IX LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1969

УДК – 513

О ГЕОМЕТРИИ НОРМАЛЬНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

В. И. БЛИЗНИКАС

Методом Г. Ф. Лаптева [4] рассматривается один вариант геометризации систем дифференциальных уравнений следующего вида

$$\frac{\partial^{p+1} x^i}{\partial u^{\alpha_1} \ldots \partial u^{\alpha_{p+1}}} + H^i_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p+1}}(x, u, p^k_\beta, \ldots, p^k_{\beta_1 \ldots \beta_p}) = 0, \tag{1}$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, n; \quad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m < n),$$

где

$$p^i_{\beta_1 \ldots \beta_a} = \frac{\partial^a x^i}{\partial u^{\beta_1} \ldots \partial u^{\beta_\alpha}}.$$

Геометризации этой системы дифференциальных уравнений (когда $p=1, 2$) посвещены работы И. Дугласа [7], Е. Бортолотти [5], С. Хокари [8], Т. Окубо [11], общий случай (p-произвольное) рассматривал только А. Кавагути и Хомбу [10], которые к системе (1) присоединяли различные объекты связностей, предполагая, что задан симметрический невырожденный тензор $g^{\alpha\beta}$ (первое дифференциальное продолжение этого тензора и объекта $H^i_{\alpha(p+1)}$ охватывает объект аффинной связности $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$).

А. Кавагути и Г. Хомбу отметили, что построение объекта $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$, охваченного дифференциальными продолжениями объекта $H^i_{\alpha(p+1)}$, составляет трудную задачу геометрии системы дифференциальных уравнений (1). В заметке излагается решение этой задачи (проблемы Кавагути), которое было доложено автором на Международном Конгрессе Математиков в Москве (1966), на заседании Польского Математического общества в Вроцлаве и на заседании геометрического семинара в Кракове (1968). Часть результатов этой заметки было доложено автором на заседаниях Геометрического семинара при Отделе математики Института научной информации АН СССР в 1966 и 1967 годах.

§ 1. ПРОСТРАНСТВО m-МЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ЕЛЕМЕНТОВ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

1. Структурные уравнения

Если V_n – n-мерное дифференцируемое многообразие класса C^ω, локальные координаты которого являются первыми интегралами системы дифференциальных уравнений

$$\omega^i = 0, \tag{2}$$

где

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega^i_k, \tag{3}$$

то с ним связывается последовательность главных расслоенных многообразий $V_n^{(1)}, V_n^{(2)}, \ldots, V_n^{(p)}$, у которых общей базой является исходное многообразие V_n, а структурными группами — дифференциальные группы соответствующих порядков, т.е. $GL(n, R)$, $GL^2(n, R)$, $\ldots$, $GL^p(n, R)$. Структурные уравнения многообразия $V_n^{(p)}$ имеют вид (1) и

$$D\omega^i_{j_1\ldots j_a} = \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!\,(a-s)!}\,\omega^k_{(j_1\ldots j_s}\wedge\omega^i_{j_{s+1}\ldots j_a)\,k} + \omega^k\wedge\omega^i_{j_1\ldots j_a k},$$

$$(a=1,\ 2,\ \ldots,\ p), \tag{4}$$

а левоинвариантными формами дифференциальной группы $GL^p(n, R)$ являются формы $\Theta^i_{j_1\ldots j_a}$ $(a=1,\ 2,\ \ldots,\ p)$:

$$\Theta^i_{j_1\ldots j_a} = \omega^i_{j_1\ldots j_a}\big|_{\omega^k=0}.$$

Структурные уравнения группы $GL^p(n, R)$ имеют вид

$$D\Theta^i_{j_1\ldots j_a} = \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!\,(a-s)!}\,\Theta^k_{(j_1\ldots j_s}\wedge\Theta^i_{j_{s+1}\ldots j_a)\,k}. \tag{5}$$

Пусть V_m — m-мерное дифференцируемое многообразие того же класса, что и V_n, причем $\dim V_m < \dim V_n$. Если f-гладкое локально-сюръективное отображение многообразия V_m в V_n:

$$f: V_m \to V_n$$

и Θ^α — формы, играющие роль форм ω^i для V_n (формам $\omega^i_{j_1\ldots j_a}$ соответствуют формы $\Theta^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_a}$, имеющие аналогичную структуру), то

$$\omega^i = p^i_\alpha\,\Theta^\alpha. \tag{6}$$

Эта система дифференциальных уравнений является определяющей системой дифференциальных уравнений погруженного многообразия V_m в V_n.

Последовательное продолжение системы (6) дает:

$$dp^i_\alpha + p^k_\alpha\,\omega^i_k - p^i_\beta\,\Theta^\beta_\alpha = p^i_{\alpha\beta}\,\Theta^\beta,$$

$$dp^i_{\alpha\beta} + p^k_{\alpha\beta}\,\omega^i_k + p^k_\alpha p^h_\beta\,\omega^i_{kh} - 2p^i_{\gamma(\alpha}\,\Theta^\gamma_{\beta)} - p^i_\gamma\,\Theta^\gamma_{\alpha\beta} = p^i_{\alpha\beta\gamma}\,\Theta^\gamma,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{7}$$

$$dp^i_{\alpha_1\ldots\alpha_a} + \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!}\,\omega^i_{k_1\ldots k_s} \sum_{(j_1+\ldots+j_s=a)} \frac{1}{j_1!\ldots j_s!}\,p^{k_1}_{(\alpha_1\ldots\alpha_{j_1}}\ldots\times$$

$$\times\,p^{k_s}_{\alpha_{j_1+\ldots+j_{s-1}+1}\ldots\alpha_s)} - \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!\,(a-s)!}\,\Theta^\beta_{(\alpha_1\ldots\alpha_s}p^i_{\alpha_{s+1}\ldots\alpha_a)\,\beta} = p^i_{\alpha_1\ldots\alpha_a\gamma}\,\Theta^\gamma,$$

где

$$p^i_{[\alpha_1\ldots\alpha_a]} = 0 \quad (a>1,\ \text{для любого } a).$$

Если $\omega^i=0$, $\Theta^\alpha=0$, то система дифференциальных уравнений (7) принимает вид

$$dp^i_\alpha+p^k_\alpha \mathfrak{d}^i_k-p^i_\beta \mathfrak{d}^\beta_\alpha=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{8}$$

$$dp^i_{\alpha_1\ldots\alpha_a}+\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!}\mathfrak{d}^i_{k_1\ldots k_s}\sum_{(j_1+\ldots+j_s=a)}\frac{1}{j_1!\ldots j_s!}p^{k_1}_{(\alpha_1\ldots\alpha_{j_1}}\ldots\times$$

$$\times p^{k_s}_{\alpha_{j_1+\ldots+j_{s-1}+1}\ldots\alpha_s)}-\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!(a-s)!}\mathfrak{d}^\beta_{(\alpha_1\ldots\alpha_s}p^i_{\alpha_{s+1}\ldots\alpha_a)\beta}=0,$$

где $\mathfrak{d}^\gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_a}$ — инвариантные формы дифференциальной группы $GL^p(m, R)$, т.е.

$$\mathfrak{d}^\gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_a}=\Theta^\gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_a}\big|_{\Theta^\alpha=0}.$$

Так как система (8) вполне интегрируема, то первые интегралы этой системы образуют дифференциально-геометрический объект относительно группы Ли $GL^p(n, R)\times GL^p(m, R)$, т.е. система дифференциальных уравнений (7) определяет пространство представления прямого произведения дифференциальных групп $GL^p(n, R)$ и $GL^p(m, R)$. Этот дифференциально-геометрический объект называется струей p-го порядка в смысле Эресманна (или коллотой), присоединенной к паре (V_n, V_m). Опорный элемент, образованный из точки (x^i, u^α) многообразия $V_n\times V_m$ и струи p-го порядка, называется m-мерным поверхностным элементом p-го порядка. Специальные струи Эресманна получаются тогда, когда группы $GL^p(n, R)$ и $GL^p(m, R)$ заменяются подгруппами. Если группу $GL^p(m, R)$ заменим тождественным преобразованием, то в этом случае m-мерный поверхностный элемент p-го порядка называется m-мерным линейным элементом p-го порядка (или полуголономной струей p-го порядка).

Рассмотрим систему

$$\omega^i=0,\ \mathfrak{d}^i_\alpha=0,\ \ldots,\ \mathfrak{d}^i_{\alpha_1\ldots\alpha_p}=0, \tag{9}$$

где

$$\mathfrak{d}^i_{\alpha_1\ldots\alpha_a}=dp^i_{\alpha_1\ldots\alpha_a}+\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!}\omega^i_{k_1\ldots k_s}\sum_{(j_1+\ldots+j_s=a)}\frac{1}{j_1!\ldots j_s!}\times$$

$$\times p^{k_1}_{(\alpha_1\ldots\alpha_{j_1}}\ldots p^{k_s}_{\alpha_{j_1+\ldots+j_{s-1}+1}\ldots\alpha_a)}-\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!(a-s)!}\mathfrak{d}^\gamma_{(\alpha_1\ldots\alpha_s}p^i_{\alpha_{s+1}\ldots\alpha_a)\gamma}. \tag{10}$$

Эта система вполне интегрируема и ее первые интегралы являются локальными координатами пространства m-мерных параметризированных поверхностных элементов p-го порядка $\mathring{K}^{(p)}_{n,m}$ (параметризация фиксирована, но векторы касательного пространства p-го порядка дифференцируемого многообразия V_m выбираются с точностью до преобразований дифференциальной группы $GL^p(m, R)$). Структурные уравнения пространства $\mathring{K}^{(p)}_{n,m}$ имеют вид

$$D\omega^i=\omega^k\wedge\omega^i_k,$$

$$D\mathfrak{d}^i_{\alpha_1\ldots\alpha_a}=\sum_{c=1}^{a}\mathfrak{d}^k_{\beta_1\ldots\beta_c}\wedge\mathfrak{d}^{i\beta_1\ldots\beta_c}_{\alpha_1\ldots\alpha_a k}+\omega^k\wedge\mathfrak{d}^i_{\alpha_1\ldots\alpha_a k}, \tag{11}$$

где

$$\mathfrak{b}^i_{\alpha_1\ldots\alpha_a h}=\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!}\,\omega^i_{k_1\ldots k_s h}\sum_{(j_1+\ldots+j_s=a)}\frac{1}{j_1!\ldots j_s!}\times$$

$$\times p^{k_1}_{(\alpha_1\ldots\alpha_{j_1}}\ldots p^{k_s}_{\alpha_{j_1+\ldots+j_{s-1}+1}\ldots\alpha_a)} \tag{12}$$

и

$$\mathfrak{b}^{i\beta_1\ldots\beta_c}_{\alpha_1\ldots\alpha_a k}=\frac{\partial\mathfrak{b}^i_{\alpha_1\ldots\alpha_a}}{\partial p^i_{\beta_1\ldots\beta_c}}\,. \tag{13}$$

Если $\mathfrak{b}^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_a}=0$ $(a=1,\,2,\,\ldots,\,p)$, то пространство $\overset{\circ}{K}{}^{(p)}_{n,m}$ является пространством m-мерных линейных элементов p-го порядка $L^{(p)}_{n,m}$.

