форму функционального уравнения, из которого вытекают приближенные уравнения с равномерными оценками по основным параметрам для всех функций Дирихле, исключая случай растущих показателей характера для ζ -функции Гекке. Отметим в этой связи работу [6], в которой указано приближенное функциональное уравнение ζ-функции Гекке мнимого квадратичного поля с равномерными оценками по всем аргументам.

В настоящей статье приводится приближенное уравнение ζ-функции Гекке вещественного квадратичного поля с равномерными оценками по основным параметрам при фиксированных d и $N\mathfrak{m}$. Отметим, что оценка остаточного члена в полученном уравнении лучше соответствующей оценки из [8].

Вывод приближенного функционального уравнения построен на тех же принципах, которые лежали в основе данного Харди и Литльвудом доказательства приближенного функционального уравнения ζ-функции Римана и были также использованы К. Булотой в его работе [2]. Перенос этих идей на вещественное квадратичное поле вызывает некоторые затруднения, особенно при оценке остаточных членов. В настоящей статье для преодоления этих затруднений был применен метод, при помощи которого оцениваемые члены можно свести к интегралам, содержащим функцию Макдональда.

§ 2. Вспомогательные леммы

Лемма 1. *Пусть функция $f(u)$ положительна, монотонна и дифференцируема в интервале $0<x_1\leqslant u\leqslant x_2$, $\mathfrak{K}$ — класс идеальных чисел системы $\mathfrak{Z}$. Тогда имеет место равенство*

$$\sum_{\substack{\alpha\in\mathfrak{K},\ \alpha>0\\ x_1\leqslant N\alpha\leqslant x_2}}^{*} f(N\alpha)=A_0\int_{x_1}^{x_2} f(u)\,du+O\left\{\int_{x_1}^{x_2} u^{-\frac{2}{3}}f(u)\,du+x_1^{\frac{1}{3}}f(x_1)+x_2^{\frac{1}{3}}f(x_2)\right\},$$

где A_0 — положительная постоянная, зависящая только от поля K.

Доказательство леммы приведено в статье [7].

Лемма 2. *Пусть q_1, q_2, X — положительные числа, α, β, γ — целые числа поля K. Пусть, далее, $\tau=\alpha j+\beta k+\gamma$, где j и k — целые рациональные числа. Тогда*

$$\sum_{j}\sum_{\substack{k\\ \tau\succ 0,\ N\tau>X}}(N\tau-X)\exp\{-2\pi(q_1\tau+q_2\tau')\}=$$

$$=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\limits_{\omega_1>0}\int\limits_{\substack{\omega_2>0\\ \omega_1\omega_2>X}}(\omega_1\omega_2-X)\exp\{-2\pi(q_1\omega_1+q_2\omega_2)+$$

$$+2\pi i(lx_1+nx_2)\}\,dx_1\,dx_2,$$

где

$$\omega_1=\alpha x_1+\beta x_2+\gamma,\quad \omega_2=\alpha' x_1+\beta' x_2+\gamma'.$$

Эта лемма является незначительным видоизменением одной леммы Фишера ([7] л. 2).

Лемма 3. *Пусть β_1 и β_2 — два целых взаимно простых идеальных числа, α — целое число поля K; b_1, b_2 — базис идеала $(\beta_1\beta_2)$. Число λ идеала (β_2) сравнимо с $\alpha \bmod (\beta_1)$ тогда и только тогда, когда оно имеет вид*

$$\lambda=kb_1+lb_2+\lambda_0,$$

где k и l — целые рациональные числа, а λ_0 — число идеала β_2, зависящее только от класса вычетов по $\bmod (\beta_1)$, к которому принадлежит число α, и $\lambda_0\equiv\alpha \bmod (\beta_1)$.

Доказательство. Так как $(\beta_1, \beta_2)=1$, то система сравнений

$$x \equiv \alpha \bmod (\beta_1), \quad x \equiv 0 \bmod (\beta_2) \tag{2.1}$$

имеет единственное решение по mod (β_1, β_2) ([10] стр. 150). Пусть λ_0 — фиксированное решение системы (2.1). Тогда

$$x = kb_1 + lb_2 + \lambda_0.$$

Доказательство обратного утверждения очевидно.

Во всем дальнейшем мы сохраняем обозначеяя предыдущего параграфа, а также условимся относительно следующих обозначений:

$$L = 4\pi \sqrt{\left|\frac{XN\beta}{dN\mathfrak{m}}\right|}, \quad L_1 = 4\pi \sqrt{\left|\frac{(X+\sqrt{x})\,N\beta}{dN\mathfrak{m}}\right|}, \quad \nu = \frac{2\pi m}{\ln \eta}, \quad V = \sqrt{|4t^2 - \nu^2|}.$$

Лемма 4. *Пусть $X \geqslant 1$, $V \geqslant C > 0$, k — целое рациональное число, a — число, равное 0 или 1. Тогда при $-M < \sigma < M$ равномерно по X, s и ν справедлива оценка*

$$I_a = \int\limits_L^{L_1} z^{2-2s+k} K_{i\nu+a}(z)\,dz \ll \exp\left(-\frac{\pi|\nu|}{2}\right) \frac{L_1^{2-2\sigma+a+k} + L^{2-2\sigma+a+k}}{(1+|2t-\nu|)^a} \times$$
$$\times \ln(e + |2t| + |\nu|),$$

где $K_\nu(z)$ — функция Макдональда порядка ν, M — положительная постоянная.

Доказательство. В силу соотношеия ([1] стр. 213)

$$H_\nu^{(1)}(z) = -\frac{1}{2\pi^2} \exp\left(-\frac{\pi\nu i}{2}\right) \int\limits_{-c-i\infty}^{-c+i\infty} \Gamma(-\nu-u)\,\Gamma(-u)\left(-\frac{1}{2}iz\right)^{\nu+2u} du, \tag{2.2}$$

где c — любое положительное число, большее чем Re ν, а $|\arg(-iz)| < \frac{\pi}{2}$, полагая $u = -c + i(y-\nu)$, имеем

$$I_a = \frac{1}{4\pi} \int\limits_L^{L_1} z^{2-2s+k}\,dz \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Gamma(c-iy)\,\Gamma(c-iy+i\nu) \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{a-2c-i\nu+2iy}}{(c-iy)^a}\,dy. \tag{2.3}$$

Пусть $c = \frac{1}{2}$. Если $|2+a+k-2\sigma| \geqslant \frac{1}{2}$, то перемена порядка интегрирования, что допустимо вследствие абсолютной сходимости внутреннего интеграла, дает

$$I_a = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-iy\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-iy+i\nu\right)\left[L_1^{2+a+k-2s-i\nu+2iy} - L^{2+a+k-2s-i\nu+2iy}\right]}{2^{a-1-i\nu+2iy}\left(\frac{1}{2}-iy\right)^a (2+a+k-2s-i\nu+2iy)}.$$

Отсюда вытекает, что

$$I_a \ll \left[L_1^{2-2\sigma+a+k} + L^{2-2\sigma+a+k}\right] \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left\{-\frac{\pi}{2}\left(|y|+|\nu-y|\right)\right\}dy}{\left(\sqrt{\frac{1}{4}+y^2}\right)^a \sqrt{(2-2\sigma+a+k)^2+(2t+\nu-2y)^2}},$$

так как $\Gamma\left(\frac{1}{2}-iy\right) \ll \exp\left(-\frac{\pi}{2}|y|\right)$.

Пусть $a=1$. Разобьем контур интегрирования на части

$$(-\infty, p_{-1}],\quad (p_{-1}, p_0],\ (p_0, p_1],\ (p_1, \infty),\ \text{где}\ p_j=\frac{1}{4}\,(2t+\nu+2j\,|\,2t+\nu\,|)$$

$(j=-1,\ 0,\ 1)$. Оценка полученных интегралов приводит нас к соотношению

$$I_1 \ll \exp\left(-\frac{\pi|\nu|}{2}\right)\frac{L_1^{3-2\sigma+k}+L^{3-2\sigma+k}}{1+|2t+\nu|}\ln(e+|2t+\nu|). \tag{2.4}$$

При a=0 доказательство протекает аналогично, только на этот раз интервал $(-\infty,\ \infty)$ разбивается на следующие подынтервалы:

$$\left(-\infty,\ \frac{1}{2}\{\nu-|\nu|\}\right],\ \left(\frac{1}{2}\{\nu-|\nu|\},\ \frac{1}{2}\{\nu+|\nu|\}\right],\ \left(\frac{1}{2}\{\nu+|\nu|\},\ \infty\right).$$

Оценивая соответствующие части интергала I_0, получаем

$$I_0 \ll \exp\left(-\frac{\pi|\nu|}{2}\right)(L_1^{2-2\sigma+k}+L^{2-2\sigma+k})\ln^{*}(e+|2t|+|\nu|). \tag{2.5}$$

Пусть теперь $|2+a+k-2\sigma|<\frac{1}{2}$. Запишем интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-iy\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-iy+i\nu\right)}{\left(\frac{1}{2}-iy\right)^a}\left(\frac{z}{2}\right)^{a-1-i\nu+2iy}dy$$

в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}=\int\limits_{\mathfrak{B}}+\int\limits_{\frac{1}{2}(2t+\nu-1)}^{\frac{1}{2}(2t+\nu+1)}=I'+I'',$$

где $\mathfrak{B}$ – путь, состоящий из лучей $\left(-\infty,\ \frac{1}{2}\{2t+\nu-1\}\right]$ и $\left(\frac{1}{2}\{2t+\nu+1\},\ \infty\right)$, и заметим, что на пути $\mathfrak{B}$ имеет место соотношение

$$|2+a+k-2s-i\nu+2iy|\geqslant\frac{1}{2}.$$

Так как

$$\{2t+\nu-2y+\operatorname{sgn}(2t+\nu-2y)\}^2\geqslant(2t+\nu-2y)^2,$$

то

$$I' \ll \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}-iy\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-iy+i\nu\right)\right|}{(\sqrt{1+y^2})^a\sqrt{1+(2t+\nu-2y)^2}}\,dy.$$

Отсюда, в силу (2.4) и (2.5), выводим:

$$I_a \ll \exp\left(-\frac{\pi|\nu|}{2}\right)\frac{L_1^{2-2\sigma+a+k}+L^{2-2\sigma+a+k}}{(1+|2t+\nu|)^a}\ln(e+|2t|+|\nu|), \tag{2.6}$$

ибо оценка интеграла I'' поглощается оценкой (2.6).

Лемма 5. *Пусть N — натуральное число, $X \geqslant 1$, $V \geqslant C > 0$. Тогда в интервале $\sigma > \frac{3}{4} - N$ имеет место соотношение*

$$I_3 = \int_L^{L_1} z\,dz \int_z^{\infty} w^{1-2s-2N} K_{iv}(w)\,dw \ll \exp\left(-\frac{\pi|\nu|}{2}\right) X^{-\frac{1}{2}} L^{3-2\sigma-2N} \times$$

$$\times \ln(e+|2t|+|\nu|),$$

причем оценка остаточного члена равномерна относительно X s и ν.

Доказательство. Из (2.2) после замены z на iw имеем

$$I_2 = \frac{1}{4\pi i} \int_L^{L_1} z\,dz \int_z^{\infty} w^{1-2s-2N}\,dw \int_{-c-i\infty}^{-c+i\infty} \Gamma(-i\nu-u)\,\Gamma(-u)\left(\frac{w}{2}\right)^{\nu+2u} du.$$

Полагая $c = \frac{1}{2}$ и меняя порядок интегрирования, находим

$$I_2 = -\frac{1}{4\pi} \int_L^{L_1} z^{2-2s-i\nu-2N}\,dz \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-iy\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-iy+\nu i\right) z^{2iy}\,dy}{2^{-1-i\nu+2iy}(1-2s-i\nu-2N+2iy)}. \tag{2.7}$$

Нетрудно видеть, что для оценки внутреннего интеграла из (2.7) достаточно повторить те же самые рассуждения, которые были проведены в предыдущей лемме при доказательстве соотношения (2.5) и мы получим

$$I_2 \ll \exp\left(-\frac{\pi|\nu|}{2}\right) \ln(e+|2t|+|\nu|) \int_L^{L_1} z^{2-2\sigma-2N}\,dz.$$

Отсюда и из оценки

$$\int_L^{L_1} z^{2-2\sigma-2N}\,dz \ll X^{-\frac{1}{2}} L^{3-2\sigma-2N}$$

вытекает утверждение леммы.

Лемма 6. *При обозначениях леммы 5 и $\sigma < \frac{1}{4} + N$ равномерно по X, s и ν справедлива оценка*

$$\int_L^{L_1} z\,dz \int_0^{z} w^{1-2s+2N} K_{i\nu}(w)\,dw \ll \exp\left(-\frac{\pi|\nu|}{2}\right) X^{-\frac{1}{2}} L_1^{3-2\sigma+2N} \times$$

$$+\ln(e+|2t|+|\nu|).$$

Доказательство проводится так же, как доказательство леммы 5 и поэтому мы его проводить не будем.

Лемма 7. *Пусть* $X \geqslant 1$, $V \geqslant C > 0$, N — *натуральное число. Тогда*

$$I_3 = \int\limits_L^{L_1} z\,dz \int\limits_z^{\infty \exp \frac{\pi i}{4}} w^{1-2s-2N} K_{i\nu}(-iw)\,dw \ll L^{3-2\sigma-2N} \times$$

$$\times \{ X^{-\frac{1}{2}} \ln(e + |2t+\nu|) + (1+|2t+\nu|)^{-1} \} \tag{2.8}$$

равномерно по X, s *и* ν *в интервале* $\sigma > \frac{9}{4} - N$.