Система

$$\omega^i=0,\ \Theta^\alpha=0,\ \Theta^i_\alpha=0,\ \ldots,\ \Theta^i_{\alpha_1\ldots\alpha_p}=0, \tag{14}$$

где формы $\Theta^i_{\alpha_1\ldots\alpha_a}$ определены такими же формулами как и $\mathfrak{b}^i_{\alpha_1\ldots\alpha_a}$, но только формы $\mathfrak{b}^\beta_{\alpha_1\ldots\alpha_a}$ заменены формами $\Theta^\beta_{\alpha_1\ldots\alpha_a}$, является вполне интегрируемой и ее первые интегралы являются локальными координатами пространства опорных элементов $K^{(p)}_{n,m}$. Базой пространства $K^{(p)}_{n,m}$ является прямое произведение многообразий V_n и V_m, а слоем – пространство значений струй p-го порядка в смысле Эресманна. Пространство $\overset{\circ}{K}{}^{(p)}_{n,m}$ является подпространством пространства $K^{(p)}_{n,m}$. Структурные уравнения пространства $K^{(p)}_{n,m}$ имеют вид

$$D\omega^i=\omega^k\wedge\omega^i_k,\quad D\Theta^\alpha=\Theta^\beta\wedge\Theta^\alpha_\beta,$$

$$D\Theta^i_{\alpha_1\ldots\alpha_a}=\sum_{c=1}^{a}\Theta^k_{\beta_1\ldots\beta_c}\wedge\Theta^{i\beta_1\ldots\beta_c}_{\alpha_1\ldots\alpha_a k}+$$

$$+\,\omega^k\wedge\Theta^i_{\alpha_1\ldots\alpha_a k}+\Theta^\gamma\wedge\Theta^i_{\alpha_1\ldots\alpha_a,\gamma}, \tag{15}$$

где

$$\Theta^{i\beta_1\ldots\beta_c}_{\alpha_1\ldots\alpha_a k}=\frac{\partial\Theta^i_{\alpha_1\ldots\alpha_a}}{\partial p^k_{\beta_1\ldots\beta_c}}\,, \tag{16}$$

$$\Theta^i_{\alpha_1\ldots\alpha_a k}=\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!}\,\omega^i_{k_1\ldots k_s k}\sum_{(j_1+\ldots+j_s=a)}\frac{1}{j_1!\ldots j_s!}\times$$

$$\times p^{k_1}_{(\alpha_1\ldots\alpha_{j_1}}\ldots p^{k_s}_{\alpha_{j_1\ldots j_{s-1}+1}\ldots\alpha_a)}, \tag{17}$$

$$\Theta^i_{\alpha_1\ldots\alpha_a,\gamma}=-\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\,\Theta^\beta_{\gamma(\alpha_1\ldots\alpha_s}p^i_{\alpha_{s+1}\ldots\alpha_a)\beta}. \tag{18}$$

Если $b>a$, то $\Theta^{i\beta_1\ldots\beta_b}_{\alpha_1\ldots\alpha_a k}=0$ и при $b=a$

$$\Theta^{i\beta_1\ldots\beta_a}_{\alpha_1\ldots\alpha_a k}=\omega^i_k\,\mathfrak{S}^{\beta_1\ldots\beta_a}_{\alpha_1\ldots\alpha_a}-a\,\delta^i_k\,\Theta^{\gamma_1}_\gamma\,\delta^\gamma_{(\alpha_1}\delta^{\gamma_2}_{\alpha_2}\ldots\delta^{\gamma_a}_{\alpha_a)}\,\mathfrak{S}^{\beta_1\ldots\beta_a}_{\gamma_1\ldots\gamma_a}, \tag{19}$$

где

$$\mathfrak{S}^{\beta_1\ldots\beta_a}_{\alpha_1\ldots\alpha_a}=\frac{a!}{\gamma_1!\ldots\gamma_c!}\,S^{\beta_1\ldots\beta_a}_{\alpha_1\ldots\alpha_a}, \tag{20}$$

$$S^{\beta_1\ldots\beta_a}_{\alpha_1\ldots\alpha_a}=\delta^{\beta_1}_{(\alpha_1}\delta^{\beta_2}_{\alpha_2}\ldots\delta^{\beta_a}_{\alpha_a)}, \tag{21}$$

причем c-число различных индексов между $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_a$ и $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_c$ — число равных между собой индексов $(\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_c=a)$. Оператор $S^{\beta_1 \ldots \beta_a}_{\alpha_1 \ldots \alpha_a}$ называется оператором симметризации, а $\mathfrak{S}^{\beta_1 \ldots \beta_a}_{\alpha_1 \ldots \alpha_a}$ — нормированным оператором симметризации.

Заметим, что формы

$$\Theta^{i\beta}_{\alpha k},\ \Theta^{i\beta\gamma}_{\alpha\varepsilon k},\ \ldots,\ \Theta^{i\beta_1 \ldots \beta_a}_{\alpha_1 \ldots \alpha_a k}$$

связаны между собой некоторыми линейными соотношениями с постоянными коэффициентами. Это следует из равенств (19), которые показывают, что рассматриваемые формы выражаются через ω^i_k и Θ^α_β (коэффициенты постоянные). Когда $\Theta^\alpha_{\beta_1 \ldots \beta_a}=0$ (для любого a), то формы $\Theta^{i\beta_1 \ldots \beta_b}_{\alpha_1 \ldots \alpha_a j}$ связаны между собой соотношениями

$$\Theta^{i\beta_1 \ldots \beta_t}_{\alpha_1 \ldots \alpha_t j}=\frac{r!\,(t-u)!}{t!\,(r-u)!}\,\delta^{\beta_1}_{((\alpha_1} \ldots \delta^{\beta_u}_{\alpha_u)}\,\Theta^{i\beta_{u+1} \ldots \beta_t}_{\alpha_{u+1} \ldots \alpha_r)j}. \tag{22}$$

Если $t=u$, то эти соотношения принимают вид $(t \leqslant r)$

$$\Theta^{i\beta_1 \ldots \beta_t}_{\alpha_1 \ldots \alpha_r j}=\frac{r!}{t!\,(r-t)!}\,\delta^{\beta_1}_{((\alpha_1} \ldots \delta^{\beta_t}_{\alpha_t)}\,\Theta^{i}_{\alpha_{t+1} \ldots \alpha_r)j}. \tag{23}$$

Так как формы $\omega^i_j, \Theta^i_{\alpha j}, \Theta^i_{\alpha_1\alpha_2 j}, \ldots, \Theta^i_{\alpha_1 \ldots \alpha_p j}$ являются линейно независимыми формами (в общем случае), то при помощи (23) всегда можно выбрать формы $\Theta^{i\beta_1 \ldots \beta_t}_{\alpha_1 \ldots \alpha_r j}$ только через линейно независимые формы.

Дифференцируя внешним образом (16), мы получим

$$D\Theta^{i\beta_1 \ldots \beta_b}_{\alpha_1 \ldots \alpha_a k}=\sum_{c=1}^{a}\Theta^{h\beta_1 \ldots \beta_b}_{\gamma_1 \ldots \gamma_c k}\wedge\Theta^{i\gamma_1 \ldots \gamma_c}_{\alpha_1 \ldots \alpha_a h}+$$

$$+\sum_{c=1}^{a}\Theta^{h}_{\gamma_1 \ldots \gamma_c}\wedge\Theta^{i\gamma_1 \ldots \gamma_c\beta_1 \ldots \beta_b}_{\alpha_1 \ldots \alpha_a hk}+\omega^h\wedge\Theta^{i\beta_1 \ldots \beta_b}_{\alpha_1 \ldots \alpha_a hk}+\Theta^\gamma\wedge\Theta^{i\beta_1 \ldots \beta_b}_{\alpha_1 \ldots \alpha_a,\gamma k}, \tag{24}$$

где

$$\Theta^{i\gamma_1 \ldots \gamma_c,\beta_1 \ldots \beta_b}_{\alpha_1 \ldots \alpha_a hk}=\frac{\partial^2\Theta^i_{\alpha_1 \ldots \alpha_a}}{\partial p^h_{\gamma_1 \ldots \gamma_c}\,\partial p^k_{\beta_1 \ldots \beta_b}}, \tag{25}$$

$$\Theta^{i\beta_1 \ldots \beta_b}_{\alpha_1 \ldots \alpha_a hk}=\frac{\partial\Theta^i_{\alpha_1 \ldots \alpha_a h}}{\partial p^k_{\beta_1 \ldots \beta_b}}, \tag{26}$$

$$\Theta^{i\beta_1 \ldots \beta_b}_{\alpha_1 \ldots \alpha_a,\gamma k}=\frac{\partial\Theta^i_{\alpha_1 \ldots \alpha_a,\gamma}}{\partial p^k_{\beta_1 \ldots \beta_b}}. \tag{27}$$

Очевидно, что

$$\Theta^{i\gamma_1 \ldots \gamma_c,\beta_1 \ldots \beta_b}_{\alpha_1 \ldots \alpha_a hk}=0 \qquad (c+b>a) \tag{28}$$

и

$$\Theta^{i\beta_1 \ldots \beta_a}_{\alpha_1 \ldots \alpha_a,\gamma k}=0, \quad \Theta^{i\beta_1 \ldots \beta_b}_{\alpha_1 \ldots \alpha_a kh}=0 \qquad (b>a), \tag{29}$$

Для более компактной записи структурных уравнений пространства $K^{(p)}_{n,m}$, мы введем обозначения $(\beta_a)=\beta_1\cdots\beta_a$.