Доказательство. Из формулы (2.2) при $z = w$ следует, что

$$I_3 = \frac{1}{4\pi i} \left\{ \int\limits_{L_1}^{\infty \exp \frac{\pi i}{4}} (w^2 - L_1^2) - \int\limits_{L}^{\infty \exp \frac{\pi i}{4}} (w^2 - L^2) \right\} w^{1-2s-2N}\,dw \times$$

$$\times \int\limits_{-c-i\infty}^{-c+i\infty} \Gamma(-i\nu - u)\,\Gamma(-u) \left(-\frac{iw}{2}\right)^{i\nu+2u} du.$$

Положим $0 < c < \frac{1}{2}$ и воспользуемся теоремой Валле-Пуссена о перемене порядка интегрирования ([1] стр. 731). Получим

$$I_3 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-c-i\infty}^{-c+i\infty} \Gamma(-i\nu - u)\,\Gamma(-u) \times$$

$$\times \frac{L_1^{4-2s+i\nu-2N+2u} - L^{4-2s+i\nu-2N+2u}}{(4-2s+i\nu-2N+2u)\,(2-2s+i\nu-2N+2u)} \left(\frac{1}{2i}\right)^{i\nu+2u} du.$$

Отсюда, заменяя путь интегрирования $(-c-i\infty, -c+i\infty)$ на путь $\left(-\frac{1}{2} - i\infty, -\frac{1}{2} + i\infty\right)$ и проводя замену

$$u = -\frac{1}{2} + i(y - \nu),$$

находим:

$$I_3 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Gamma\left(\frac{1}{2} - iy\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - iy + i\nu\right) \times$$

$$\times \frac{L_1^{3-2s-i\nu-2N+2iy} - L^{3-2s-i\nu-2N+2iy}}{(3-2s-i\nu-2N+2iy)\,(1-2s-i\nu-2N+2iy)} \left(\frac{1}{2i}\right)^{-1-i\nu+2iy} dy.$$

Обозначим

$$I_3 = I_3' + I_3'',$$

где I_3' и I_3'' означают части интеграла по контурам $\left(\frac{1}{2}\{2t+\nu-|2t+\nu|\}, \frac{1}{2}\{2t+\nu+|2t+\nu|\}\right]$ и $\left(-\infty, \frac{1}{2}\{2t+\nu-|2t+\nu|\}\right] \bigcup \left(\frac{1}{2}\{2t+\nu+|2t+\nu|\}, \infty\right)$

соответственно. Оценивая интеграл I_3'' аналогично тому, как при доказательстве соотношения (2.4), получаем

$$I_3'' \ll L^{3-2\sigma-2N}(1+|2t+\nu|)^{-1}. \tag{2.9}$$

Так как

$$\int_{L}^{L_1} z^{2-2s-i\nu-2N+2iy}\,dz \ll X^{-\frac{1}{2}} L^{3-2\sigma-2N},$$

то, учитывая известные оценки для Γ — функции, имеем

$$I_3' \leqslant X^{-\frac{1}{2}} L^{3-2\sigma-2N} \int\limits_{\frac{1}{2}(2t+\nu-|2t+\nu|)}^{\frac{1}{2}(2t+\nu+|2t+\nu|)} \frac{dy}{\sqrt{1+(2t+\nu-2y)^2}}.$$

Следовательно,

$$I_3' \ll X^{-\frac{1}{2}} L^{3-2\sigma-2N} \ln(e+|2t+\nu|). \tag{2.10}$$

Соединение (2.9) и (2.10) дает формулу (2.8).

Лемма 8. *При обозначениях леммы 4 в интервале $-M<\sigma<M$ равномерно по X, s и ν выполняется оценка*

$$\int_{L}^{L_1} z^{2-2s+a+k} J_{i\nu+1+a}(z)\,dz \ll \exp\frac{\pi|\nu|}{2}\,\frac{L_1^{3-2\sigma+a+k}+L^{3-2\sigma+a+k}}{1+|2t+\nu|}\ln(e+|2t+\nu|),$$

где $J_\nu^{(z)}$ — бесселева функция порядка ν.

Лемма 9. *В обозначениях леммы 5 при $\sigma<\frac{3}{4}+N$ имеем*

$$\int_{L}^{L_1} z\,dz \int_{0}^{z} w^{1-2s+2N} J_{i\nu+1}(w)\,dw \ll \exp\frac{\pi|\nu|}{2}\, X^{-\frac{1}{2}} L_1^{5-2\sigma+2N}\,\frac{\ln(e+|2t+\nu|)}{1+|2t+\nu|},$$

причем оценка равномерна относительно X, s и ν.

Доказательства этих двух лемм можно найти в работе [3], где имеются аналогичные леммы 1 и 2.

§ 3. Вывод фундаментального тождества

В этом параграфе мы установим равенство, которому удовлетворяет комбинация двух ζ-функций Гекке.

Теорема 1. *Пусть $\zeta(s, \Xi, \mathfrak{K})$ — дзета-функция Гекке класса идеальных чисел $\mathfrak{K}$ вещественного квадратичного поля $K(d)$ с характером Ξ модуля $\mathfrak{m}$ показателя m, $s=\sigma+it$, $X\geqslant 1$, $V\geqslant 1$, $\nu=\frac{2\pi m}{\ln\eta}$, $\eta>1$ — основная единица*

$\bmod \mathfrak{m}$, $|4t^2-\nu^2|=16\pi^2\frac{XY}{dN\mathfrak{m}}$, *M — положительная постоянная. Тогда в промежутке* $-M<\sigma<M$ *имеет место тождество*

$$F(X,\ Y,\ s-1)-XF(X,\ Y,\ s)=\Phi^*(s,\ X)+R_2(s,\ X)-R_1(s,\ X), \tag{3.1}$$

где

$$\mathbf{F}(\mathbf{X},\ \mathbf{Y},\ s)=\zeta(s,\ \Xi,\ \mathfrak{K})-\sum_{\substack{\alpha\in\mathfrak{K},\ \alpha\neq 0\\ |N\alpha|<X}}^{*}\Xi(\alpha)\,|N\alpha|^{-s}-$$

$$-\psi(s)\sum_{\substack{\beta\in\mathfrak{K}',\ \beta\neq 0\\ |N\beta|<Y}}^{*}\bar{\Xi}(\beta)\,|N\beta|^{s-1}, \tag{3.2}$$

$\psi(s)$ — *множитель из функционального уравнения* (1.5),

$$\Phi^*(s,\ X)=\frac{E(\Xi)\,X^{1-s}}{(s-1)(s-2)\sqrt{dN\mathfrak{m}}},\quad E(\Xi)=\begin{cases}1, & \text{если } \Xi-\text{главный характер,}\\ 0, & \text{в противном случае,}\end{cases} \tag{3.3}$$

$$R_1(s,\ X)=\varkappa(s)\sum_{\substack{k=-2\\ k\neq 0}}^{2}A_k(\nu)\sum_{\substack{\beta\in\mathfrak{K}',\ \beta\neq 0\\ |N\beta|\geqslant Y}}^{*}\bar{\Xi}(\beta)\,|N\beta|^{s-2}\times$$

$$\times\int_{L}^{\infty\exp\left\{\frac{\pi i}{8}[1+(-1)^k]\operatorname{sgn}k\right\}}\Psi(v)\,dv,$$

$$R_2(s,X)=\varkappa(s)\sum_{\substack{k=-2\\ k\neq 0}}^{2}A_k(\nu)\sum_{\substack{\beta\in\mathfrak{K}',\ \beta\neq 0\\ |N\beta|<Y}}^{*}\bar{\Xi}(\beta)\,|N\beta|^{s-2}\int_{0}^{L}\Psi(v)\,dv,$$

причем интеграл в $R_2(s,\ X)$ *при* $\sigma\geqslant 1$ *считается обобщенным, т. е. не имеющим особенностей в окресности нуля* (см. [7] (3.3)), $\varkappa(s)\ll 1$,

$$A_k(\nu)=\exp\left\{\pi\nu\,\frac{(-1)^k-1}{4}\operatorname{sgn}k\right\}(-1)^{\frac{a_1}{2}(1+\operatorname{sgn}k)}(-1)^{\frac{a_2}{2}[(-1)^k+\operatorname{sgn}k]},$$

$$\Psi(v)=(v^2-L^2)\,v^{1-2s}\,K_{i\nu}\left\{v\exp\left[-\pi i\,\frac{(-1)^k+1}{4}\operatorname{sgn}k\right]\right\},$$

$K_{i\nu}(z)$ — *функция Макдональда,* $L=4\pi\sqrt{\left|\frac{XN\beta}{dN\mathfrak{m}}\right|}$, *а* a_1, a_2, Ξ *и* $\mathfrak{K}'$ *определены в* (1.5).

Доказательство. Для удобства рассуждений будем в дальнейшем предполагать, что норма основной единицы поля отрицательна. Выберем из каждой системы ассоциированных чисел класса $\mathfrak{K}$ по одному представителю $\alpha\succ 0$ и образуем функцию

$$\Phi(s)=\sum_{\substack{\alpha\in\mathfrak{K},\ \alpha\succ 0\\ N\alpha>X}}^{*}(N\alpha-X)\,N\alpha^{-s}\,\Xi(\alpha). \tag{3.4}$$

Пусть $e(\mathfrak{m})$ — индекс подгруппы единиц $\bmod\mathfrak{m}$ в группе всех единиц поля K. Тогда

$$\Phi(s)=\frac{1}{e(\mathfrak{m})}\sum_{\substack{\alpha\in\mathfrak{K}\ \alpha\succ 0\\ N\alpha>X}}^{(\mathfrak{m})}(N\alpha-X)\,N\alpha^{-s}\,\Xi(\alpha).$$

Функция $\Phi(s)$ является регулярной во всей плоскости, за исключением случая главного характера, когда она имеет простые полюсы в точках $s=1$ и $s=2$.

Будем считать временно, что s действительно и $s>2$. Выберем из класса $\mathfrak{K}^{-1}$ целое число $\gamma \succ 0$ так, чтобы $(\gamma, \mathfrak{m})=1$ ([10] стр. 193). Когда α будет пробегать все неассоциированные числа класса $\mathfrak{K}$, $\tau=\alpha\gamma$ пробежит все неассоциированные числа поля, кратные γ. Отсюда, учитывая (1.1) и (1.2), получаем

$$\Phi(s) = \frac{N\gamma^{s-1}}{e(\mathfrak{m})\,\Xi(\gamma)} \sum_{\substack{(\gamma)\backslash\tau\succ 0\\ N\tau>XN\gamma}}^{(\mathfrak{m})} (N\tau - XN\gamma)\, N\tau^{-s}\,\chi(\tau)\exp\left\{ i\nu\ln\frac{\tau}{\tau'} \right\}.$$

Теперь с помощью формулы

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty x^{s-1}\exp(-x)\,dx \qquad (\operatorname{Re} s>0)$$

находим

$$\Phi(s) = \frac{(2\pi)^{2s}\, N\gamma^{s-1}}{e(\mathfrak{m})\,\Xi(\gamma)\;\Gamma\left(s+\frac{i\nu}{2}\right)\Gamma\left(s-\frac{i\nu}{2}\right)} \sum_{\substack{(\gamma)\backslash\tau\succ 0\\ N\tau>XN\gamma}}^{(\mathfrak{m})} (N\tau - XN\gamma)\, N\tau^{-s}\,\chi(\tau)\times$$

$$\times\int_0^\infty\int_0^\infty z_1^{s+\frac{i\nu}{2}-1} z_2^{s-\frac{i\nu}{2}-1}\exp\left\{-2\pi(\tau z_1+\tau' z_2)\right\} dz_1\,dz_2.$$

Положим $z_1=y\eta^w$, $z_2=y\eta^{-w}$. Тогда

$$\Phi(s)= -\frac{(2\pi)^{2s}\, N\gamma^{s-1}\, 2\ln\eta}{e(\mathfrak{m})\,\Xi(\gamma)\,\Gamma\left(s+\frac{i\nu}{2}\right)\Gamma\left(s-\frac{i\nu}{2}\right)} \sum_{\substack{(\gamma)\backslash\tau\succ 0\\ N\tau>XN\gamma}}^{(\mathfrak{m})} (N\tau - XN\gamma)\, N\tau^{-s}\,\chi(\tau)\times$$

$$\times\int_{-\infty}^\infty \exp\left\{-2\pi i m w\right\} dw \int_0^\infty y^{2s-1}\exp\left\{-2\pi y(\tau\eta^w+\tau'\eta^{-w})\right\} dy.$$

Если обозначить через $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{N\mathfrak{m}}$ полную систему вычетов по $\operatorname{mod}\ \mathfrak{m}$, то функцию $\Phi(s)$ можно записать так

$$\Phi(s) = \sum_{\tau_j \bmod \mathfrak{m}} \Phi_j(s),$$

где

$$\Phi_j(s) = -\frac{2(2\pi)^{2s}\, N\gamma^{s-1}\ln\eta}{e(\mathfrak{m})\,\Xi(\gamma)\,\Gamma\left(s+\frac{i\nu}{2}\right)\Gamma\left(s-\frac{i\nu}{2}\right)} \sum_{\substack{(\gamma)\backslash\tau\succ 0\\ N\tau>XN\gamma,\ \tau\equiv\tau_j\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{m})}}^{(\mathfrak{m})} \chi(\tau)\,(N\tau - XN\gamma)\times$$

$$\times\int_{-\infty}^\infty \exp\left\{-2\pi i m w\right\} dw \int_0^\infty y^{2s-1}\exp\left\{-2\pi y(\tau\eta^w+\tau'\eta^{-w})\right\} dy.$$