Тогда уравнения (15) примут вид

$$D\Theta^i_{\alpha\,(a)}=\sum_{b=0}^{a}\Theta^k_{\beta\,(b)}\wedge\Theta^{i\beta\,(b)}_{\alpha\,(a)\,k}+\Theta^\gamma\wedge\Theta^i_{\alpha\,(\alpha),\,\gamma}, \tag{15'}$$

а (24) – вид

$$D\Theta^{i\beta\,(b)}_{\alpha\,(a)\,k}=\sum_{c=1}^{a}\Theta^{h\beta\,(b)}_{\gamma\,(c)\,k}\wedge\Theta^{i\gamma\,(c)}_{\alpha\,(a)\,h}+$$

$$+\sum_{c=0}^{a}\Theta^h_{\gamma\,(c)}\wedge\Theta^{i\gamma\,(c)\,\beta\,(b)}_{\alpha\,(a)\,hk}+\Theta^\gamma\wedge\Theta^{i\beta\,(b)}_{\alpha\,(a)\,k,\,\gamma}. \tag{24'}$$

Заметим, что формы $\Theta^i_{\alpha_1\ldots\alpha_a k}$ не содержат форм $\Theta^\alpha_\beta,\ \ldots,\ \Theta^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_a}$, а формы $\Theta_{\alpha_1\ldots\alpha_a,\,\gamma}$ – форм $\omega^i_j,\ \ldots,\ \omega^i_{j_1\ldots j_a}$.

2. Дифференциальные группы пространства $K^{(p)}_{n,m}$

Пфаффовые формы

$$\chi^{i\beta^1_1\ldots\beta^1_{c^1}\beta^2_1\ldots\beta^2_{c^2}\ldots\beta^u_{c^u}}_{\alpha_1\ldots\alpha_a k^1k^2\ldots k^u}=\left.\frac{\partial^u\Theta^i_{\alpha_1\ldots\alpha_a}}{\partial p^{k^1}_{\beta^1_1\ldots\beta^1_{c^1}}\cdots\partial p^{k^u}_{\beta^u_1\ldots\beta^u_{c^u}}}\right|_0 \tag{30}$$

являются инвариантными формами дифференциальной группы порядка u пространства опорных элементов $K^{(p)}_{n,m}$. Эти формы отличны от нуля только при $c^1+\ldots+c^u\leqslant a$ $(a,\ c^1,\ \ldots,\ c^u=1,2,\ \ldots,\ p)$. Введем обозначения

$$\chi^{i\,(\beta_{c^1})\,(\beta_{c^2})\,\ldots\,(\beta_{c^u})}_{(\alpha_a)\,k^1k^2\ldots k^u}=\chi^{i\beta^1_1\ldots\beta^u_{c^u}}_{\alpha_1\ldots\alpha_a k^1\ldots k^u}.$$

Структурные уравнения для форм $\chi^{i\,(\beta_b)}_{(\alpha_a)\,k}$ имеют вид

$$D\chi^{i\,(\beta_b)}_{(\alpha_a)\,k}=\chi^{h\,(\beta_b)}_{(\gamma_c)\,k}\wedge\chi^{i\,(\gamma_c)}_{(\alpha_a)\,h}. \tag{31}$$

Эти формы являются левоинвариантными формами дифференциальной группы первого порядка, которую обозначим через $GL(n,m,p)$. Структурные уравнения дифференциальной группы порядка s, т.е. группы $GL^s(n,m,p)$, имеют вид $(u=1,2,\ \ldots,\ s)$

$$D\chi^{i\,(\beta_{b^1})\,\ldots\,(\beta_{b^u})}_{(\alpha_a)\,k^1\ldots k^u}=\sum_{t=1}^{u}\frac{u!}{t!\,(u-t)!}\,\chi^{h\,(\beta_{b^1})\,\ldots\,(\beta_{b^t})}_{(\gamma_c)<k^1\ldots k^t}\wedge\chi^{i\,(\gamma_c)\,(\beta_{b^{s+1}})\,\ldots\,(\beta_{b^u})}_{|(\alpha_a)hk|\,k^{s+1}\ldots k^u>}, \tag{32}$$

где скобки $<\ldots>$ означают симметризацию по группам индексов, например,

$$a^{(\beta_{b^1})\,\ldots\,(\beta_{b^u})}_{<k^1\ldots k^u>}=\frac{1}{2}\left(a^{(\beta_{b^1})\,\ldots\,(\beta_{b^u})}_{k^1\ldots k^u}+a^{(\beta_{b^u})\,\ldots\,(\beta_{b^1})}_{k^u\ldots k^1}\right).$$

§ 2. МНОГОМЕРНЫЕ ЭКСТЕНЗОРРЫ

В 1935 г. Крэйг ввел понятие экстензора [6], которое является непосредственным обобщением тензора. Экстензорное исчисление применяется к исследованию обобщенных пространств Финслера, т.е. таких пространств, в которых длина дуги кривой задается интегралом ($p > 1$)

$$\int_{t_1}^{t_2} F\left(x^k, \frac{dx^k}{dt}, \ldots, \frac{d^p x^k}{dt^p}\right) dt.$$

А. Кавагути обобщил понятие экстензора [9], т.е. разработал основы многомерного экстензорного исчисления, которое применяется к исследованию геометрии интеграла ($p > 1$)

$$\underbrace{\int \cdots \int}_{p} F\left(x^i, \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}, \ldots, \frac{\partial^p x^i}{\partial u^{\alpha_1} \ldots \partial u^{\alpha_p}}\right) du^1 \wedge \ldots \wedge du^p.$$

Мы рассмотрим многомерные экстензоры с точки зрения метода Г. Ф. Лаптева, согласно которому любой дифференциально-геометрический объект можно интерпретировать как точку пространства представления некоторой группы Ли и определить при помощи вполне интегрируемой системы дифференциальных уравнений. Рассмотрим группу $\overset{\circ}{G}L(n, m, p)$ пространства $L^{(p)}_{n,m}$, инвариантные формы $\overset{\circ}{\chi}{}^{i\alpha(\alpha)}_{\beta(b)j}$ которой отличаются от инвариантных форм группы $GL(n, m, p)$ пространства $K^{(p)}_{n.m}$ только тем, что в их состав не входят формы $\mathfrak{d}^{\alpha}_{\beta_1\ldots\beta_a}$ (a – любое натуральное число). Группа $\overset{\circ}{G}L(n, m, p)$ является группой преобразований векторов касательного пространства $T^{(p)}$ пространства $L^{(p)}_{n,m}$. Инфинитезимальные преобразования векторов репера $\{e_i, e_i^{\alpha_1}, \ldots, e_i^{\alpha_1\cdots\alpha_p}\}$ пространства $T^{(p)}$ можно представить в виде

$$de_i^{\alpha(a)} = \overset{\circ}{\chi}{}^{k\alpha(\alpha)}_{\beta(b)i} e_k^{\beta(b)}, \tag{33}$$

где положено, что $e_i = e_i^{\beta(0)}$, а произвольного корепера $\{e^i, e^i_{\alpha_1}, \ldots, e^i_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\}$ дуального пространства $T^{*(p)}$ – в виде

$$de^i_{\alpha(a)} = -\overset{\circ}{\chi}{}^{i\beta(a)}_{\cdot\alpha(a)k} e^k_{\beta(b)}. \tag{34}$$

Рассмотрим тензорное произведение пространств $T^{(p)}$ и $T^{*(p)}$.

$$\overset{r}{\otimes} T^{(p)} \overset{r^*}{\otimes} T^{*(p)}.$$

Элементы этого нового векторного пространства и называются r-раз эксковариантными и r^*-раз эксконтравариантными m-мерными экстензорами. Если $T \in \overset{r}{\otimes} T^{(p)} \overset{r^*}{\otimes} T^{*(p)}$, то

$$T = T^{i^1\ldots i^r\beta(b^1)\ldots\beta(b^{r^*})}_{\alpha(a^1)\ldots\alpha(a^r)j^1\ldots j^{r^*}} e^{\alpha(a^1)\ldots\alpha(a^r)j^1\ldots j^{r^*}}_{i^1\ldots i^r\beta(b^1)\ldots\beta(b^r)}, \tag{35}$$

где

$$e^{\alpha(a^1)\ldots\alpha(a^r)j^1\ldots j^{r^*}}_{i^1\ldots i^r\beta(b^1)\ldots\beta(b^{r^*})} = e^{\alpha(a^1)}_{i'} \otimes \ldots \otimes e^{j^{r^*}}_{\beta(b^{r^*})},$$

т.е. эти векторы образуют индуцированный базис пространства $\overset{r}{\otimes} T^{(p)} \overset{r^*}{\otimes} T^{*(p)}$.

Условия инвариантности m-мерного экстензора $T \in \overset{r}{\otimes} T^{(p)} \overset{r^*}{\otimes} T^{*(p)}$ относительно инфинитезимальных преобразований реперов пространств $T^{(p)}$ и $T^{*(p)}$, определенных уравнениями (33) и (34), имеют вид

$$dT^{i' \dots i^r \beta(b^1) \dots \beta(b^{r^*})}_{\alpha(a^1) \dots \alpha(a^r) j^1 \dots j^{r^*}} - T^{k \dots i^r \beta(b^1) \dots \beta(b^{r^*})}_{\gamma(c) \dots \alpha(a^r) j^1 \dots j^{r^*}} \overset{\circ}{\chi}{}^{i^1 \gamma(c)}_{k\alpha(a^1)} -$$

$$- \dots + T^{i^1 \dots i^r (b^1) \dots \gamma(c)}_{\alpha(a^1) \dots \alpha(a^r) j^1 \dots k} \overset{\circ}{\chi}{}^{k\beta(b^{r^*})}_{j^{r^*}\gamma(c)} = 0. \tag{36}$$

Многомерные экстензорные поля определяются такими же образами, как и тензорные поля. Очевидно, что понятие m-мерного экстензора можно обобщить, заменяя группу $\overset{\circ}{G}L(n, m, p)$ группой $GL(n, m, p)$.

§ 3. ГЕОМЕТРИЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Систему дифференциальных уравнений (1) можно рассматривать как конечные уравнения, связывающие локальные координаты пространства $K^{(p+1)}_{n,m}$, причем функции $H^i_{\alpha(p+1)}$ определены на пространстве $K^{(p)}_{n,m}$. Так как

$$\dim K^{(p+1)}_{n,m} = n + m + n \left\{ m + \frac{m(m+1)}{2!} + \dots + \frac{m(m+1)\dots(m+p)}{(p+1)!} \right\},$$

то уравнения (1) можно рассматривать как конечные уравнения $n+m+$ $+n\left\{ m + \frac{m(m+1)}{2!} + \dots + \frac{m(m+1)\dots(m+p-1)}{p!} \right\}$-мерной поверхности пространства $K^{(p+1)}_{n,m}$. Геометрия этой поверхности и называется внутренней геометрией системы дифференциальных уравнений (1) относительно прямого произведения псевдогрупп преобразований

$$x^{i'} = x^{i'}(x^i), \quad u^{\alpha'} = u^{\alpha'}(u^\alpha).$$

1. Фундаментальный объект

Если $u^{\alpha'} = u^{\alpha'}(u^\alpha)$, то частные производные функций $x^i(u^\alpha)$ преобразуются следующим образом (см., например, [2]):

$$\frac{\partial^a x^i}{\partial u^{\alpha'_1} \dots \partial u^{\alpha'_a}} = \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!} \frac{\partial^s x^i}{\partial u^{\alpha_1} \dots \partial u^{\alpha_s}} \sum_{(a_1 + a_2 + \dots + a_s = a)} \frac{1}{a_1! \dots a_s!} \times$$

$$\times \frac{\partial^{\alpha_1} u^{\beta_1}}{\partial u^{(\alpha'_1} \dots \partial u^{\alpha'_{a_1}}} \dots \frac{\partial^{a_s} u^{\beta_s}}{\partial u^{\alpha'_{q+1}} \dots \partial u^{\alpha'_a)}} \quad (q = a_1 + a_2 + \dots + a_{s-1}), \tag{37}$$

т.е. этой формулой определяются конечные преобразования величин $p^i_{\alpha_1 \dots \alpha_a}$ в голономном репере $(\omega^i = dx^i, \Theta^\alpha = du^\alpha)$ относительно преобразований продолженной псевдогруппы $u^{\alpha'} = u^\alpha(u'^\alpha)$. Частные производные функций $x^i(u^{\alpha'})$ и $x^{i'}(u^{\alpha'})$ связываются такими же уравнениями, как и (37), но только „i“ заменяется на „i'“.

Если $x^{i'}=x^{i'}(x^i)$, то частные производные функций $x^i(u^\alpha)$ и $x^{i'}(u^\alpha)$ связаны следующими соотношениями:

$$\frac{\partial^s x^{i'}}{\partial u^{\alpha_1}\dots\partial u^{\alpha_s}}=\sum_{r=1}^{s}\frac{s!}{r!}\frac{\partial^r x^{i'}}{\partial x^{k_1}\dots\partial x^{k_r}}\sum_{(l_1+l_2+\dots+l_r=s)}\frac{1}{l_1!\dots l_r!}\times$$

$$\times\frac{\partial^{l_1}x^{k_1}}{\partial u^{(\alpha_1}\dots\partial u^{\alpha_{l_1}}}\cdots\frac{\partial^{l_r}x^{k_r}}{\partial u^{\alpha_{t+1}}\dots\partial u^{\alpha_s)}}\quad(t=l_1+l_2+\dots+l_{r-1}).\tag{38}$$

Из (37) и (38) следует, что величины $p^i_{\alpha_1\dots\alpha_a}=\dfrac{\partial^a x^i}{\partial u^{\alpha_1}\dots\partial u^{\alpha_a}}$ преобразуются следующим образом

$$p^{i'}_{\alpha'_1\dots\alpha'_a}=a!\sum_{s=1}^{a}\sum_{r=1}^{s}\frac{1}{r!}\frac{\partial^r x^{i'}}{\partial x^{k_1}\dots\partial x^{k_r}}\times$$

$$\times\sum_{(l_1+l_2+\dots+l_r=s)}\frac{1}{l_1!\dots l_r!}p^{k_1}_{(\alpha_1\dots\alpha_{l_1}}\cdots p^{k_r}_{\alpha_{t+1}\dots\alpha_s)}\times$$

$$\times\sum_{(a_1+\dots+a_s=a)}\frac{1}{a_1!\dots a_s!}\frac{\partial^{a_1}u^{\alpha_1}}{\partial u^{(\alpha'_1}\dots\partial u^{\alpha'_{a_1}}}\cdots\frac{\partial^{a_s}u^{\alpha_s}}{\partial u^{\alpha'_{q+1}}\dots\partial u^{\alpha'_a)}}.\tag{39}$$

Условия инвариантности системы (1) имеют вид:

$$\frac{\partial^{p+1}x^{i'}}{\partial u^{\alpha'_1}\dots\partial u^{\alpha'_{p+1}}}+H^{i'}_{\alpha'_1\dots\alpha'_{p+1}}=$$

$$=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial u^{\alpha_1}}{\partial u^{\alpha'_1}}\cdots\frac{\partial u^{\alpha_{p+1}}}{\partial u^{\alpha'_{p+1}}}\left(\frac{\partial^{p+1}x^i}{\partial u^{\alpha_1}\dots\partial u^{\alpha_{p+1}}}+H^i_{\alpha_1\dots\alpha_{p+1}}\right).\tag{40}$$

Отсюда следует, что система функций $H^i_{\alpha_1\dots\alpha_{p+1}}$ образует дифференциально-геометрический объект следующей структуры:

$$H^{i'}_{\alpha'_1\dots\alpha'_{p+1}}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial u^{\alpha_1}}{\partial u^{\alpha'_1}}\cdots\frac{\partial u^{\alpha_{p+1}}}{\partial u^{\alpha'_{p+1}}}H^i_{\alpha_1\dots\alpha_{p+1}}-$$

$$-(p+1)!\sum_{s=1}^{p}\sum_{r=1}^{s}\frac{1}{r!}\frac{\partial^r x^{i'}}{\partial x^{k_1}\dots\partial x^{k_r}}\sum_{(l_1+\dots+l_r=s)}\frac{1}{l_1!\dots l_r!}\times$$

$$\times\frac{\partial^{l_1}x^{k_1}}{\partial u^{(\alpha_1}\dots\partial u^{\alpha_{l_1}}},\dots,\frac{\partial^{l_r}x^{k_r}}{\partial u^{\alpha_{t+1}}\dots\partial u^{\alpha_s)}}\sum_{(a_1+\dots+a_s=p+1)}\frac{1}{a_1!\dots a_s!}\times$$

$$\times\frac{\partial^{a_1}u^{\beta_1}}{\partial u^{(\alpha'_1}\dots\partial u^{\alpha'_{a_1}}},\dots,\frac{\partial^{a_s}u^{\beta_s}}{\partial u^{\alpha'_{q+1}}\dots\partial u^{\alpha'_a)}}-$$

$$-(p+1)!\sum_{r=2}^{p+1}\frac{1}{r!}\frac{\partial^r x^{i'}}{\partial x^{k_1}\dots\partial x^{k_r}}\sum_{(l_1+\dots+l_r=p+1)}\frac{1}{l_1!\dots l_r!}\times$$

$$\times\frac{\partial^{l_1}x^{k_1}}{\partial u^{(\alpha_1}\dots\partial u^{\alpha_{l_1}}}\cdots\frac{\partial^{l_r}x^{k_r}}{\partial u^{\alpha_{t+1}}\dots\partial u^{\alpha_{p+1})}}\frac{\partial u^{\alpha_1}}{\partial u^{\alpha'_1}}\cdots\frac{\partial u^{\alpha_{p+1}}}{\partial u^{\alpha'_{p+1}}},\tag{41}$$

где $q=a_1+\ldots+a_{s-1}$, $t=l_1+\ldots+l_{r-1}$. Таким образом, геометрия системы дифференциальных уравнений (1) относительно псевдогруппы преобразований $x^{i'}=x^{i'}(x^i)$ и $u^{\alpha'}=u^{\alpha'}(u^\alpha)$ эквивалентна геометрии пространства $K^{(p)}_{n,m}$ с дифференциально-геометрическим объектом (41), который мы будем называть фундаментальным объектом пространства $K^{(p)}_{n,m}$.