Заметим, что заставляя в выражении $\tau\,\eta^k k$ пробегать все целые рациональные числа, мы получим все ассоциированные с $\tau \bmod \mathfrak{m}$ числа точно один раз. Следовательно,

$$\Phi_j(s) = -\frac{2(2\pi)^{2s} N\gamma^{s-1}\chi(\tau_j)\ln\eta}{e(\mathfrak{m})\,\Xi(\gamma)\,\Gamma\left(s+\frac{i\nu}{2}\right)\Gamma\left(s-\frac{i\nu}{2}\right)} \sum_{\substack{(\gamma)/\tau\succ 0 \\ N\tau > XN\gamma,\ \tau\equiv\tau_j \pmod{\mathfrak{m}}}} (N\tau - XN\gamma)\times$$

$$\times\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-2\pi i m w\right\} dw \int_0^\infty y^{2s-1}\exp\left\{-2\pi y(\tau\eta^w+\tau'\eta^{-w})\right\} dy.$$

Отсюда, в силу леммы 3, следует, что

$$\Phi_j(s) = -\frac{2(2\pi)^{2s} N\gamma^{s-1}\chi(\tau_j)\ln\eta}{e(\mathfrak{m})\,\Xi(\gamma)\,\Gamma\left(s+\frac{i\nu}{2}\right)\Gamma\left(s-\frac{i\nu}{2}\right)}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-2\pi i m w\right\} dw\times$$

$$\times\sum_{\substack{k=-\infty \\ \rho_{kl}\succ 0,\ N\rho_{kl}>XN\gamma}}^{\infty}\ \sum_{l=-\infty}^{\infty}(N\rho_{kl}-XN\gamma)\int_0^\infty y^{2s-1}\exp\left\{-2\pi y(\rho_{kl}\eta^w+\rho'_{kl}\eta^{-w})\right\}dy, \quad (3.6)$$

где b_1, b_2 — базис идеала $(\gamma)\mathfrak{m}$, а $\rho_{kl}=\tau_j+kb_1+lb_2$.

Применим теперь к (3.6) лемму 2. Получим

$$\Phi_j(s) = -\frac{2(2\pi)^{2s} N\gamma^{s-1}\chi(\tau_j)\ln\eta}{e(\mathfrak{m})\,\Xi(\gamma)\,\Gamma\left(s+\frac{i\nu}{2}\right)\Gamma\left(s-\frac{i\nu}{2}\right)}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-2\pi i m w\right\} dw\times$$

$$\times\sum_{k=-\infty}^{\infty}\ \sum_{l=-\infty}^{\infty}\int_0^\infty y^{2s-1}dy \int\int_{\substack{\omega_1>0\ \ \omega_2>0 \\ \omega_1\omega_2>XN\gamma}} (\omega_1\omega_2 - XN\gamma)\times$$

$$\times\exp\left\{-2\pi y(\omega_1\eta^w+\omega_2\eta^{-w})+2\pi i(kx_1+lx_2)\right\}dx_1\,dx_2, \quad (3.7)$$

где положено

$$\omega_1=\tau_j+x_1b_1+x_2b_2,\quad \omega_2=\tau'_j+x_1b'_1+x_2b'_2.$$

Пусть дифферента поля K определяется идеальным числом $\delta\succ 0$, а идеал $\mathfrak{m}$ — числом $\mu\succ 0$. Тогда, на основании формулы

$$S(b_j d_k)=\begin{cases}1, & \text{при } j=k,\\ 0, & \text{при } j\neq k,\end{cases}$$

где $S(\alpha)$ — след числа α; b_1, b_2 — базис идеала $(\mu\gamma)$; d_1, d_2 — базис идеала $\left(\frac{1}{\mu\gamma\delta}\right)$, заключаем, что каждое число q идеала $\left(\frac{1}{\mu\gamma\delta}\right)$ имеет вид

$$q=\frac{1}{\Delta}(-kb'_2+lb'_1),$$

где $\Delta=b_1b_2'-b_2b_1'$, k и l – целые рациональные числа. Далее, применяя подстановку

$$\tau_j+x_1b_1+x_2b_2=r\eta^{\Theta},$$
$$\tau_j'+x_1b_1'+x_2b_2'=r\eta^{-\Theta},$$

имеем

$$kx_1+lx_2=\frac{r}{\Delta}\left[\eta^{w}(kb_2'-lb_1')+\eta^{-w}(-kb_2+lb_1)\right]-S\left\{\frac{\tau_j}{\Delta}(b_2'l-b_1'k)\right\},$$

а это, в сочетании с (3.7), приводит к тому, что

$$\Phi_j(s)=\frac{4(2\pi)^{2s}N\gamma^{s-1}\chi(\tau_j)\ln^2\eta}{e(\mathfrak{m})\Delta\Xi(\gamma)\Gamma\left(s+\frac{iv}{2}\right)\Gamma\left(s-\frac{iv}{2}\right)}\sum_{\left(\frac{1}{\mu\gamma\delta}\right)\setminus q}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-2\pi imw\right\}dw\times$$
$$\times\int_0^{\infty}y^{2s-1}dy\int_{r>\sqrt{XN\gamma}}r(r^2-XN\gamma)\,dr\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-2\pi yr(\eta^{w+\Theta}+\eta^{-w-\Theta})+\right.$$
$$\left.+2\pi i\left[r(\eta^{\Theta}q+\eta^{-\Theta}q')-S(\tau_jq)\right]\right\}d\Theta. \tag{3.8}$$

Полагая здесь $q=0$, мы получим

$$\Phi_{j0}(s)=\frac{4(2\pi)^{2s}N\gamma^{s-1}\chi(\tau_j)\ln^2\eta}{\Delta\Xi(\gamma)\Gamma\left(s+\frac{iv}{2}\right)\Gamma\left(s-\frac{iv}{2}\right)}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-2\pi imw\right\}dw\int_0^{\infty}y^{2s-1}dy\times$$
$$\times\int_{r>\sqrt{XN\gamma}}r(r^2-XN\gamma)\,dr\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-2\pi yr(\eta^{w+\Theta}+\eta^{-w-\Theta})\right\}d\Theta.$$

Отсюда, в силу теоремы Валле–Пуссена о перестановке порядка интегрирования, выводим

$$\Phi_{j0}(s)=\frac{4(2\pi)^{2s}N\gamma^{s-1}\chi(\tau_j)\ln^2\eta}{\Delta\Xi(\gamma)\Gamma\left(s+\frac{iv}{2}\right)\Gamma\left(s-\frac{iv}{2}\right)}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-2\pi imw\right\}dw\times$$
$$\times\int_{r>\sqrt{XN\gamma}}r(r^2-XN\gamma)\,dr\int_0^{\infty}y^{2s-1}dy\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-2\pi yr(\eta^{w+\Theta}+\eta^{-w-\Theta})\right\}d\Theta.$$

Произведем замену переменных

$$y\eta^{\Theta}=z_1,\quad y\eta^{-\Theta}=z_2. \tag{3.9}$$

После некоторых сокращений получим

$$\Phi_{j0}(s) = -\frac{2N\gamma\cdot\chi(\tau_j)\,\Gamma^2(s)\,X^{2-s}\ln\eta}{\Delta\Xi(\gamma)\,\Gamma\left(s+\frac{i\nu}{2}\right)\Gamma\left(s-\frac{i\nu}{2}\right)(s-1)(s-2)}\,(1-|\operatorname{sgn} m|), \qquad (3.10)$$

так как

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-2\pi i m w\right\} dw = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad m=0, \\ 0, & \text{если} \quad m\neq 0. \end{cases}$$

Суммируя выражения $\Phi_{j0}(s)$ по полной системе вычетов mod $\mathfrak{m}$ и учитывая соотношение

$$\sum_{\tau_j \bmod \mathfrak{m}} \chi(\tau_j) = \begin{cases} \varphi(\mathfrak{m}), & \text{если } \chi \text{ — главный характер}, \\ 0 & \text{в других случаях} \end{cases}$$

будем иметь

$$\sum_{\tau_j \bmod \mathfrak{m}} \Phi_{j0}(s) = -\frac{X^{2-s}E(\Xi)\,\varphi(\mathfrak{m})\ln\eta}{(s-1)(s-2)\sqrt{d}\,N\mathfrak{m}},$$

где φ — функция Эйлера, а $E(\Xi)$ определено в (3.3).

Из (3.8) и (3.10) следует, что

$$\Phi_j(s) - \Phi_{j0}(s) = \frac{4(2\pi)^{2s}N\gamma^{s-1}\chi(\tau_j)\ln^2\eta}{e(\mathfrak{m})\,\Delta\Xi(\gamma)\,\Gamma\left(s+\frac{i\nu}{2}\right)\Gamma\left(s-\frac{i\nu}{2}\right)} \sum_{\left(\frac{1}{\mu\gamma\delta}\right)\setminus q\neq 0} \times$$

$$\times \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-2\pi i m w\right\} dw \int_0^\infty y^{2s-1}\,dy \int_{r>\sqrt{XN\gamma}} r\,(r^2 - XN\gamma)\,dr \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-2\pi y r\,(\eta^{w+\Theta}+\eta^{-w-\Theta}) + 2\pi i\,[r\,(\eta^{\Theta}q + \eta^{-\Theta}q') -\right.$$

$$\left. - S(\tau_j\,q)]\right\} d\Theta.$$

Рассмотрим это выражение. Легко видеть, что

$$\exp\left\{2\pi i\,S(\tau_j\,q\,\eta^k)\right\} = \exp\left\{S(\tau_j\,q)\right\},$$

где

$$\tau_j \equiv 0 \bmod (\gamma).$$

Полагая

$$r\eta^{\Theta} = x_1, \quad r\eta^{-\Theta} = x_2,$$

найдем

$$\Phi_j(s)-\Phi_{j0}(s)=-\frac{2(2\pi)^{2s}N\gamma^{s-2}\chi(\tau_j)\ln\eta}{e(\mathfrak{m})\,\Xi(\gamma)\,\Gamma\left(s+\frac{i\nu}{2}\right)\Gamma\left(s-\frac{i\nu}{2}\right)\sqrt{d}\,N\mathfrak{m}}\times$$

$$\times\sum_{\left(\frac{1}{\mu\gamma\delta}\right)\setminus q\neq 0}^{(\mathfrak{m})}\exp\left\{-2\pi i\,S(\tau_j\,q)\right\}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-2\pi i m w\right\}dw\times$$

$$\int_0^{\infty}y^{2s-1}\,dy\int\limits_{\substack{x_1>0\ x_2>0\\ x_1x_2>XN\gamma}}\int(x_1x_2-XN\gamma)\exp\left\{-2\pi y(\eta^{w}x_1+\eta^{-w}x_2)+\right.$$

$$\left.+\,2\pi i(qx_1+q'x_2)\right\}dx_1\,dx_2,$$

что, в свою очередь, ввиду (3.9), дает

$$\Phi_j(s)-\Phi_{j0}(s)=\frac{(2\pi)^{2s}N\gamma^{s-2}\chi(\tau_j)}{e(\mathfrak{m})\,\Xi(\gamma)\,\Gamma\left(s+\frac{i\nu}{2}\right)\Gamma\left(s-\frac{i\nu}{2}\right)\sqrt{d}\,N\mathfrak{m}}\times$$

$$\times\sum_{\left(\frac{1}{\mu\gamma\delta}\right)\setminus q\neq 0}^{(\mathfrak{m})}\exp\left\{-2\pi i\,S(\tau_j\,q)\right\}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\exp\left\{-\frac{i\nu}{2}\ln\frac{z_1}{z_2}\right\}z_1^{s-1}z_2^{s-1}\,dz_1\,dz_2\times$$

$$\times\int\limits_{\substack{x_1>0\ x_2>0\\ x_1x_2>XN\gamma}}\int(x_1x_2-XN\gamma)\exp\left\{-2\pi(z_1x_1+z_2x_2)+\right.$$

$$\left.+\,2\pi i(x_1q+x_2q')\right\}dx_1\,dx_2. \tag{3.11}$$

Пользуясь теоремой Коши, можно заменить пути интегрирования по x_1 и x_2 в кривые $\mathfrak{C}_1(q)$ и $\mathfrak{C}_2(q)$ соответственно, где $\mathfrak{C}_1(q)$ и $\mathfrak{C}_2(q)$ определяются следующим образом.