Определяющая система дифференциальных уравнений фундаментального дифференциально-геометрического объекта $H^i_{\alpha_{(p+1)}}$ имеет вид

$$\nabla H^i_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1}}-\varphi^i_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1}}=H^i_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1})k}\,\omega^k+$$
$$+H^i_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1},\gamma}\,\Theta^\gamma+H^{i\cdot\beta_1\ldots\beta_a}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1}k}\,\Theta^k_{\beta_1\ldots\beta_a}, \tag{42}$$

где

$$\varphi^i_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1}}=\sum_{s=2}^{p+1}\frac{(p+1)!}{s!}\,\omega^i_{k_1\ldots k_s}\sum_{(j_1+\ldots+j_s=p+1)}\frac{1}{j_1!\ldots j_s!}\times$$
$$\times p^{k_1}_{(\alpha_1\ldots\alpha_{j_1}}\ldots p^{k_s}_{\alpha_{q+1}\ldots\alpha_{a+1})}-\sum_{s=2}^{p+1}\frac{(p+1)!}{s!\,(p-s+1)!}\,\Theta^\gamma_{(\alpha_1\ldots\alpha_s}p^i_{\alpha_{s+1}\ldots\alpha_{p+1})\gamma}. \tag{43}$$

Таким образом, геометрия системы дифференциальных уравнений (1) эквивалентна геометрии пространства $K^{(p)}_{n,m}$ с заданным дифференциально-геометрическим объектом $H^i_{\alpha_{(p+1)}}$, который будем называть фундаментальным объектом пространства $K^{(p)}_{n,m}$. Пфаффовы формы $\varphi^i_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1}}$ имеют следующую структуру:

$$D\varphi^i_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1}}=\varphi^k_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1}}\wedge\omega^i_k-\sum_{a=1}^{p+1}\varphi^i_{\alpha_1\ldots\sigma\ldots\alpha_{p+1}}\wedge\Theta^\sigma_{\alpha_a}+$$
$$+\omega^k\wedge\varphi^i_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1}k}+\Theta^\gamma\wedge\varphi^i_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1}\gamma}+\sum_{s=1}^{p}\Theta^k_{\beta_1\ldots\beta_s}\wedge\varphi^{i\beta_1\ldots\beta_s}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1}k}, \tag{44}$$

где

$$\varphi^i_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1}k}=\sum_{s=2}^{p+1}\frac{(p+1)!}{s!}\,\omega^i_{k_1\ldots k_s k}\sum_{(j_1+\ldots+j_s=p+1)}\frac{1}{j_1!\ldots j_s!}\times$$
$$\times p^{k_1}_{(\alpha_1\ldots\alpha_{j_1}}\ldots p^{k_s}_{\alpha_{q+1}\ldots\alpha_s)}, \tag{45}$$
$$\varphi^i_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1}\gamma}=-\sum_{s=2}^{p+1}\frac{(p+1)!}{s!\,(p-s+1)!}\,\Theta^\sigma_{\gamma(\alpha_1\ldots\alpha_s}p^i_{\alpha_{s+1}\ldots\alpha_{p+1})\sigma},$$

$$\varphi^{i\beta_1\ldots\beta_s}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1}k}=\frac{\partial\varphi^i_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1}}}{\partial p^k_{\beta_1\ldots\beta_s}}. \tag{46}$$

Дифференцируя внешним образом соотношения (46), мы будем иметь

$$D\varphi^{i\beta_1\ldots\beta_a}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1}h}=\varphi^{k\beta_1\ldots\beta_a}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1}h}\wedge\omega^i_k-\sum_{c=1}^{p+1}\varphi^{i\beta_1\ldots\beta_a}_{\alpha_1\ldots\rho\ldots\alpha_{p+1}h}\wedge$$
$$\wedge\Theta^\rho_{\alpha_c}+\Theta^{k\beta_1\ldots\beta_a}_{\gamma_1\ldots\gamma_c h}\wedge\varphi^{i\gamma_1\ldots\gamma_c}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1}k}+\omega^k\wedge\varphi^{i\beta_1\ldots\beta_a}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1}hk}+$$
$$+\Theta^\sigma\wedge\varphi^{i\beta_1\ldots\alpha_a}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1}h\sigma}+\Theta^k_{\sigma_1\ldots\sigma_c}\wedge\varphi^{i\beta_1\ldots\beta_a\sigma_1\ldots\sigma_c}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1}hk}, \tag{47}$$

где, например,

$$\varphi^{i\gamma_1 \dots \gamma_t \sigma_1 \dots \sigma_c}_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1} kh} = \frac{\partial^s \varphi^i_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1}}}{\partial p^k_{\gamma_1 \dots \gamma_t} \partial p^h_{\sigma_1 \dots \sigma_c}}. \tag{48}$$

Очевидно, что

$$\varphi^{i\gamma_1 \dots \gamma_c \sigma_1 \dots \sigma_t}_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1} lk} = 0 \qquad (c+t>p+1) \tag{49}$$

и, в частности,

$$\varphi^{i\gamma_1 \dots \gamma_p \sigma_1 \dots \sigma_p}_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1} kh} = 0.$$

Первое продолжение системы (42) имеет вид

$$\begin{gathered}\nabla H^i_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1} k} + H^l_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1}} \omega^i_{lk} - H^{i}_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1} l}{}^{\cdot\beta_1 \dots \beta_a} \Theta^l_{\beta_1 \dots \beta_a k} - \\ - \varphi^i_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1} k} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \omega^k,\ \Theta^\gamma,\ \Theta^k_{\alpha_1},\ \dots,\ \Theta^k_{\alpha_1 \dots \alpha_p}),\end{gathered} \tag{50}$$

$$\begin{gathered}\nabla H^i_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1} \gamma} - \sum_{c=1}^{p+1} H^i_{\alpha_1 \dots \sigma \dots \alpha_{p+1}} \Theta^\sigma_{\alpha_c \gamma} - \\ - H^{i}_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1} l}{}^{\cdot\beta_1 \dots \beta_a} \Theta^l_{\beta_1 \dots \beta_a, \gamma} - \varphi^i_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1} \gamma} \equiv 0,\end{gathered} \tag{51}$$

$$\begin{gathered}dH^{i}_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1} k}{}^{\cdot\beta_1 \dots \beta_a} + H^{l}_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1} k}{}^{\cdot\beta_1 \dots \beta_a} \omega^i_l - \sum_{c=1}^{p+1} H^{i}_{\alpha_1 \dots \sigma \dots \alpha_{p+1} k}{}^{\cdot\beta_1 \dots \beta_a} \Theta^\sigma_{\alpha_c} - \\ - H^{i}_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1} h}{}^{\cdot\gamma_1 \dots \gamma_c} \Theta^{h\beta_1 \dots \beta_a}_{\gamma_1 \dots \gamma_c k} - \varphi^{i\beta_1 \dots \beta_a}_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1} k} = \\ = H^{i}_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1} k, l}{}^{\cdot\beta_1 \dots \beta_a} \omega + H^{i}_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1} k, \gamma}{}^{\cdot\beta_1 \dots \beta_a} \Theta^\gamma + H^{i}_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1} kh}{}^{\cdot\beta_1 \dots \beta_a \gamma_1 \dots \gamma_c} \Theta^h_{\gamma_1 \dots \gamma_c},\end{gathered} \tag{52}$$

где

$$H^{i}_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1} kh}{}^{\cdot\beta_1 \dots \beta_a \gamma_1 \dots \gamma_c} = H^{i}_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1} hk}{}^{\cdot\gamma_1 \dots \gamma_c \beta_1 \dots \beta_a}.$$

Частичное продолжение системы (52) дает

$$\begin{gathered}dH^{i}_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1} kh}{}^{\cdot\beta_1 \dots \beta_a \gamma_1 \dots \gamma_c} + H^{l}_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1} kh}{}^{\cdot\beta_1 \dots \beta_a \gamma_1 \dots \gamma_c} \omega^i_l - \\ - \sum_{e=1}^{p+1} H^{i}_{\alpha_1 \dots \sigma \dots \alpha_{p+1} kh}{}^{\cdot\beta_1 \dots \beta_a \gamma_1 \dots \gamma_c} \Theta^\sigma_{\alpha_e} - H^{i}_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1} lh}{}^{\cdot\varepsilon_1 \dots \varepsilon_e \gamma_1 \dots \gamma_c} \Theta^{l\beta_1 \dots \beta_a}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_e k} - \\ - H^{i}_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1} l}{}^{\cdot\varepsilon_1 \dots \varepsilon_e} \Theta^{l\beta_1 \dots \beta_a \gamma_1 \dots \gamma_c}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_e kh} - \varphi^{i\beta_1 \dots \beta_a \gamma_1 \dots \gamma_c}_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1} kh} \equiv \\ \equiv H^{i}_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1} khl}{}^{\cdot\beta_1 \dots \beta_a \gamma_1 \dots \gamma_c \varepsilon_1 \dots \varepsilon_e} \Theta^l_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_e} \quad (\mathrm{mod}\, \omega^k,\ \Theta^\gamma),\end{gathered} \tag{53}$$

где

$$H^{i}_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1} khl}{}^{\cdot\beta_1 \dots \beta_a \gamma_1 \dots \gamma_c \varepsilon_1 \dots \varepsilon_e} = H^{i}_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1} khl}{}^{\cdot\beta_1 \dots \beta_a \gamma_1 \dots \gamma_c \varepsilon_1 \dots \varepsilon_e}.$$

2. Тензор $H^{i\ \cdot\beta_1\ldots\beta_p\gamma_1\ldots\gamma_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1}kh}$

Докажем, что величины $H^{i\ \cdot\beta_1\ldots\beta_p\gamma_1\ldots\gamma_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1}kh}$ образуют тензор. Система дифференциальных уравнений для $H^{i\cdot\beta(p)\gamma(p)}_{\alpha(p+1)kh}$, в силу (28) и (49), имеет вид

$$dH^{i\ \cdot\beta_1\ldots\beta_p\gamma_1\ldots\gamma_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1}kh}+H^{l\ \cdot\beta_1\ldots\beta_p\gamma_1\ldots\gamma_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1}kh}\omega^i_l-$$

$$-\sum_{e=1}^{p+1}H^{i\ \cdot\beta_1\ldots\beta_p\gamma_1\ldots\gamma_p}_{\alpha_1\ldots\sigma\ldots\alpha_{p+1}kh}\Theta^\sigma_{\alpha_e}-$$

$$-H^{i\ \cdot\varepsilon_1\ldots\varepsilon_e\gamma_1\ldots\gamma_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1}lh}\Theta^{l\beta_1\ldots\beta_p}_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_e k}\equiv 0\ (\operatorname{mod}\omega^k,\ \Theta^\gamma,\ \Theta^k_{\alpha_1},\ \ldots,\ \Theta^k_{\alpha_1\ldots\alpha_p}).\quad(54)$$