Если $q\succ 0$, то в качестве контура $\mathfrak{C}_1(q)$ выбираем кривую, состоящую из нижней полуокружности

$$\left|\operatorname{Re}x_1-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q'}{q}XN\gamma}+i\operatorname{Im}x_1\right|=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q'}{q}XN\gamma},\qquad \operatorname{Im}x_1\leqslant 0$$

и луча

$$\operatorname{Re}x_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q'}{q}XN\gamma},\quad 0\leqslant\operatorname{Im}x_1<\infty,$$

а в качестве контура $\mathfrak{C}_2(q)$ — луч

$$\operatorname{Re}x_2=\operatorname{Re}\frac{XN\gamma}{x_1},\quad \operatorname{Im}\frac{XN\gamma}{x_1}\leqslant\operatorname{Im}x_2<\infty.$$

Если $q>0$, $q'<0$, то за контур $\mathfrak{C}_1(q)$ возьмем положительную мнимую ось, а за контур $\mathfrak{C}_2(q)$ — часть отрицательной мнимой оси от $\frac{XN\gamma}{x_1}$ до $-i\infty$. Наконец, если $q\prec 0$, соответственно $q<0$, $q'>0$, то через $\mathfrak{C}_1(q)$ и $\mathfrak{C}_2(q)$ обозначим кривые, которые являются зеркальными отображениями вышеуказанных кривых относительно вещественной оси. При таком выборе путей интегрирования интегралы по x сходятся равномерно относительно z. Поэтому можно изменить порядок интегрирования и проинтегрировать правую часть полученного равенства по z:

$$\Phi_j(s)-\Phi_{j0}(s)=\frac{N\gamma^{s-2}\chi(\tau_j)}{e(\mathfrak{m})\,\Xi(\gamma)\sqrt{d}\,N\mathfrak{m}}\sum_{\left(\frac{1}{\mu\gamma\delta}\right)\setminus q\neq 0}^{(\mathfrak{m})}\exp\left\{-2\pi i\,S(\tau_j\,q)\right\}\times$$
$$\times\int\limits_{\mathfrak{C}_1(q)}\int\limits_{\mathfrak{C}_2(q)}(x_1x_2-XN\gamma)\,x_1^{-s+\frac{iv}{2}}\,x_2^{-s-\frac{iv}{2}}\times$$
$$\times\exp\left\{2\pi i\,(x_1q+x_2q')\right\}dx_1\,dx_2. \tag{3.12}$$

Равенство (3.12) доказано при условии $s>2$. Покажем, что оно аналитически продолжается на область

$$-M<\sigma<M,\quad |t|\geqslant 0.$$

Очевидно, левая часть равенства (3.12) является регулярной в этой области. Далее, полагая, для определенности, $q\succ 0$, с помошью подстановки

$$x_1=\sqrt{\left|\frac{q'}{q}\right|d\,N(\mu\gamma)\,z_1},\quad x_2=\sqrt{\left|\frac{q}{q'}\right|d\,N(\mu\gamma)\,z_2} \tag{3.13}$$

получаем

$$\Phi_j(s)-\Phi_{j0}(s)=\frac{(d\,N\mathfrak{m})^{1-s}\chi(\tau_j)}{e(\mathfrak{m})\,\Xi(\gamma)\sqrt{d}}\sum_{\left(\frac{1}{\mu\gamma\delta}\right)\setminus q\neq 0}^{(\mathfrak{m})}\exp\left\{-2\pi i\,S(\tau_j\,q)\right\}\left(\frac{q'}{q}\right)^{\frac{iv}{2}}\times$$
$$\times\int\limits_{\mathfrak{C}_1}\int\limits_{\mathfrak{C}_2}\left(z_1z_2-\frac{X}{d\,N\mathfrak{m}}\right)z_1^{-s+\frac{iv}{2}}\,z_2^{-s-\frac{iv}{2}}\times$$
$$\times\exp\left\{2\pi i\sqrt{d\,N(q\mu\gamma)}\,(z_1+z_2)\right\}dz_1\,dz_2,$$

где z_1 интегрируется по контуру $\mathfrak{C}_1$, состоящему из полуокружности

$$\left|\operatorname{Re}z_1-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{X}{d\,N\mathfrak{m}}}+\mathrm{i}\operatorname{Im}z_1\right|=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{X}{d\,N\mathfrak{m}}},\qquad \operatorname{Im}z_1\leqslant 0,$$

пробегаемой против часовой стрелки, и луча

$$\operatorname{Re}z_1=\sqrt{\frac{X}{d\,N\mathfrak{m}}},\quad 0\leqslant\operatorname{Im}z_1<\infty,$$

а z_2 — по лучу $\mathfrak{C}_2$:

$$\operatorname{Re}z_2=\operatorname{Re}\frac{X}{z_1\,d\,N\mathfrak{m}},\quad \operatorname{Im}\frac{X}{z_1\,d\,N\mathfrak{m}}\leqslant\operatorname{Im}z_2<\infty.$$

Положим

$$z_1=z_1,\quad z_2=\frac{v^2}{z_1}. \tag{3.14}$$

Замечая, что при

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\arg z_1<\frac{\pi}{2},\quad -\frac{\pi}{2}<\arg v^2<\pi$$

для главных значений равенство

$$(v^2 z_1^{-1})^{-s-\frac{iv}{2}} = v^{-2s-iv} z_1^{s+\frac{iv}{2}}$$

имеет место, мы в качестве контура интегрирования по v, можем выбрать луч

$$\operatorname{Re} v - \operatorname{Im} v = \sqrt{\frac{X}{dN\mathfrak{m}}}, \quad \operatorname{Re} v \geqslant \sqrt{\frac{X}{dN\mathfrak{m}}}.$$

В результате получаем:

$$\Phi_j(s) - \Phi_{j0}(s) = \frac{(dN\mathfrak{m})^{1-s}\chi(\tau_j)}{e(\mathfrak{m})\,\Xi(\gamma)\sqrt{d}} \sum_{\left(\frac{1}{\mu\gamma\delta}\right)\setminus q\neq 0}^{(\mathfrak{m})} \exp\left\{-2\pi i S(\tau_j q)\right\}\left(\frac{q'}{q}\right)^{\frac{iv}{2}} \times$$

$$\times \int_{\mathfrak{C}_1} \int_{\sqrt{\frac{X}{dN\mathfrak{m}}}}^{\infty \exp\frac{\pi i}{4}} \left(v^2 - \frac{X}{dN\mathfrak{m}}\right) z_1^{iv-1} v^{1-2s-iv} \exp\left\{2\pi i \sqrt{dN(q\mu\gamma)}\, \times\right.$$

$$\left.\times\left(z_1 + \frac{v^2}{z_1}\right)\right\} dz_1\, dv.$$

Перемена порядка интегрирования, что можно сделать в силу абсолютной и равномерной сходимости интегралов, и подстановка

$$z_1 = uv, \quad v = v \tag{3.15}$$

с последующим применением теоремы Коши, приводит нас к формуле

$$\Phi_j(s) = \Phi_{j0}(s) = \frac{(dN\mathfrak{m})^{1-s}\chi(\tau_j)}{e(\mathfrak{m})\,\Xi(\gamma)\sqrt{d}} \sum_{\left(\frac{1}{\mu\gamma\delta}\right)\setminus q\neq 0}^{(\mathfrak{m})} \exp\left\{-2\pi i S(\tau_j q)\right\}\left(\frac{q'}{q}\right)^{\frac{iv}{2}} \times$$

$$\times \int_{\sqrt{\frac{X}{dN\mathfrak{m}}}}^{\infty \exp\frac{\pi i}{4}} \int_{\mathfrak{C}_0} \left(v^2 - \frac{X}{dN\mathfrak{m}}\right) v^{1-2s} u^{iv-1} \exp\left\{2\pi i \sqrt{dN(q\mu\gamma)}\, v\left(u + \frac{1}{u}\right)\right\} du\, dv,$$

где $\mathfrak{C}_0$ — кривая, состоящая из полуокружности

$$\left| u - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{Im} u \leqslant 0$$

и луча

$$\operatorname{Re} u = 1, \quad 0 \leqslant \operatorname{Im} u < \infty.$$

Отсюда, принимая в расчет оценку $\left([7]\ (4.4),\ (4.5)\right)$

$$\int_{\sqrt{\frac{X}{dN\mathfrak{m}}}}^{\infty \exp\frac{\pi i}{4}} \int_{\mathfrak{C}_0} \left(v^2 - \frac{X}{dN\mathfrak{m}}\right) v^{1-2s} \exp\left\{2\pi i \sqrt{dN(q\mu\gamma)}\, v\left(u + \frac{1}{u}\right)\right\} du\, dv \times$$

$$\times \ll X^{\frac{3}{4}-\sigma} Nq^{-\frac{5}{4}}$$

при $Nq > \frac{t^2}{4\pi^2 XN\gamma}$ и условие

$$-\frac{\pi}{2} < \arg u < \frac{\pi}{2},$$

находим

$$\Phi_j(s) - \Phi_{j0}(s) \ll X^{\frac{3}{4}-\sigma} \exp\frac{\pi|v|}{2} \sum_{\left(\frac{1}{\mu\gamma\delta}\right)\setminus q\neq 0}^{(\mathfrak{m})} Nq^{-\frac{5}{4}}. \tag{3.16}$$

Так как ряд по Nq сходится абсолютно, то правая часть равенства (3.12) представляет аналитическую и регулярную функцию во всей конечной плоскости переменного s. Таким образом, формула (3.12) остается верной в области

$$-M < \sigma < M, \quad -\infty < t < \infty.$$

Положим

$$\sum_{\tau_j \bmod \mathfrak{m}} \Phi_{j0}(s) = \Phi^*(s, X).$$

По теореме Коши, учитывая соотношение (3.5) и оценку (3.16), получаем

$$\Phi(s) - \Phi^*(s, X) = \frac{N\gamma^{s-2}}{\sqrt{d}\,\Xi(\gamma)\,N\mathfrak{m}} \Bigg\{ \sum^*_{\substack{\left(\frac{1}{\mu\gamma\delta}\right)\setminus q\succ 0 \\ Nq < \frac{Y}{dN(\mu\gamma)}}} I(q) + \sum^*_{\substack{\left(\frac{1}{\mu\gamma\delta}\right)\setminus q\succ 0 \\ Nq \geqslant \frac{Y}{dN(\mu\gamma)}}} P(q) -$$

$$- \sum^*_{\substack{\left(\frac{1}{\mu\gamma\delta}\right)\setminus q\succ 0 \\ Nq < \frac{Y}{dN(\mu\gamma)}}} Q(q) \Bigg\}, \tag{3.17}$$

где

$$I(q) = \frac{1}{e(\mathfrak{m})} \sum_{\substack{k=-2e(\mathfrak{m}) \\ k\neq 0}}^{2e(\mathfrak{m})} G\left\{ -q\mu\delta\varepsilon^k \operatorname{sgn} k, \chi \right\} \times$$

$$\times \int\limits_0^{i\infty\operatorname{sgn}(k\varepsilon^k)} \int\limits_0^{i\infty\operatorname{sgn}(k\varepsilon'^k)} (x_1 x_2 - XN\gamma)\, x_1^{-s+\frac{iv}{2}} x_2^{-s-\frac{iv}{2}} \exp\Big\{ 2\pi i (x_1 q\varepsilon^k +$$

$$+ x_2 q' \varepsilon'^k) \operatorname{sgn} k \Big\} dx_1\, dx_2, \tag{3.18}$$

$$P(q) = \frac{1}{e(\mathfrak{m}} \sum_{\substack{k=-2e(\mathfrak{m}) \\ k\neq 0}}^{2e(\mathfrak{m})} G\left\{ -q\mu\delta\varepsilon^k \operatorname{sgn} k, \chi \right\} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathfrak{C}_1(q)} \int\limits_{\mathfrak{C}_2(q)} (x_1 x_2 - XN\gamma)\, x_1^{-s+\frac{iv}{2}} x_2^{-s-\frac{iv}{2}} \exp\Big\{ 2\pi i (x_1 q\varepsilon^k +$$

$$+ x_2 q' \varepsilon'^k) \operatorname{sgn} k \Big\} dx_1\, dx_2, \quad 3.19)$$

$$Q(q)=\frac{1}{e(\mathfrak{m})}\sum_{\substack{k=-2e(\mathfrak{m})\\ k\neq 0}}^{2e(\mathfrak{m})} G\left\{-q\mu\delta\varepsilon^k \operatorname{sgn} k,\ \chi\right\}\times$$

$$\times\int\limits_{\mathfrak{C}_1(q)}\int\limits_0^{\frac{XN\gamma}{x_1}}(x_1x_2-XN\gamma)\,x_1^{-s+\frac{i\nu}{2}}\,x_2^{-s-\frac{i\nu}{2}}\exp\left\{2\pi i(x_1q\varepsilon^k+\right.$$

$$\left.+x_2q'\varepsilon'^k)\operatorname{sgn} k\right\}dx_1\,dx_2, \tag{3.20}$$

причем интегралы в $I(q)$ и $Q(q)$ при $\sigma\geqslant 1$ следует считать обобщенными, ε — основная единица поля K,

$$G(\alpha,\ \chi)=\sum_{\tau_j \bmod \mathfrak{m}}\chi(\tau_j)(\operatorname{sgn}\tau_j)^{a_1}(\operatorname{sgn}\tau_j')^{a_2}\exp\left\{2\pi i\,S\left(\frac{\alpha\tau_j}{\delta\mu}\right)\right\} \tag{3.21}$$

$\left(\frac{\alpha\tau_j}{\delta\mu}\right.$ — число поля $\left.K\right)$.

Рассмотрим сумму $I(q)$. Прежде всего заметим, что ввиду формулы

$$\Gamma(x)=\int\limits_0^{\infty} z^{x-1}\exp(-z)\,dz,$$

которая в случае обобщенных интегралов имеет место при любом x, повторный интеграл легко вычисляется и сумма $I(q)$ на основании соотношения

$$G(\alpha\beta,\chi)=\bar{\chi}(\beta)\ (\operatorname{sgn}\beta)^{a_1}(\operatorname{sgn}\beta')^{a_2}\ G(\alpha,\chi)\quad \text{при}\quad (\beta,\mathfrak{m})=1 \tag{3.22}$$

приводится к виду

$$I(q)=\sum_{\left(\frac{1}{\mu\gamma\delta}\right)\backslash q>0}^{*} G\left\{q\mu\delta,\ \chi\right\}\left\{\frac{\Gamma(2-s,\ \bar{\xi})}{\Gamma(s-1,\ \xi)}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\frac{1}{Nq}-\right.$$

$$\left.-XN\gamma\frac{\Gamma(1-s,\ \bar{\xi})}{4\Gamma(s,\ \xi)}\right\}(-i)^{a_1+a_2}\,4\pi\left(\frac{1}{Nq}\right)^{1-s}\left(\frac{q'}{q}\right)^{\frac{i\nu}{2}}\pi^{2(s-1)},$$

где

$$\Gamma(s,\ \xi)=\Gamma\left(\frac{s+a_1}{2}-\frac{i\nu}{4}\right)\Gamma\left(\frac{s+a_2}{2}+\frac{i\nu}{4}\right).$$

Положим

$$q\mu\delta\gamma=\beta. \tag{3.23}$$

Тогда $\beta\succ 0$ при $q\succ 0$. Далее, заставляя в выражении (3.23) q пробегать все целые неассоциированные числа идеала $\left(\frac{1}{\mu\gamma\delta}\right)$, мы получим все целые неассоциированные числа класса $\mathfrak{K}'=\mathfrak{K}^{-1}\,\delta\mathfrak{m}$. Заметим теперь, что

$$G\left(\frac{\beta}{\gamma},\ \mathfrak{m}\right)=0\quad\text{при}\quad\left(\frac{\beta}{\gamma},\ \mathfrak{m}\right)\neq 1. \tag{3.24}$$

Пользуясь этим, получаем

$$\Phi(s)-\Phi^*(s,\ X)=\frac{N\gamma^{s-2}}{\sqrt{d}\ \Xi(\gamma)\, N\mathfrak{m}}\left\{\sum_{\substack{\left(\frac{1}{\mu\gamma\delta}\right)\setminus q>0\\ dN(\mu\gamma q)\geqslant Y}}^{*} P(q)-\sum_{\substack{\left(\frac{1}{\mu\gamma\delta}\right)\setminus q>0\\ dN(\mu\gamma q)<Y}}^{*} Q(q)\right\}+$$

$$+\psi(s-1)\sum_{\substack{\beta\in\mathfrak{L}',\ \beta>0\\ N\beta<Y}}^{*}\bar{\Xi}(\beta)\, N\beta^{s-2}-X\psi(s)\sum_{\substack{\beta\in\mathfrak{L}',\ \beta>0\\ N\beta<Y}}^{*}\bar{\Xi}(\beta)\, N\beta^{s-1}, \tag{3.25}$$

где положено

$$\psi(s)=\frac{\Gamma(1-s;\ \xi)}{\Gamma(s;\ \xi)}\, W(\xi)\left(\frac{dN\mathfrak{m}}{\pi^2}\right)^{\frac{1}{2}-s},\qquad W(\xi)=(-i)^{a_1+a_2}\,\frac{\xi(\delta\mu)}{\sqrt{N\mathfrak{m}}}\, G(1,\ \chi).$$

Остается рассмотреть суммы $P(q)$ и $Q(q)$, определенные в (3.19) и (3.20). Вследствие формул (3.13), (3.14) и (3.15), учитывая следующее интегральное представление функции Макдональда

$$K_\nu(v)=\frac{1}{2}\int_0^{\infty\exp(-i\omega)} u^{-\nu-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}v\left(u+\frac{1}{u}\right)\right\}du,$$

верное при условии, что

$$-\pi<\omega<\pi\quad\text{и}\quad -\frac{\pi}{2}+\omega<\arg v<\frac{\pi}{2}+\omega,$$

получаем

$$P(q)=\frac{4}{e(\mathfrak{m})}\left\{dN(\mu\gamma)\right\}^{2-s}\sum_{\substack{k=-2e(\mathfrak{m})\\ k\neq 0}}^{2e(\mathfrak{m})} E_k(\nu)\int_{\sqrt{\frac{X}{dN\mathfrak{m}}}}^{\infty\exp\left\{\frac{\pi i}{8}[1+(-1)^k]\operatorname{sgn}k\right\}}\Omega(v)\,dv,$$

$$Q(q)=\frac{4}{e(\mathfrak{m})}\left\{dN(\mu\gamma)\right\}^{2-s}\sum_{\substack{k=-2e(\mathfrak{m})\\ k\neq 0}}^{2e(\mathfrak{m})} E_k(\nu)\int_0^{\sqrt{\frac{X}{dN\mathfrak{m}}}}\Omega(v)\,dv,$$

где

$$E_k(\nu)=G\left\{-q\mu\delta\varepsilon'\operatorname{sgn}k,\ \chi\right\}\bar{\xi}^m(q\varepsilon^k)\ \exp\left\{\frac{\pi\nu}{4}\left[(-1)^k-1\right]\operatorname{sgn}k\right\},$$

$$\Omega(v)=\left(v^2-\frac{X}{dN\mathfrak{m}}\right)v^{1-2s}\times$$

$$\times K_{-i\nu}\left\{4\pi\sqrt{dN(q\mu\gamma)}\ v\exp\left[-\pi i\,\frac{1+(-1)^k}{4}\operatorname{sgn}k\right]\right\},$$

откуда, пользуясь (3.22), (3.23) и (3.24) и заменяя $4\pi\sqrt{N\beta}v$ на v, находим

$$R_1(s,\ X)=\frac{N\gamma^{s-2}}{\sqrt{d}\,\Xi(\gamma)\, N\mathfrak{m}}\sum_{\substack{\left(\frac{1}{\mu\gamma\delta}\right)\setminus q>0\\ dN(q\mu\gamma)\geqslant Y}}^{*} P(q)=\varkappa(s)\sum_{\substack{k=-2\\ k\neq 0}}^{2} A_k(\nu)\times$$

$$\times\sum_{\substack{\beta\in\mathfrak{L}',\ \beta>0\\ N\beta\geqslant Y}}^{*}\bar{\Xi}(\beta)\, N\beta^{s-2}\int_L^{L_0}\Psi(v)\,dv, \tag{3.26}$$

$$R_2(s,\ X)=\frac{N\gamma^{s-2}}{\sqrt{d}\,\Xi(\gamma)\,N\mathfrak{m}}\sum^{*}_{\substack{\left(\frac{1}{\mu\gamma\delta}\right)\backslash q\succ 0\\ d\,N(q\mu\gamma')<Y}} Q(q)=\varkappa(s)\sum_{\substack{k=-2\\ k\neq 0}}^{2} A_k(\nu)\,\times$$

$$\times\sum^{*}_{\substack{\beta\in\mathfrak{L}',\ \beta\geqslant 0\\ N\beta<Y}}\bar{\Xi}(\beta)\,N\beta^{s-2}\int_0^L\Psi(v)\,dv, \tag{3.27}$$

где положено

$$\varkappa(s)=\frac{4\sqrt{d}\,(dN\mathfrak{m})^{1-s}}{(4\pi)^{4-2s}}\,\xi^m(\mu\delta)\,G(1,\ \chi),$$

$$L_0=\infty\exp\left\{\frac{\pi i}{8}\,[1+(-1)^k]\operatorname{sgn}k\right\},$$

а остальные обозначения разъяснены в формулировке теоремы 1.

Соединение (3.2), (3.25), (3.26) и (3.27) дает формулу (3.1).

§ 4. Оценка остаточных членов

Перейдем к оценке остаточных членов, полученных в § 3. Для удобства рассуждений вместо остаточного члена $R_j(s,X)$ будем рассматривать разность $R_j(s,X+\sqrt{X})-R_j(s,X)\,(j=1,2)$. Кроме того, в дальнейшем будем предполагать, что $\nu\neq 0$ и $\operatorname{sgn}(t\nu)\geqslant 0$, так как в случае $\nu=0$ оценки остаточных членов вытекают из результата Фишера [7], а случай $\operatorname{sgn}(t\nu)<0$ сводится к случаю $\operatorname{sgn}(t\nu)>0$ вследствие соотношения $K_\nu(z)=K_{-\nu}(z)$.

Лемма 10. *Пусть*

$$X\geqslant 1,\ Y\geqslant 1,\ C_1<\frac{X}{Y}<C_2,\ s=\sigma+it,\ \nu=\frac{2\pi m}{\ln\eta},\ |4t^2-\nu^2|=$$

$$=16\pi^2\frac{XY}{dN\mathfrak{m}},\ \operatorname{sgn}(t\nu)\geqslant 0.$$

Тогда в интервале $-M<\sigma<M$ равномерно по X, s и ν выполняется оценка

$$R_1(s,\ X+\sqrt{X})-R_1(s,\ X)\ll X^{1-\sigma}\sqrt{\frac{|2t+\nu|}{1+|2t-\nu|}}\ln(e+|2t+\nu|)\,\times$$

$$\times\ln(e+|2t-\nu|), \tag{4.1}$$

где $R_1(s,X)$ определено в (3.26), а C_1, C_2 и M — положительные постоянные.

Доказательство. В силу соотношения $\varkappa(s)\ll 1$ нам достаточно показать, что

$$T_k(s,\ X)=\exp\left[\pi\nu\frac{(-1)^k-1}{4}\operatorname{sgn}k\right]\sum^{*}_{\substack{\beta\in\mathfrak{L}',\ \beta>0\\ N\beta\geqslant Y}}\bar{\Xi}(\beta)\,N\beta^{s-2}\left\{\int_{L_1}^{L_0}(v^2-L_1^2)\,-\right.$$

$$\left.-\int_L^{L_0}(v^2-L^2)\right\}v^{1-2s}K_{i\nu}\left\{v\exp\left[-\pi i\,\frac{(-1)^k+1}{4}\operatorname{sgn}k\right]\right\}dv\ll$$

$$\ll X^{1-\sigma}\sqrt{\frac{|2t+\nu|}{1+|2t-\nu|}}\ln(e+|2t+\nu|)\ln(e+|2t-\nu|) \tag{4.2}$$

при $k=-2,\ -1,\ 1,\ 2$.

Разберем вначале случай $k=\pm 1$. Так как функция $(v^2-z^2)v^{1-2s}K_{i\nu}(v)$ вместе со своей производной по z являются регулярными и абсолютно интегрируемыми функциями в области $L_1 \leqslant z \leqslant L$, $z \leqslant v < \infty$, то

$$T_{\pm 1}(s,\ X)=\exp\left(\mp\frac{\pi\nu}{2}\right)\sum_{\substack{\beta\in\mathfrak{L}',\ \beta>0\\ N\beta\geqslant Y}}^{*}\bar{\Xi}(\beta)\,N\beta^{s-2}\times$$

$$\times\int_{L}^{L_1}d_z\left[\int_{z}^{\infty}(v^2-z^2)\,v^{1-2s}K_{i\nu}(v)\,dv\right]=-2\exp\left(\mp\frac{\pi\nu}{2}\right)\times$$

$$\times\sum_{\substack{\beta\in\mathfrak{L}',\ \beta>0\\ N\beta\geqslant Y}}^{*}\bar{\Xi}(\beta)\,N\beta^{s-2}\int_{L}^{L_1}zdz\int_{z}^{\infty}v^{1-2s}K_{i\nu}(v)\,dv. \tag{4.3}$$

Разобьем оцениваемую сумму (4.3) на две части следующим образом

$$-2\exp\left(\mp\frac{\pi\nu}{2}\right)\sum_{\substack{\beta\in\mathfrak{L}',\ \beta>0\\ N\beta\geqslant Y}}^{*}=-2\exp\left(\mp\frac{\pi\nu}{2}\right)\left\{\sum_{\substack{\beta\in\mathfrak{L}',\ \beta>0\\ V\leqslant L<\frac{\pi}{2}|2t+\nu|}}^{*}+\sum_{\substack{\beta\in\mathfrak{L}',\ \beta>0\\ \frac{\pi}{2}|2t+\nu|\leqslant L<\infty}}^{*}\right\}$$

и обозначим эти части через S_1 и S_2 соответственно.