Так как, в силу свойств форм $\Theta^{l\beta(a)}_{\varepsilon(b)k}$, определенных равенством (16),

$$H^{i\ \cdot\varepsilon_1\ldots\varepsilon_e\gamma_1\ldots\gamma_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1}lh}\Theta^{l\beta_1\ldots\beta_p}_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_e k}=H^{i\ \cdot\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p\gamma_1\ldots\gamma_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1}lh}\Theta^{l\beta_1\ldots\beta_p}_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p k}$$

и

$$\Theta^{l\beta_1\ldots\beta_p}_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p k}=\omega^l_k\,\delta^{\beta_1\ldots\beta_p}_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p}-p\,\delta^l_k\,\Theta^{\sigma_1}_\sigma\,\delta^\sigma_{(\varepsilon_1}\,\delta^{\sigma_2}_{\varepsilon_2}\ldots\,\delta^{\sigma_p}_{\varepsilon_p)}\,\delta^{\beta_1\ldots\beta_p}_{\sigma_1\ldots\sigma_p},$$

то

$$H^{i\ \cdot\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p\gamma_1\ldots\gamma_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1}lh}\Theta^{l\beta_1\ldots\beta_p}_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p h}=H^{i\ \cdot\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p\gamma_1\ldots\gamma_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1}lh}\omega^l_k\,\delta^{\beta_1\ldots\beta_p}_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p}-$$

$$-pH^{i\ \cdot\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p\gamma_1\ldots\gamma_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1}lh}\delta^l_k\,\Theta^{\sigma_1}_\sigma\,\delta^\sigma_{(\varepsilon_1}\,\delta^{\sigma_2}_{\varepsilon_2}\ldots\delta^{\sigma_p}_{\varepsilon_p)}\,\delta^{\beta_1\ldots\beta_p}_{\sigma_1\ldots\sigma_p}$$

или

$$H^{i\ \cdot\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p\gamma_1\ldots\gamma_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1}lh}\Theta^{l\beta_1\ldots\beta_p}_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p k}=H^{i\ \cdot\beta_1\ldots\beta_p\gamma_1\ldots\gamma_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1}lh}\omega^l_k-$$

$$-\sum_{e=1}^{p}H^{i\ \cdot\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_p\gamma_1\ldots\gamma_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1}kh}\Theta^{\beta_e}_\sigma.$$

Отсюда и следует, что система (54) имеет вид

$$\nabla H^{i\ \cdot\beta(p)\gamma(p)}_{\alpha(p+1)kh}=H^{i\ \cdot\beta(p)\gamma(p)}_{\alpha(p+1)kh,\,l}\omega^l+H^{i\ \cdot\beta(p)\gamma(p)}_{\alpha(p+1)kh,\,\varepsilon}\Theta^\varepsilon+$$

$$+H^{i\ \cdot\beta(p)\gamma(p)\varepsilon_1\ldots\varepsilon_a}_{\alpha(p+1)khl}\Theta^l_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_a},\quad(55)$$

т.е. величины $H^{i\ \cdot\beta(p)\gamma(p)}_{\alpha(p+1)kh}$ образуют тензор, охваченный вторым дифференциальным продолжением фундаментального объекта $H^i_{\alpha(p+1)}$.

3. Оператор L_α

Рассмотрим формы

$$\breve\omega^i=\omega^i-p^i_\gamma\Theta^\gamma,\quad \breve\Theta^i_{\alpha_1\ldots\alpha_a}=\Theta^i_{\alpha_1\ldots\alpha_a}-p^i_{\alpha_1\ldots\alpha_a\gamma}\Theta^\gamma,$$

$$\breve\Theta^i_{\alpha_1\ldots\alpha_p}=\Theta^i_{\alpha_1\ldots\alpha_p}+H^i_{\alpha_1\ldots\alpha_p\gamma}\Theta^\gamma\quad(56)$$

$$(a=1,\ 2,\ \ldots,\ p-1),$$

которые имеют следующую структуру

$$D\check{\omega}^i=\omega^k\wedge\omega^i_k-\check{\Theta}^i_\gamma\wedge\Theta^\gamma, \tag{57}$$

$$D\check{\Theta}^i_{\alpha_1\ldots\alpha_a}=\check{\Theta}^k_{\gamma_1\ldots\gamma_c}\wedge\Theta^{i\gamma_1\ldots\gamma_c}_{\alpha_1\ldots\alpha_a k}-\check{\Theta}^i_{\alpha_1\ldots\alpha_a\gamma}\Theta^\gamma \tag{58}$$

$(a=1,\ 2,\ \ldots,\ p-1)$,

$$D\check{\Theta}^i_{\alpha_1\ldots\alpha_p}=\check{\Theta}^k_{\gamma_1\ldots\gamma_c}\wedge\Theta^{i\gamma_1\ldots\gamma_c}_{\alpha_1\ldots\alpha_p k}+(\nabla H^i_{\alpha_1\ldots\alpha_p\gamma}-\varphi^i_{\alpha_1\ldots\alpha_p\gamma})\wedge\Theta^\gamma. \tag{59}$$

Структурные уравнения (59) можно записать в виде:

$$D\check{\Theta}^i_{\alpha_1\ldots\alpha_p}=\check{\Theta}^k_{\gamma_1\ldots\gamma_c}\wedge(\Theta^{i\gamma_1\ldots\gamma_c}_{\alpha_1\ldots\alpha_p k}+H^{i\quad\cdot\gamma_1\ldots\gamma_c}_{\alpha_1\ldots\alpha_p\gamma k}\Theta^\gamma)+$$

$$+H^i_{\alpha_1\ldots\alpha_p\gamma,k}\check{\omega}^k\wedge\Theta^\gamma+L_{[\gamma}H^i_{\varepsilon]\alpha_1\ldots\alpha_p}\Theta^\gamma\wedge\Theta^\varepsilon, \tag{59}$$

где

$$L_\gamma H^i_{\varepsilon\alpha_1\ldots\alpha_p}=H^i_{\varepsilon\alpha_1\ldots\alpha_p,\gamma}+H^i_{\varepsilon\alpha_1\ldots\alpha_p,l}p^l_\gamma+$$

$$+\sum_{a=1}^{p-1}H^{i\quad\cdot\beta_1\ldots\beta_a}_{\varepsilon\alpha_1\ldots\alpha_p}p^l_{\beta_1\ldots\beta_a\gamma}-H^{i\quad\cdot\beta_1\ldots\beta_p}_{\varepsilon\alpha_1\ldots\alpha_p l}H^l_{\beta_1\ldots\beta_p\gamma}. \tag{60}$$

Пфаффовы формы ω^i, $\check{\Theta}^i_{\alpha_1\ldots\alpha_a}$ $(a=1,\ \ldots,\ p)$ образуют вполне интегрируемую систему форм (при любом выборе форм Θ^α) тогда и только тогда, когда

$$L_{[\gamma}H^i_{\varepsilon]\alpha_1\ldots\alpha_p}=0. \tag{61}$$

Таким образом, преобразованию форм (56) соответствует оператор L_α, определенный равенством

$$L_\gamma=\frac{\partial}{\partial\Theta^\gamma}+p^l_\gamma\frac{\partial}{\partial\omega^l}+p^l_{\beta_1\ldots\beta_a\gamma}\frac{\partial}{\partial\Theta^l_{\beta_1\ldots\beta_a}}-H^l_{\beta_1\ldots\beta_p\gamma}\frac{\partial}{\partial\Theta^l_{\beta_1\ldots\beta_p}}. \tag{62}$$

Величины

$$N^i_{\alpha_1\ldots\alpha_p\gamma\varepsilon}=L_{[\gamma}H^i_{\varepsilon]\alpha_1\ldots\alpha_p} \tag{63}$$

образуют тензор, охваченный первым дифференциальным продолжением фундаментального объекта $H^i_{\alpha_{(p+1)}}$. Если тензор $N^i_{\alpha_1\ldots\alpha_p\gamma\varepsilon}=0$, то в пространстве $K^{(p)}_{n,m}$ с фундаментальным объектом $H^i_{\alpha_{(p+1)}}$ существует семейство голономных m-мерных поверхностей, которые будем называть характеристическими поверхностями пространства $K^{(p)}_{n,m}$, с фундаментальным дифференциально-геометрическим объектом $H^i_{\alpha_{(p+1)}}$. Если $N^i_{\alpha_1\ldots\alpha_p\gamma\varepsilon}\neq 0$, то характеристические поверхности тоже существуют, но только они в этом случае являются неголономными. Оператор L_α будем называть оператором характеристической производной. В частности, характеристическая производная фундаментального дифференциально-геометрического объекта $H^i_{\alpha_{(p+1)}}$ определяется равенствами (60).