Сначала оценим сумму S_2. Заменяя функцию $K_{i\nu}(v)$ ее интегральным представлением ([1] стр. 201)

$$K_{i\nu}(v)=\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\exp\left\{-\frac{v}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right)\right\}u^{-i\nu-1}\,du,$$

после несложных преобразований получим:

$$S_2=-\exp\left(\mp\frac{\pi\nu}{2}\right)\sum_{\substack{\beta\in\mathfrak{L}',\ \beta>0\\ \frac{\pi}{2}|2t+\nu|\leqslant L<\infty}}^{*}\bar{\Xi}(\beta)\,N\beta^{s-2}\times$$

$$\times\int_{L}^{L_1}zdz\int_{z}^{\infty}v^{1-2s}dv\int_{1}^{\infty}\exp\left\{-\frac{v}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right)\right\}\frac{u^{i\nu}+u^{-i\nu}}{u}\,du.$$

Положим

$$u+\frac{1}{u}=2+2y.$$

Ввиду того, что

$$\int_{0}^{\infty}\exp\left\{-yv\right\}y^{-\frac{1}{2}}\,dy=v^{-\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

будем иметь

$$S_2\ll\exp\frac{\pi|\nu|}{2}\sum_{\substack{\beta\in\mathfrak{L}',\ \beta>0\\ \frac{\pi}{2}|2t+\nu|\leqslant L<\infty}}^{*}N\beta^{\sigma-2}\int_{L}^{L_1}z\,dz\int_{z}^{\infty}v^{\frac{1}{2}-2\sigma}\exp(-v)\,dv.$$

Так как при $-M<\sigma<M$

$$\int_z^{\infty} v^{\frac{1}{2}-2\sigma} \exp(-v)\, dv \ll z^{\frac{1}{2}-2\sigma} \exp(-z),$$

то

$$S_2 \ll \exp\left\{\frac{\pi}{2}\left(|\nu|-|2t+\nu|\right)\right\} \sum_{\substack{\beta\in\mathfrak{L}',\ \beta>0 \\ \frac{\pi}{2}|2t+\nu|\leqslant L<\infty}}^{*} N\beta^{\sigma-2} L^{\frac{3}{2}-2\sigma}.$$

Отсюда с помощью леммы 1 получаем

$$S_2 \ll \frac{X^{1-\sigma}}{1+\sqrt{|2t+\nu|}}. \tag{4.5}$$

Для оценки суммы S_1 проинтегрируем внутренний интеграл из (4.3) $2N_0$ раз, по частям, пользуясь при этом формулами дифференцирования бесселевых функций:

$$\frac{d}{dz}\left\{z^{\nu} K_{\nu}(z)\right\} = -z^{\nu} K_{\nu-1}(z), \quad \frac{d}{dz}\left\{z^{-\nu} K_{\nu}(z)\right\} = -z^{-\nu} K_{\nu+1}(z). \tag{4.6}$$

Это дает нам

$$S_1 = -2\exp\left(\mp\frac{\pi\nu}{2}\right) \sum_{\substack{\beta\in\mathfrak{L}',\ \beta>0 \\ V\leqslant L<\frac{\pi}{2}|2t+\nu|}}^{*} \Xi(\beta) \times$$

$$\times N\beta^{\sigma-2}\left\{\sum_{k=0}^{N_0-1} 2^{2k}\left(s+\frac{i\nu}{2}\right)_k \left(s-\frac{i\nu}{2}\right)_k \left[\int_L^{L_1} z^{2-2s-2k} K_{i\nu+1}(z)\, dz - \right.\right.$$

$$\left. -2\left(s+\frac{i\nu}{2}+k\right)\int_L^{L_1} z^{1-2s-2k} K_{i\nu}(z)\, dz\right] + 2^{2N_0}\left(s+\frac{i\nu}{2}\right)_{N_0} \times$$

$$\left. \times\left(s-\frac{i\nu}{2}\right)_{N_0} \int_L^{L_1} z\, dz \int_z^{\infty} v^{1-2s-2N_0} K_{i\nu}(v)\, dv\right\}, \tag{4.7}$$

где положено $(w)_k = w(w+1)\ \dots\ (w+k-1)$ при $k\geqslant 1$ и $(w)_0=1$. (4.8)

Будем различать два возможных соотношения $|2t-\nu| \geqslant \max\{e^{11}, 4M^2\}$ и $|2t-\nu| < \max\{e^{11}, 4M^2\}$. В первом случае положим $W = V+\sqrt{|2t-\nu|}$ и разделим сумму S_1 на две суммы S_{11} и S_{12}, соответствующие $V\leqslant L<W$ и $W\leqslant \leqslant L<\frac{\pi}{2}|2t+\nu|$.

Легко подсчитать, что при фиксированном N_0

$$S_{11} \ll X^{-\frac{1}{2}} \ln(e+|2t+\nu|) \sum_{\substack{\beta\in\mathfrak{L}',\ \beta>0 \\ V\leqslant L<W}}^{*} N\beta^{\sigma-2} L^{3-2\sigma}.$$

Отсюда, пользуясь леммой 1, выводим

$$S_{11} \ll X^{1-\sigma} \sqrt[4]{\left|\frac{2t+\nu}{2t-\nu}\right|} \ln(e+|2t+\nu|). \tag{4.9}$$

Займемся теперь оценкой суммы S_{12}. Положим $\max\limits_{0\leqslant k\leqslant N_0-1} |(2s+i\nu+2k)(2s-i\nu+2k)| = D^2$. Тогда

$$|S_{12}| \leqslant 2\exp\left(\mp\frac{\pi\nu}{2}\right) \sum^{*}_{\substack{\beta\in\mathfrak{L}',\ \beta>0\\ W\leqslant L<\frac{\pi}{2}|2t+\nu|}} N\beta^{\sigma-2}\left\{\sum_{k=0}^{N_0-1} D^{2k}\left|\int_L^{L_1} z^{2-2s-2k} K_{i\nu+1}(z)\,dz -\right.\right.$$

$$\left. -(2s+i\nu+2k)\int_L^{L_1} z^{1-2s-2k} K_{i\nu}(z)\,dz\right| + D^{2N_0}\left|\int_L^{L_1} z\,dz \times\right.$$

$$\left.\left.\times\int_z^{\infty} v^{1-2s-2N} K_{i\nu}(v)\,dv\right|\right\}. \tag{4.10}$$

Применяя к интегралам из (4.10) леммы 4 и 5 и, замечая, что при

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{|2t-\nu|}\,\ln(1+|2t-\nu|) \leqslant 2(M+N_0-1) \leqslant \sqrt{|2t-\nu|}\ln(1+|2t-\nu|)$$

$$\left(\frac{D}{L}\right)^{2N_0} = \left(\frac{W}{L}\right)^{2N_0}\left(\frac{D}{W}\right)^{2N_0} \leqslant \left(\frac{W}{L}\right)^{2N_0}\left[1-\frac{3\sqrt{|2t-\nu|}}{(1+\sqrt{|2t-\nu|})^2}\right]^{\frac{N_0}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\frac{W}{L}\right)^{2N_0}\exp\left\{-\frac{3\sqrt{2}}{8}\,\frac{|2t-\nu|\ln(1+|2t-\nu|)}{(1+\sqrt{|2t-\nu|})^2}\right\} \ll \left(\frac{W}{L}\right)^{2N_0}(1+\sqrt{|2t-\nu|})^{-\frac{1}{2}},$$

получаем

$$S_{12} \ll \sum^{*}_{\substack{\beta\in\mathfrak{L}',\ \beta>0\\ W\leqslant L<\frac{\pi}{2}|2t+\nu|}} \left\{\frac{X^{2-\sigma}|2t+\nu|}{L(L^2-D^2)} + \left(\frac{W}{L}\right)^{2N_0}\frac{X^{\frac{3}{2}-\sigma}}{L(1+\sqrt{|2t-\nu|})^{\frac{1}{2}}}\right\}\ln(e+|2t+\nu|) =$$

$$= S'_{12} + S''_{12},$$

так как

$$\frac{L^{2-2\sigma}}{|2t+\nu|} \ll L^{1-2\sigma}|2t+\nu|.$$

Разобьем сумму S''_{12} на две части, соответствующие $W\leqslant L<W_1$ и $W_1\leqslant L<\frac{\pi}{2}|2t+\nu|$, где $W_1 = W\sqrt[4]{\left|\frac{2t+\nu}{2t-\nu}\right|}$. Применение леммы 1 к полученным суммам приводит к оценке

$$S''_{12} \ll X^{1-\sigma}\sqrt{\left|\frac{2t+\nu}{2t-\nu}\right|}\,\ln\left(e+|2t+\nu|\right). \tag{4.11}$$

Обозначим через P целую часть числа $\dfrac{\frac{\pi}{2}|2t+\nu|-W}{\sqrt{|2t-\nu|}}$. Тогда, имея в виду соотношение

$$S'_{12} = X^{2-\sigma}|2t+\nu|\ln\left(e+|2t+\nu|\right)\sum_{j=1}^{P}\ \sum^{*}_{\substack{\beta\in\mathfrak{L}',\ \beta>0\\ V_j\leqslant L<V_{j+1}}} \frac{1}{L(L^2-D^2)},$$

где

$$V_j = W + (j-1)\sqrt{|2t-\nu|}\ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ P-1),\ V_P = \frac{\pi}{2}|2t+\nu|,$$

и лемму 1, находим

$$S'_{12} \ll X^{1-\sigma}|2t+\nu|^2\sqrt{|2t-\nu|}\ \ln\left(e+|2t+\nu|\right)\sum_{j=1}^{P}\frac{1}{V_j^2-D^2},$$

откуда, заменив сумму интегралом, получаем

$$S'_{12} \ll X^{1-\sigma}\sqrt{\left|\frac{2t+\nu}{2t-\nu}\right|}\ \ln\left(e+|2t+\nu|\right)\ln\left(e+|2t-\nu|\right). \tag{4.12}$$

Если же $|2t-\nu| < \max\{e^{11}, 4M^2\}$, то разобьем сумму S_1 на две суммы следующим образом

$$-2\exp\left(\mp\frac{\pi\nu}{2}\right)\sum^*_{\substack{\beta\in\mathfrak{L}',\ \beta>0\\ V\leqslant L<\frac{\pi}{2}|2t+\nu|}} = -2\exp\left(\mp\frac{\pi\nu}{2}\right)\left\{\sum^*_{\substack{\beta\in\mathfrak{L}',\ \beta>0\\ V\leqslant L<V\sqrt[4]{|2t+\nu|}}} + \right.$$

$$\left. + \sum^*_{\substack{\beta\in\mathfrak{L}',\ \beta>0\\ V\sqrt[4]{|2t+\nu|}\leqslant L<\frac{\pi}{2}|2t-\nu|}}\right\},$$

считая при этом N_0 фиксированным. Отсюда, на основании лемм 4 и 5, заключаем, что

$$S_1 \ll \left\{X^{-\frac{1}{2}}\sum^*_{\substack{\beta\in\mathfrak{L}',\ \beta>0\\ V\leqslant L<V\sqrt[4]{|2t+\nu|}}} N\beta^{\sigma-2}L^{3-2\sigma} + \sum^*_{\substack{\beta\in\mathfrak{L}',\ \beta>0\\ V\sqrt[4]{|2t+\nu|}\leqslant L<\frac{\pi}{2}|2t+\nu|}} N\beta^{\sigma-2}\times\right.$$

$$\left.\times\left[|2t+\nu|L^{1-2\sigma}+|2t+\nu|^{-1}L^{3-2\sigma}+V^2X^{-\frac{1}{2}}L^{1-2\sigma}\right]\right\}\ln\left(e+|2t+\nu|\right).$$

Применим к правой части полученного соотношения лемму 1. Тогда

$$S_1 \ll X^{1-\sigma}\sqrt[4]{\frac{|2t+\nu|}{1+|2t-\nu|}}\ \ln(e+|2t+\nu|). \tag{4.13}$$

Соединение этого с (4.5), (4.9), (4.11) и (4.12) дает

$$T_{\pm 1}(s,\ X) \ll X^{1-\sigma}\sqrt{\frac{|2t+\nu|}{1+|2t-\nu|}}\ \ln(e+|2t+\nu|)\ln(e+|2t-\nu|). \tag{4.14}$$

Доказательство соответствующего соотношения для $T_{\pm 2}(s, X)$ проводится аналогично. Отметим лишь, что при оценке суммы S_2 функция Макдональда заменяется ее асимптотическим представлением ([1] стр. 291)

$$K_\nu(-iv) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{iv\,\mathrm{th}\,\omega}}\ \exp\left\{-\nu\left(\mathrm{th}\,\omega-\omega-\frac{\pi i}{2}\right)+\frac{\pi i}{4}\right\},$$

где $\nu = v\,\mathrm{ch}\,\omega$, а оценка суммы S_1 вытекает из формулы

$$K_\nu(-iv) = \frac{\pi}{2}\ \frac{J_{-\nu}(v)\exp\frac{\pi\nu i}{2} - J_\nu(v)\exp\left(-\frac{\pi\nu i}{2}\right)}{\sin\pi\nu},$$

причем для оценки интегралов, содержащих бесселевы функции $J_{-\nu}(v)$ и $J_\nu(v)$, вместо лемм 4 и 5 используются леммы 7 и 8.

Лемма доказана.

Лемма 11. *В обозначениях леммы* 10 *при условии, что* $-M<\sigma<M$ *и* $\operatorname{sgn}(t\nu)\geqslant 0$ *равномерно по* X, s *и* ν *имеет место оценка*

$$R_2(s,\ X+\sqrt{X})-R_2(s,\ X)\ll$$
$$\ll X^{1-\sigma}\sqrt{\frac{|2t+\nu|}{1+|2t-\nu|}}\ln(e+|2t+\nu|)\ln(e+|2t-\nu|), \tag{4.15}$$

где $R_2(S,X)$ *определено в* (3.27).

Доказательство. Пусть сначала $\operatorname{Re}(1-2s)>0$. Положим

$$U_k(s,\ X)=\exp\left[\pi\nu\frac{(-1)^k-1}{4}\operatorname{sgn}k\right]\sum_{\substack{\beta\in\mathfrak{L}',\ \beta>0\\ N\beta<Y}}^{*}\Xi(\beta)\,N\beta^{s-2}\left\{\int_0^{L_1}(v^2-L_1^2)-\right.$$
$$\left.-\int_0^{L}(v^2-L^2)\right\}v^{1-2s}K_{i\nu}\left\{v\exp\left[-\pi i\frac{(-1)^k+1}{4}\operatorname{sgn}k\right]\right\}dv$$
$$(k=-2,\ -1,\ 1,\ 2). \tag{4.16}$$

Преобразуя оцениваемое выражение так, как мы это делали при доказательстве леммы 10, будем иметь

$$U_k(s,\ X)=-2\exp\left[\pi\nu\frac{(-1)^k-1}{4}\operatorname{sgn}k\right]\sum_{\substack{\beta\in\mathfrak{L}',\ \beta>0\\ N\beta<Y}}^{*}\Xi(\beta)\,N\beta^{s-2}\int_L^{L_1}zdz\times$$
$$\times\int_0^{z}v^{1-2s}K_{i\nu}\left\{v\exp\left[-\pi i\frac{(-1)^k+1}{4}\operatorname{sgn}k\right]\right\}dv$$
$$(k=-2,\ -1,\ 1,\ 2). \tag{4.16}$$

Полученную формулу можно аналитически продолжить в область $\operatorname{Re}(1-2s+2N_1)>0$, если внутрений интеграл в (4.16) проинтегрировать $2N_1$ раз по частям, используя формулы (4.6) и беря в качестве дифференцируемой части выражение

$$\left\{v\exp\left[-\pi i\frac{(-1)^k+1}{4}\operatorname{sgn}k\right]\right\}^{\pm\nu}K_\nu\left\{v\exp\left[-\pi i\frac{(-1)^k+1}{4}\operatorname{sgn}k\right]\right\}.$$

Пусть $k=\pm 1$. Тогда формулу, дающую аналитическое продолжение, можно записать так:

$$U_{\pm1}(s,\ X)=-2\exp\left(\mp\frac{\pi\nu}{2}\right)\sum_{\substack{\beta\in\mathfrak{L}',\ \beta>0\\ N\beta<Y}}^{*}\left\{\sum_{k=0}^{N_1-1}\frac{1}{2^{2k+s}\left(-s+\frac{i\nu}{2}+1\right)_{k+1}\left(-s-\frac{i\nu}{2}+1\right)_{k+1}}\times\right.$$
$$\times\left[(-2s-i\nu+2k)\int_L^{L_1}z^{3-2s+2k}K_{i\nu}(z)\,dz+\int_L^{L_1}z^{4-2s+2k}K_{i\nu+1}(z)\,dz\right]+$$
$$\left.+\frac{1}{2^{2N_1}\left(-s+\frac{i\nu}{2}+1\right)_{N_1}\left(-s-\frac{i\nu}{2}+1\right)_{N_1}}\int_L^{L_1}zdz\int_0^{z}v^{1-2s+2N_1}K_{i\nu}(v)\,dv\right\}, \tag{4.17}$$

где $(w)_k$ определяется равенством (4.8). Если $|2t-\nu|>\frac{4\pi}{\sqrt{C_1 d N m}}=\frac{1}{H^2}$, ($C_1$ — постоянная из л. 10), то оцениваемую сумму разбиваем на две суммы следующим образом

$$-2\exp\left(\mp\frac{\pi\nu}{2}\right)\sum_{\substack{\beta\in\mathfrak{L}',\ \beta>0\\ N\beta<Y}}^{*}=$$

$$=-2\exp\left(\mp\frac{\pi\nu}{2}\right)\left\{\sum_{\substack{\beta\in\mathfrak{L}',\ \beta>0\\ B_0\leqslant L<B}}^{*}+\sum_{\substack{\beta\in\mathfrak{L}',\ \beta>0\\ B\leqslant L<V}}^{*}\right\}=\Lambda_1+\Lambda_2,$$

где положено

$$B_0=VY^{-\frac{1}{2}},\quad B=V\left\{1-(H\sqrt{|2t-\nu|})^{-1}\right\}.$$

Рассмотрим вначале сумму Λ_1. Очевидно, можно считать, что

$$Y^{-\frac{1}{2}}<1-(H\sqrt{|2t-\nu|})^{-1}. \tag{4.18}$$

Далее, так как

$$H\sqrt{|2t-\nu|}\leqslant H\sqrt[4]{|4t^2-\nu^2|}=\sqrt[4]{C_1XY}<\sqrt{X},$$

то

$$\frac{L_1}{V}\leqslant\left\{1-(H\sqrt{|2t-\nu|})^{-1}\right\}\sqrt{1+X^{-\frac{1}{2}}}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{1-(H\sqrt{|2t-\nu|})^{-1}\right\}\left(1+\frac{1}{2}X^{-\frac{1}{2}}\right)<1-(2H\sqrt{|2t-\nu|})^{-1}. \tag{4.19}$$

Отсюда, учитывая неравенство

$$\left|2^{2k}\left(-s+\frac{i\nu}{2}+1\right)_k\left(-s-\frac{i\nu}{2}+1\right)_k\right|\geqslant V^{2k}$$

и (4.19), согласно леммам 4 и 6 имеем

$$\Lambda_1\ll\sum_{\substack{\beta\in\mathfrak{L}',\ \beta>0\\ B_0\leqslant L<B}}^{*}\left\{\frac{X^{2-\sigma}|2t+\nu|}{(V^2-L_1^2)L_1}+\frac{X^{\frac{3}{2}-\sigma}}{L_1}\left[1-(2H\sqrt{|2t-\nu|})^{-1}\right]^{2N_1}\right\}\times$$
$$\times\ln(e+|2t+\nu|)=\Lambda_{11}+\Lambda_{12}.$$

Положим $N_1\geqslant H\sqrt{|2t-\nu|}\ln(1+|2t-\nu|)$. Тогда

$$\left[1-\left(2H\sqrt{|2t-\nu|}\right)^{-1}\right]^{2N_1}\leqslant\exp\left\{2N_1\ln\left[1-\left(2H\sqrt{|2t-\nu|}\right)^{-1}\right]\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\left(1+\sqrt{|2t-\nu|}\right)^{-1}.$$

Поэтому, применяя лемму 1, получим оценку

$$\Lambda_{12}\ll X^{1-\sigma}\sqrt{\left|\frac{2t+\nu}{2t-\nu}\right|}\ln\left(e+|2t+\nu|\right).$$

Введем обозначения

$$B_j=(j+1)B_0\ (j=0,\ 1,\ \ldots,\ Q-1),\ B_Q=B,$$

где Q — целая часть числа $(B-B_0)B_0^{-1}$. Имеем

$$\Lambda_{11}=X^{2-\sigma}|2t+\nu|\ln\left(e+|2t+\nu|\right)\sum_{j=0}^{Q-1}\ \sum_{\substack{\beta\in\mathfrak{L}',\ \beta>0\\ B_j\leqslant L<B_{j+1}}}^{*}\frac{1}{L_1(V^2-L_1^2)}.$$

Отсюда, пользуясь леммой 1, выводим

$$\Lambda_{11}\ll X^{1-\sigma}|2t+\nu|B_0\ln\left(e+|2t+\nu|\right)\sum_{j=0}^{Q-1}\frac{1}{V^2-B_{j+1}^2(1+X^{-\frac{1}{2}})}.$$

Замена суммы интегралом дает оценку

$$\Lambda_{11}\ll X^{1-\sigma}\sqrt{\left|\frac{2t+\nu}{2t-\nu}\right|}\ \ln\left(e+|2t+\nu|\right)\ln\left(e+|2t-\nu|\right).$$

Следовательно,

$$\Lambda_1\ll X^{1-\sigma}\sqrt{\left|\frac{2t+\nu}{2t-\nu}\right|}\ \ln\left(e+|2t+\nu|\right)\ln\left(e+|2t-\nu|\right). \tag{4.21}$$

Переходим к оценке суммы Λ_2. Считая N_1 достаточно большой постоянной, из лемм 4 и 6 заключаем, что

$$\Lambda_2\ll X^{2-\sigma}\left(\frac{1}{1+|2t-\nu|}+\frac{1}{\sqrt{X}}\right)\ln\left(e+|2t+\nu|\right)\sum_{\substack{\beta\in\mathfrak{L}',\ \beta>0\\ B\leqslant L<V}}^{*}.$$

Принимая во внимание лемму 1, получаем отсюда:

$$\Lambda_2\ll X^{\frac{1}{2}-\sigma}\left[1+\sqrt{X}\left(1+|2t-\nu|\right)^{-1}\right]\ln\left(e+|2t+\nu|\right)\left(V-B\right).$$

Таким образом,

$$\Lambda_2\ll X^{1-\sigma}\sqrt{\left|\frac{2t+\nu}{2t-\nu}\right|}\ \ln\left(e+|2t+\nu|\right), \tag{4.22}$$

а это в сочетании с (4.21) дает оценку

$$U_{\pm1}(s,\ X)\ll X^{1-\sigma}\sqrt{\frac{|2t+\nu|}{1+|2t-\nu|}}\ \ln\left(e+|2t+\nu|\right)\ln\left(e+|2t-\nu|\right), \tag{4.23}$$

так как случай $H\sqrt{|2t-\nu|}\leqslant 1$ ввиду того, что

$$V-B_0\ll\sqrt{|2t+\nu|},$$

сводится к только что рассмотренному.

Рассуждая так же как и при доказательстве леммы 10, мы убеждаемся в том, что соотношение (4.23) имеет место и для выражения $U_{\pm2}(s,\ X)$, причем для оценки интегралов, содержащих бесселеву функцию $J_{\pm\nu}(z)$, применяются леммы 8 и 9.

Лемма доказана.

§ 5. Вывод приближенного функционального уравнения

Теорема 2. *Пусть* $\zeta(s,\Xi,\mathfrak{L})$ — *дзета-функция Гекке класса идеальных чисел* $\mathfrak{L}$ *вещественного квадратичного поля* $K(d)$ *с первообразным характером* Ξ *модуля* $\mathfrak{m}$ *показателя* m, $X\geqslant 1$, $Y\geqslant 1$, $C_1<\frac{X}{Y}<C_2$, $s=\sigma+it$,

$\nu=\frac{2\pi m}{\ln\eta}$, $|4t^2-\nu^2|=16\pi^2\frac{XY}{dN\mathfrak{m}}$. *Тогда при* $-M<\sigma<M$ *равномерно по* X, s *и* ν *имеет место приближенное функциональное уравнение*

$$\zeta(s,\ \Xi,\ \mathfrak{L})=\sum^*_{\substack{\alpha\in\mathfrak{L},\ \alpha\neq 0\\ |N\alpha|<X}}\Xi(\alpha)\,|N\alpha|^{-s}+\psi(s)\sum^*_{\substack{\beta\in\mathfrak{L}',\ \beta\neq 0\\ |N\beta|<Y}}\bar{\Xi}(\beta)\,|N\beta|^{s-1}+$$

$$+\,O\left\{X^{\frac{1}{2}-\sigma}\sqrt{\frac{|2t|+|\nu|}{1+\big||2t|-|\nu|\big|}}\ \ln(e+|2t+\nu|)\ln(e+|2t-\nu|)\right\},$$

где C_1, C_2 *и* M *— положительные постоянные, а* $\psi(s)$, $\bar{\Xi}$ *и* $\mathfrak{L}'$ *определены в* (1.5).

Доказательство. Заменяя в фундаментальном тождестве

$$F(X,\ Y,\ s-1)-XF(X,\ Y,\ s)=\Phi^*(s,\ X)+R_2(s,\ X)-R_1(s,\ X) \tag{5.1}$$

X на $X+\sqrt{X}$, получаем,

$$F(X+\sqrt{X},\ Y,\ s-1)-(X+\sqrt{X})\,F(X+\sqrt{X},\ Y,\ s)=\Phi^*(s,\ X+\sqrt{X})+$$
$$+\,R_2(s,\ X+\sqrt{X})-R_1(s,X+\sqrt{X}). \tag{5.2}$$

Положим

$$G(s)=F(X,\ Y,\ s)-F(X+\sqrt{X},\ Y,\ s) \tag{5.3}$$

и вычтем из (5.1) тождество (5.2). Имеем

$$G(s-1)-(X+\sqrt{X})G(s)+\sqrt{X}\,F(X,\ Y,\ s)=$$
$$=\Phi^*(s,\ X)-\Phi^*(s,\ X+\sqrt{X})-[R_2(s,\ X+\sqrt{X})-R_2(s,\ X)]+$$
$$+\,R_1(s,\ X+\sqrt{X})-R_1(s,\ X).$$

Отсюда

$$F(X,\ Y,\ s)=X^{-\frac{1}{2}}\Big\{\Phi^*(s,\ X)-\Phi^*(s,\ X+\sqrt{X})-[R_2(s,\ X+\sqrt{X})-$$
$$-\,R_2(s,\ X)]+R_1(s,\ X+\sqrt{X})-R_1(s,\ X)-G(s-1)+(X+\sqrt{X})G(s)\Big\}. \tag{5.4}$$

Так как

$$G(s)=\sum^*_{\substack{\alpha\in\mathfrak{L}\\ X\leqslant|N\alpha|<X+\sqrt{X}}}\Xi(\alpha)\,|N\alpha|^{-s},$$

то

$$G(s-1)-(X+\sqrt{X})\,G(s)=\sum^*_{\substack{\alpha\in\mathfrak{L}\\ X\leqslant|N\alpha|<X+\sqrt{X}}}\Xi(\alpha)\,[|N\alpha|-X-\sqrt{X}]\,|N\alpha|^{-s}|. \tag{5.5}$$

Далее из (3.3), (3.26), (3.27), (5.4) и (5.5) вытекает, что функция $F(X,\ Y,\ s)$ является регулярной в области $-M<\sigma<M$, $|t|\geqslant E(\Xi)$, где $E(\Xi)$ — определено в (3.3).