4. Система дифференциальных уравнений третьего порядка

Случай $p=1$ был рассмотрен в работе [1]. Если $p=2$, то (42) принимает вид

$$\nabla H^i_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} - 3\omega^i_{k_1k_2} p^{k_1}_{(\alpha_1\alpha_2} p^{k_2}_{\alpha_3)} - \omega^i_{k_1k_2k_3} p^{k_1}_{\alpha_1} p^{k_2}_{\alpha_2} p^{k_3}_{\alpha_3} + $$
$$+ 3\Theta^{\gamma}_{(\alpha_1\alpha_2} p^i_{\alpha_3)\,\gamma} + \Theta^{\gamma}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} p^i_{\gamma} = H^i_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3,\,k}\,\omega^k +$$
$$+ H^i_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3,\,\gamma}\,\Theta^{\gamma} + H^{i\quad\cdot\gamma}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3 k}\,\Theta^k_{\gamma} + H^{i\quad\cdot\gamma\varepsilon}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3 k}\,\Theta^k_{\gamma\varepsilon}. \tag{64}$$

Последовательное частичное продолжение этой системы дает

$$\nabla H^{i\quad\cdot\gamma\varepsilon}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3 k} - 3\omega^i_{k_1k_2}\,\delta^{k_1}_k\,\delta^{\gamma}_{(\alpha_1}\,\delta^{\varepsilon}_{\alpha_2} p^{k_2}_{k_3)} + 3\Theta^{\sigma}_{(\alpha_1\alpha_2}\,\mathfrak{S}^{\gamma\varepsilon}_{\alpha_3)\,\sigma}\,\delta^i_k \equiv H^{i\quad\cdot\gamma\varepsilon\rho\sigma}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3 kh}\,\Theta^h_{\sigma\rho}, \tag{65}$$

$$\nabla H^{i\quad\cdot\gamma\varepsilon\sigma\tau}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3 kh} \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \omega^k,\ \Theta^{\gamma},\ \Theta^k_{\alpha},\ \Theta^k_{\alpha\beta}). \tag{66}$$

Из (65) следует, что

$$\nabla H^{i\ \cdot\beta\gamma}_{\alpha\beta\gamma k} - \frac{(m+1)(m+2)}{2}\,\omega^i_{kh} p^h_{\alpha} +$$
$$+ (m+2)\,\delta^i_k\,\Theta^{\sigma}_{\alpha\sigma} \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \omega^k,\ \Theta^{\gamma},\ \Theta^k_{\alpha},\ \Theta^k_{\alpha\beta}). \tag{67}$$

Свертывая эти равенства с p^k_{σ}, мы получим

$$\nabla (H^{i\ \cdot\gamma\varepsilon}_{\alpha\gamma\varepsilon k} p^k_{\sigma}) - \frac{(m+1)(m+2)}{2}\,\omega^i_{kh} p^k_{\alpha} p^h_{\sigma} + (m+2)\,p^i_{\sigma}\Theta^{\gamma}_{\alpha\gamma} \equiv 0$$

или

$$\nabla \left(\frac{1}{m+2}\,H^{i\ \cdot\gamma\varepsilon}_{\alpha\gamma\varepsilon k} p^k_{\sigma}\right) - \frac{m+1}{2}\,\omega^i_{kh} p^k_{\alpha} p^h_{\sigma} + p^i_{\sigma}\,\Theta^{\gamma}_{\alpha\gamma} \equiv 0. \tag{68}$$

Отсюда следует, что величины

$$N^i_{\alpha\beta} = \frac{1}{m+2}\,p^k_{[\alpha} H^{i\ \cdot\gamma\varepsilon}_{\beta]\gamma\varepsilon k} \tag{69}$$

являются решениями следующей системы

$$\nabla N^i_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\,(p^i_{\alpha}\,\Theta^{\sigma}_{\beta\sigma} - p^i_{\beta}\,\Theta^{\sigma}_{\alpha\sigma}) \equiv 0. \tag{70}$$

Если уравнения (70) свернем с тензором $H^{k\ \cdot\sigma\rho\tau\gamma}_{\sigma\rho\tau ki}$, то получим

$$\nabla (H^{k\ \cdot\sigma\rho\tau\gamma}_{\sigma\rho\tau ki} N^i_{\alpha\beta}) + H^{k\cdot\ \sigma\rho\tau\gamma}_{\sigma\rho\tau ki}\, p^i_{[\alpha}\,\Theta^{\lambda}_{\beta]\lambda} \equiv 0. \tag{71}$$

Предположим, что тензор

$$N^{\gamma}_{\alpha} = H^{k\ \cdot\sigma\rho\tau\gamma}_{\sigma\rho\tau ki} p^i_{\alpha} \tag{72}$$

невырожден ($N = \det\|N^{\gamma}_{\alpha}\| \neq 0$), тогда, свертывая уравнения (71) с тензором

$$\overset{*}{N}{}^{\varepsilon}_{\gamma} = \frac{1}{N}\,\frac{\partial N}{\partial N^{\gamma}_{\varepsilon}}$$

мы получим, что величины

$$N^{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \overset{*}{N}{}^{\varepsilon}_{\gamma} H^{k\ \cdot\sigma\rho\tau\gamma}_{\sigma\rho\tau ki} N^i_{\alpha\beta} \tag{73}$$

образуют дифференциально-геометрический объект следующей структуры

$$\nabla N^{\varepsilon}_{\alpha\beta} + \delta^{\varepsilon}_{[\alpha}\,\Theta^{\sigma}_{\beta]\sigma} \equiv 0, \tag{74}$$

который охватывает свернутый объект аффинной связности a_α:

$$a_\alpha = \frac{2}{m-1} N^\gamma_{\alpha\gamma}, \tag{75}$$

т.е.

$$\nabla a_\alpha - \Theta^\sigma_{\alpha\sigma} \equiv 0. \tag{76}$$

Если тензор N^α_β невырожден, то второе дифференциальное продолжение фундаментального дифференциально-геометрического объекта $H^i_{\alpha_{(s)}}$ всегда охватывает свернутый объект аффинной связности (75).

5. Характеристическая афинная связность

Рассмотрим преобразование форм

$$\tilde{\omega}^i_k = \omega^i_k + \Gamma^i_{k\alpha}\Theta^\alpha,$$

$$\tilde{\Theta}^\alpha_\beta = \Theta^\alpha_\beta + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\Theta^\gamma. \tag{77}$$

Эти формы являются формами аффинной связности (имеют тензорную структуру) вдоль характеристических поверхностей пространства $K^{(p)}_{n,m}$ тогда и только тогда, когда величины $\Gamma^i_{k\alpha}$ и $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ образуют дифференциально-геометрический объект следующей структуры:

$$\nabla \Gamma^i_{k\alpha} - p^l_\alpha \omega^i_{kl} \equiv 0, \tag{78}$$

$$\mathrm{mod}\,(\omega^k,\ \Theta^\alpha,\ \Theta^k_\alpha,\ \Theta^k_{\alpha\beta}),$$

$$\nabla \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \Theta^\alpha_{\beta\gamma} \equiv 0, \tag{79}$$

ибо

$$D\tilde{\omega}^i_k - \tilde{\omega}^l_k \wedge \tilde{\omega}^i_l = (\nabla \Gamma^i_{k\alpha} - p^l_\alpha \omega^i_{kl}) \wedge \Theta^\alpha +$$

$$+ \tilde{\omega}^l \wedge \omega^i_{kl} - \Gamma^l_{k\,[\alpha}\Gamma^i_{|l|\,\beta]}\Theta^\alpha \wedge \Theta^\beta \tag{80}$$

и

$$D\tilde{\Theta}^\alpha_\beta - \tilde{\Theta}^\gamma_\beta \wedge \tilde{\Theta}^\alpha_\gamma = (\nabla \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \Theta^\alpha_{\beta\gamma}) \wedge \Theta^\gamma. \tag{81}$$

Дифференциально-геометрический объект $(\Gamma^i_{k\alpha},\ \Gamma^\alpha_{\beta\gamma})$, который мы будем называть объектом характеристической аффинной связности пространства $K^{(p)}_{n,m}$ с фундаментальным объектом $H^i_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$, состоит из прямого произведения двух объектов $\Gamma^i_{k\alpha}$ и $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ (объект аффинной связности). Для того, чтобы построить охват объекта $\Gamma^i_{k\alpha}$ (имеется ввиду случай $p=2$), необходимо из уравнений (67) и (76) исключить формы $\Theta^\alpha_{\alpha\sigma}$. Из (67) и (76) следует, что

$$\nabla H^{i\ \cdot\gamma\varepsilon}_{\alpha\gamma\varepsilon k} - \frac{(m+1)(m+2)}{2}\,\omega^i_{kh} p^h_\alpha + (m+2)\,\delta^i_k(\nabla a_\alpha) \equiv 0$$

или

$$\nabla (H^{i\ \cdot\gamma\varepsilon}_{\alpha\gamma\varepsilon k} + (m+2)\,\delta^i_k a_\alpha) - \frac{(m+1)(m+2)}{2}\,\omega^i_{kh} p^h_\alpha \equiv 0.$$

Отсюда, в силу (79), следует, что дифференциально-геометрический объект $\Gamma^i_{k\alpha}$ охватывается вторым дифференциальным продолжением объекта $H^i_{\alpha_{(3)}}$, т.е. можно положить

$$\Gamma^i_{k\alpha} = \frac{2}{(m+1)(m+2)}\left(H^{i\ \cdot\gamma\varepsilon}_{\alpha\gamma\varepsilon k} + (m+2)\,\delta^i_k a_\alpha\right). \tag{82}$$

Для того, чтобы найти объект аффинной связности $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$, определенный внутренним образом, необходимо, например, из (65) и (79), считая, что $\Gamma^{i}_{j\alpha}$ определены формулой (82), исключить формы $\omega^{i}_{kh}p^{h}_{\alpha}$. Из (65) следует, что

$$\nabla H^{k\ \cdot\sigma\gamma}_{\alpha\beta\sigma k} - \frac{m+2}{2}\ \omega^{k}_{kh}(\delta^{\gamma}_{\beta}p^{h}_{\alpha}+\delta^{\gamma}_{\alpha}p^{h}_{\beta}) + n\,\Theta^{\gamma}_{\alpha\beta} + 2n\,\Theta^{\sigma}_{\sigma\,(\alpha}\delta^{\gamma}_{\beta)} \equiv 0. \tag{83}$$

Если

$$b_{\alpha} = \Gamma^{k}_{k\alpha}, \tag{84}$$

то

$$\nabla b_{\alpha} - \omega^{k}_{kh}p^{h}_{\alpha} \equiv 0 \tag{85}$$

и, в силу (76), (83) и (85), получаем

$$\nabla H^{k\ \cdot\sigma\gamma}_{\alpha\beta\sigma k} - (m+2)\,\delta^{\gamma}_{(\alpha}\nabla b_{\beta)} + n\,\Theta^{\gamma}_{\alpha\beta} + 2n\,\delta^{\gamma}_{(\alpha}\nabla a_{\beta)} \equiv 0, \tag{86}$$

т.е., в силу (79), можно положить

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{n}\ [(m+2)\,\delta^{\gamma}_{(\alpha}b_{\beta)} - H^{k\ \cdot\sigma\gamma}_{\alpha\beta\sigma k} - 2\delta^{\gamma}_{(\alpha}a_{\beta)}]. \tag{87}$$

Построение других объектов связности, определенных внутренним образом, приведем для произвольного p и изложим в другой статье.