Оценим правую часть равенства (5.4). В силу леммы 1

$$|G(s-1)-(X+\sqrt{X})\,G(s)|\ll X^{1-\sigma}.$$

Отсюда, учитывая оценки

$$|R_1(s,\ X+\sqrt{X})-R_1(s,\ X)|+|R_2(s,\ X+\sqrt{X})-R_2(s,\ X)|\ll$$
$$\ll X^{1-\sigma}\sqrt{\frac{|2t|+|\nu|}{1+\big||2t|-|\nu|\big|}}\ln\left(e+|2t+\nu|\right)\ln\left(e+|2t-\nu|\right),$$
$$\Phi^*(s,\ X)-\Phi^*(s,\ X+\sqrt{X})\ll E(\Xi)X^{-\sigma},$$

получаем окончательно

$$F(X,\ Y,\ s\ll X^{\frac{1}{2}-\sigma}\sqrt{\frac{|2t|+|\nu|}{1+\big||2t|-|\nu|\big|}}\ln\left(e+|2t+\nu|\right)\ln\left(e+|2t-\nu|\right).$$

Теорема доказана.

Выражаю глубокую благодарность проф. И. Кубилюсу за ценные указания при решении данной задачи.

Вильнюсский Государственный университет
им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
5.XI.1968

Литература

1. Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, ч. I, Москва, 1949.
2. К. Булота, Приближенное функциональное уравнение Z-функций Гекке мнимого квадратичного поля, Лит. матем. сб., II, № 1 (1962), 39–82.
3. К. Булота, О приближенном функциональном уравнении Z-функций Гекке, Лит. матем. сб., IV, № 2 (1964), 183–196.
4. А. Ф. Лаврик, О функциональных уравнениях функций Дирихле, Изв. АН СССР, сер. матем., 31 (1967), 431–442.
5. А. Ф. Лаврик, Приближенные функциональные уравнения функций Дирихле, Изв. АН СССР, сер. матем., 32 (1968), 134–185.
6. А. Ф. Лаврик, Приближенное функциональное уравнение дзета-функции Гекке мнимого квадратичного поля, Матем. заметки, т. 2, вып. 5(1967), 475–482.
7. W. Fischer, Über die Zetafunktion des reel-guadratischen Zahlkörpers, Math. Zeitschrift, 57 (1952), Heft 1, 94–115.
8. K. Chandrasekharan, R. Narasimhan, The approximate functional eguation for a class of zeta-functions, Math. Ann., 152 (1963), 30–64.
9. E. Hecke, Über eine neue Art von Zetafunktion und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen II, Math. Zeitschrift, Bd. 6 (1920), 11–51.
10. L. Holzer, Zahlentheorie, Teil I, Leipzig, 1958.

REALAUS KVADRATINIO SKAIČIŲ KŪNO HEKE ζ-FUNKCIJOS ARTUTINĖ FUNKCIONALINĖ LYGTIS

A. Matuliauskas

(*Reziumė*)

Nagrinėsime realų kvadratinį skaičių kūną K su diskriminantu $d>0$. Tarsime, kad jis Heke metodu praplėstas, prijungiant idealiuosius skaičius, iki šio kūno idealiųjų skaičių sistemos $\mathfrak{Z}$. Iš atitinkamybės tarp kūno K idealų ir idealiųjų skaičių turime, kad sistemos $\mathfrak{Z}$ skaičiai sudaro tiek klasių, kiek idealių klasių yra kūne K.

Tarkime, kad $\mathfrak{K}$ – idealiųjų skaičių klasė, $\mathfrak{m}\neq 0$ – sveikas fiksuotas kūno K idealas, $\eta>1$ – pilnai teigiamas pagrindinis vienetas mod $\mathfrak{m}$, $\alpha\neq 0$ – sveikas idealusis skaičius, α' – jo jungtinis ir

$$\xi^m(\alpha)=\exp\left\{\frac{\pi i m}{\ln\eta}\ln\left|\frac{\alpha}{\alpha'}\right|\right\},$$

kur m — sveikas racionalinis skaičius. Jei $\chi(\alpha)$ — toks liekanų klasių mod $\mathfrak{m}$ grupės charakteris, kad visiems kūno K vienetams ε

$$\chi(\varepsilon)\,\xi^m(\varepsilon)=1,$$

tai $\chi(\alpha)\xi^m(\alpha)=\Xi(\alpha)$ vadinamas Hekė antrosios rūšies charakteriu mod $\mathfrak{m}$.

Sakykime, $s=\sigma+it$. Hekės ζ-funkcija vadinama šitokia Dirichle eilutė

$$\zeta(s,\,\Xi,\,\mathfrak{L})=\sum_{\alpha\in\mathfrak{L},\ \alpha\neq 0}^{*}\Xi(\alpha)\,|N\alpha|^{-s}\qquad(\sigma>1);\tag{1}$$

čia žvaigždutė virš sumos ženklo nurodo, kad sumuojant iš kiekvienos asocijuotų skaičių sistemos reikia imti tik po vieną atstovą. Jei charakteris $\Xi(\alpha)$ — primityvus mod $\mathfrak{m}$ ir skaičiai a_1, $a_2=0$ arba 1 yra parinkti taip, kad visiems $\alpha\equiv 1$ (mod $\mathfrak{m}$)

$$\chi(\alpha)=(\operatorname{sgn}\alpha)^{a_1}(\operatorname{sgn}\alpha')^{a_2},$$

tai funkcija $\zeta(s,\Xi,\mathfrak{L})$ tenkina funkcionalinę lygtį

$$\zeta(s,\,\Xi,\,\mathfrak{L})=W(\xi)\,\psi(s)\,\zeta(1-s,\ \bar{\Xi},\,\mathfrak{L}');$$

čia $\mathfrak{L}\mathfrak{L}'$ — klasė, kuriai priklauso $\mathfrak{m}\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}$ — kūno K diferenta, $|W(\xi)|=1$, $\bar{\Xi}=\Xi^{-1}$,

$$\psi(s)=A^{1-2s}\,\frac{\Gamma(1-s;\,\bar{\xi})}{\Gamma(s;\,\xi)},\quad A=\frac{1}{\pi}\sqrt{dN\mathfrak{m}},\quad \bar{\xi}=\xi^{-1},$$

$$\Gamma(s;\,\xi)=\Gamma\left(\frac{s+a_1}{2}-\frac{\pi i m}{2\ln\eta}\right)\Gamma\left(\frac{s+a_2}{2}+\frac{\pi i m}{2\ln\eta}\right),$$

$N\mathfrak{m}$ — idealo $\mathfrak{m}$ norma.

Šiame darbe įrodoma, kad Hekės ζ — funkcija $\zeta(s,\Xi,\mathfrak{T})$, kuri srityje $\sigma>1$ yra apibrėžiama (1) eilute, o srityje $\sigma<0$ — konverguojančia eilute, gauta iš funkcionalinės lygties, kritiškoje juostoje $0\leqslant\sigma\leqslant 1$ užrašoma artutinai minėtų dviejų eilučių dalinių sumų pavidalu. Ši artutinė funkcionalinė lygtis nusakoma šitaip.

Sakykime, $X\geqslant 1$, $Y\geqslant 1$, $C_1<\frac{X}{Y}<C_2$, $4\pi\sqrt{\frac{XY}{dN\mathfrak{m}}}=\sqrt{|4t^2-\nu^2|}$, *kur* $\nu=\frac{2\pi m}{\ln\eta}$, $0<C_1<C_2<\infty$. *Tada*

$$\zeta(s,\,\Xi,\,\mathfrak{L})=\sum_{\substack{\alpha\in\mathfrak{L},\ \alpha\neq 0\\ |N\alpha|<X}}^{*}\Xi(\alpha)\,|N\alpha|^{-s}+\psi(s)\sum_{\substack{\beta\in\mathfrak{L}',\ \beta\neq 0\\ |N\beta|<Y}}^{*}\bar{\Xi}(\beta)\,|N\beta|^{s-1}+$$

$$+O\left\{X^{\frac{1}{2}-\sigma}\sqrt{\frac{|2t|+|\nu|}{1+\big||2t|-|\nu|\big|}}\,\ln(e+|2t+\nu|)\ln(e+|2t-\nu|)\right\}$$

tolygiai X, s *ir* ν *atžvilgiu intervale* $-M<\sigma<M$, *kur* $M>0$.

DIE APPROXIMATIVE FUNKTIONALGLEICHUNG FÜR DIE HECKESCHE ZETAFUNKTION DES REEL-QUADRATISCHEN ZAHLKÖRPERS

A. Matuliauskas

(*Zusammenfassung*)

Wir betrachten den reel-quadratischen Zahlkörper K der Diskriminante $d>0$. Nach dem Vorgange von E. Hecke werde nun der Zahlkörper zu dem Bereiche $\mathfrak{Z}$ idealer Zahlen erweitert. Den Idealklassen des Zahlkörpers entsprechend zerfällt der Bereich $\mathfrak{Z}$ in Klassen idealer Zahlen.

Es sei $\mathfrak{L}$ — eine beliebige Klasse aus $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{m}$ — ein ganzes von Null verschiedenes Ideal des Körpers, $\eta>1$ — die totalpositive Grundeinheit mod $\mathfrak{m}$, m — eine ganze rationale Zahl, $\alpha\neq 0$ sei eine ganze ideale Zahl, α' ihre Konjugierte und es werde

$$\xi^m(\alpha)=\exp\left\{\frac{\pi i m}{\ln\eta}\,\ln\left|\frac{\alpha}{\alpha'}\right|\right\}$$

gesetzt. Ist $\chi(\alpha)$ ein solcher Restklassencharakter mod $\mathfrak{m}$, dass

$$\chi(\varepsilon)\,\xi^{m}(\varepsilon)=1$$

für sämtliche Einheiten ε, so heisst $\chi(\alpha)\xi^{m}(\alpha)=\Xi(\alpha)$ ein Grössencharakter mod $\mathfrak{m}$. Mit dem Grössencharakter mod $\mathfrak{m}$ $\Xi(\alpha)$ wird nun die Heckesche Zetafunktion

$$\zeta(s,\,\Xi,\,\mathfrak{K})=\sum_{\alpha}{}^{*}\,\Xi(\alpha)\,|N\alpha|^{-s}\qquad(\mathrm{Re}\,s>1) \tag{1}$$

gebildet, wo α alle nicht-assoziierten idealen ganzen Zahlen von $\mathfrak{K}$ durchlauft. Ist $\chi(\alpha)$ überdies ein eigentlicher Grössencharakter mod $\mathfrak{m}$ und sind a_1, $a_2=0$ oder 1 so bestimmt, dass für alle $\alpha\equiv1\pmod{\mathfrak{m}}$

$$\chi(\alpha)=(\operatorname{sgn}\alpha)^{a_1}\,(\operatorname{sgn}\alpha')^{a_2},$$

so genügt $\zeta(s,\Xi,\mathfrak{K})$ der Funktionalgleichung

$$\zeta(s,\,\Xi,\,\mathfrak{K})=W(\xi)\,\psi(s)\,\zeta(1-s,\,\bar{\Xi},\,\mathfrak{K}'),$$

wo $\mathfrak{K}\mathfrak{K}'$ — die Klasse von $\mathfrak{m}\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}$ — die Differente des Körpers, $|W(\xi)|=1$, $\bar{\Xi}=\Xi^{-1}$,

$$\psi(s)=A^{1-2s}\,\frac{\Gamma(1-s;\,\bar{\xi})}{\Gamma(s;\,\xi)},\qquad A=\frac{1}{\pi}\sqrt{dN\mathfrak{m}},\qquad \bar{\xi}=\xi^{-1},$$

$$\Gamma(s;\,\xi)=\Gamma\left(\frac{s+a_1}{2}-\frac{\pi i m}{2\ln\eta}\right)\Gamma\left(\frac{s+a_2}{2}+\frac{\pi i m}{2\ln\eta}\right).$$

In dieser Arbeit ist gezeigt, dass die Heckesche Zetafunktion $\zeta(s,\Xi,\mathfrak{K})$, die für $\mathrm{Re}\,s>1$ durch eine Dirichletische Reihe (1) und für $\mathrm{Re}\,s<0$ vermöge der Funktionalgleichung ebenfalls durch eine konvergente Reihe repräsentiert wird, im kritischen Streifen $0\leqslant\mathrm{Re}\,s\leqslant1$ durch die Partialsummen dieser beiden Reihen approximativ darstellbar ist. Diese approximative Funktionalgleichung lautet:

Für $s=\sigma+it$, $\nu=\dfrac{2\pi m}{\ln\eta}$, $X\geqslant1$, $Y\geqslant1$, $C_1<\dfrac{X}{Y}<C_2$, $\sqrt{|4t^2-\nu^2|}=4\pi\sqrt{\dfrac{XY}{dN\mathfrak{m}}}$

$-M<\sigma<M$ gilt gleichmässig in X, s und ν

$$\zeta(s,\,\Xi,\,\mathfrak{K})=\sum_{\substack{\alpha\in\mathfrak{K},\ \alpha\neq0\\ |N\alpha|<X}}{}^{*}\,\Xi(\alpha)\,|N\alpha|^{-s}+\psi(s)\sum_{\substack{\beta\in\mathfrak{K}',\ \beta\neq0\\ |N\beta|<Y}}{}^{*}\,\bar{\Xi}(\beta)\,|N\beta|^{s-1}+$$

$$+\,O\left\{X^{\frac{1}{2}-\sigma}\sqrt{\frac{|2t|+|\nu|}{1+\big||2t|-|\nu|\big|}}\,\ln(e+|2t+\nu|)\ln(e+|2t-\nu|)\right\}.$$