6. Система дифференциальных уравнений с частными производными четвертого порядка

Если $p=3$, то из компонент тензора $H^{i\ \cdot\beta_{(3)}\gamma_{(3)}}_{\alpha_{(4)}kh}$, охваченного вторым дифференциальным продолжением фундаментального дифференциально-геометрического объекта $H^{i}_{\alpha_{(4)}}$, можно построить симметрический тензор

$$a^{\alpha\beta} = H^{h\ \cdot\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\sigma\alpha}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 ki}\,H^{k\ \cdot\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\rho\beta}_{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4 hj}\,p^{i}_{\sigma}p^{j}_{\rho}. \tag{88}$$

Если тензор $a^{\alpha\beta}$ невырожденный, т.е. $a=\det\|a^{\alpha\beta}\|\neq 0$, то существует обратный тензор $a_{\alpha\beta}$, определенный равенствами

$$a_{\alpha\beta} = \frac{1}{a}\ \frac{\partial a}{\partial a^{\alpha\beta}}, \tag{89}$$

система дифференциальных уравнений которого имеет вид

$$\nabla a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta,\,k}\,\omega^{k} + a_{\alpha\beta,\,\gamma}\,\Theta^{\gamma} + \sum_{s=1}^{3} a_{\alpha\beta\ k}^{\ \ \cdot\sigma_1\ldots\sigma_s}\,\Theta^{k}_{\sigma_1\ldots\sigma_s}. \tag{90}$$

Характеристическая производная тензора $a_{\alpha\beta}$, т.е. система величин

$$L_{\gamma}a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta,\,\gamma} + a_{\alpha\beta,\,k}\,p^{k}_{\gamma} + a_{\alpha\beta\ k}^{\ \ \cdot\sigma}\,p^{k}_{\sigma\gamma} + a_{\alpha\beta\ k}^{\ \ \cdot\sigma\rho}\,p^{k}_{\tau\rho} - a_{\alpha\beta\ k}^{\ \ \cdot\sigma\rho\tau}\,H^{k}_{\sigma\rho\tau\gamma}, \tag{91}$$

является решением следующей системы:

$$\nabla (L_{\gamma}a_{\alpha\beta}) - a_{\sigma\beta}\,\Theta^{\sigma}_{\alpha\gamma} - a_{\alpha\beta}\,\Theta^{\sigma}_{\beta\gamma} \equiv 0. \tag{92}$$

Отсюда следует, что $(a_{\alpha\beta},\ L_{\gamma}a_{\alpha\beta})$ образуют дифференциально-геометрический объект, который охватывает объект Кристоффеля (объект аффинной связности)

$$X^{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\ a^{\gamma\sigma}(L_{\alpha}a_{\sigma\beta} + L_{\beta}a_{\sigma\alpha} - L_{\sigma}a_{\alpha\beta}) \tag{93}$$

и свернутый объект аффинной связности

$$X_{\alpha} = X^{\gamma}_{\alpha\gamma}. \tag{94}$$

Так как первое частичное дифференциальное продолжение фундаментального дифференциально-геометрического объекта $H^i_{\alpha_{(4)}}$, согласно (52), имеет вид

$$dH^{i\ \ \cdot\beta_1\dots\beta_a}_{\alpha_1\dots\alpha_4 k}+H^{l\ \ \cdot\beta_1\dots\beta_a}_{\alpha_1\dots\alpha_4 k}\omega^i_l-$$

$$-H^{i\ \ \cdot\beta_1\dots\beta_a}_{\sigma\alpha_2\dots\alpha_4}\Theta^\sigma_{\alpha_1}-\dots-H^{i\ \ \cdot\beta_1\dots\beta_a}_{\alpha_1\dots\alpha_3\sigma k}\Theta^\sigma_{\alpha_4}-$$

$$-\sum_{c=a}^{3}H^{i\ \ \cdot\gamma_1\dots\gamma_c}_{\alpha_1\dots\alpha_4}\Theta^{h\beta_1\dots\beta_a}_{\gamma_1\dots\gamma_c k}-\varphi^{i\beta_1\dots\beta_a}_{\alpha_1\dots\alpha_4 k}\equiv 0, \tag{95}$$

откуда, в силу равенств

$$\Theta^{i\beta_1\beta_2\beta_3}_{\gamma_1\gamma_2\gamma_3 k}=\omega^i_k\,\mathfrak{S}^{\beta_1\beta_2\beta_3}_{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}-3\delta^i_k\,\Theta^{\sigma_1}_{\gamma}\,\delta^{\gamma}_{(\gamma_1}\delta^{\sigma_2}_{\gamma_2}\delta^{\sigma_3}_{\gamma_3)}\,\mathfrak{S}^{\beta_1\beta_2\beta_3}_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3},$$

следует, что

$$\nabla H^{i\cdot\beta_1\beta_2\beta_3}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 k}-\varphi^{i\beta_1\beta_2\beta_3}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 k}\equiv 0 \tag{96}$$

и, в частности,

$$\nabla H^{i\ \ \cdot\gamma\varepsilon\sigma}_{\gamma\varepsilon\sigma\alpha k}-\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{3!}\,\omega^i_{kh}p^h_\alpha+\frac{(m+2)(m+3)}{2!}\,\delta^i_k\,\Theta^\alpha_{\alpha\sigma}\equiv 0. \tag{97}$$

Свертывая эти равенства с тензором p^k_β, мы получим

$$\nabla(H^{i\ \ \cdot\gamma\varepsilon\sigma}_{\gamma\varepsilon\sigma\alpha k}p^k_\beta)-\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{3!}\,\omega^i_{kh}p^k_\alpha p^h_\beta+$$

$$+\frac{(m+2)(m+3)}{2!}\,p^i_\beta\,\Theta^\sigma_{\alpha\sigma}\equiv 0, \tag{98}$$

откуда немедленно следует, что в этом случае объект $N^i_{\alpha\beta}$ имеет вид (для случая $p=2$ этот объект был определен формулой (69) и использован для построения объекта a_α):

$$N^i_{\alpha\beta}=\frac{1}{(m+2)(m+3)}\,p^k_{[\alpha}H^{i\ \ \cdot\gamma\varepsilon\sigma}_{\beta]\gamma\varepsilon\sigma k}, \tag{99}$$

система дифференциальных уравнений которого имеет такую же структуру как и (70). Так как X_α является решением системы (76), то, исключая формы $\Theta^\sigma_{\alpha\sigma}$ из дифференциальных уравнений для X_α и уравнений (97), мы получим

$$\nabla\left(H^{i\ \ \cdot\gamma\varepsilon\sigma}_{\gamma\varepsilon\sigma\alpha k}+\frac{(m+3)(m+2)}{2!}\,\delta^i_k X_\alpha\right)-\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{3!}\,\omega^i_{kh}p^h_\alpha\equiv 0,$$

т.е. можно положить

$$\Gamma^i_{j\alpha}=\frac{3!}{(m+1)(m+2)(m+3)}\left(H^{i\ \ \cdot\gamma\varepsilon\sigma}_{\gamma\varepsilon\sigma\alpha k}+\frac{(m+1)(m+2)}{2!}\,\delta^i_k X_\alpha\right). \tag{100}$$

Таким образом, если тензор (88) невырожден, то третьим дифференциальным продолжением объекта $H^i_{\alpha_{(4)}}$ всегда охватывается объект характеристической аффинной связности и один из охватов этого объекта определяется формулами (93) и (100).

7. Система дифференциальных уравнений с частными производными пятого порядка

В этом случае из компонент тензора $H^{i\ \cdot\beta_{(4)}\gamma_{(4)}}_{\alpha_{(5)}kh}$ можно построить симметрический тензор $a^{\alpha\beta}$ следующим образом:

$$a^{\alpha\beta}=H^{k\ \cdot\gamma\beta_1\ldots\beta_5\alpha\beta}_{\beta_1\ldots\beta_5 kh}\,p^h_\gamma. \tag{101}$$

Если этот тензор невырожден, то объект Кристоффеля можно построить таким же образом как и для случая $p=3$. Первое частичное дифференциальное продолжение объекта $H^l_{\alpha_{(5)}}$ имеет вид

$$dH^{i\ \cdot\beta_1\ldots\beta_a}_{\alpha_1\ldots\alpha_5 k}+H^{l\ \cdot\beta_1\ldots\beta_a}_{\alpha_1\ldots\alpha_5 k}\,\omega^i_l-H^{i\ \cdot\beta_1\ldots\beta_a}_{\sigma\alpha_2\ldots\alpha_5 k}\,\Theta^\sigma_{\alpha_1}-\ldots-H^{i\ \cdot\beta_1\ldots\beta_a}_{\alpha_1\ldots\alpha_4\sigma}\,\Theta^\sigma_{\alpha_5}-$$

$$-\sum_{c=a}^{4}H^{i\ \cdot\gamma_1\ldots\gamma_c}_{\alpha_1\ldots\alpha_5 h}\,\Theta^{h\beta_1\ldots\beta_a}_{\gamma_1\ldots\gamma_c k}-\varphi^{i\beta_1\ldots\beta_a}_{\alpha_1\ldots\alpha_5 k}\equiv 0. \tag{102}$$

Отсюда следует, что

$$\nabla H^{i\ \cdot\gamma\varepsilon\sigma\rho}_{\gamma\varepsilon\sigma\rho\alpha k}-\frac{(m+1)\ldots(m+4)}{4!}\,\omega^i_{kh}p^h_\alpha+\frac{(m+2)\ldots(m+4)}{3!}\,\delta^i_k\,\Theta^\sigma_{\alpha\sigma}\equiv 0 \tag{103}$$

и

$$\nabla(H^{i\ \cdot\gamma\varepsilon\sigma\rho}_{\gamma\varepsilon\sigma\rho\alpha k}\,p^k_\beta)-\frac{(m+1)\ldots(m+4)}{4!}\,\omega^i_{kh}p^k_\alpha p^h_\beta+$$

$$+\frac{(m+2)\ldots(m+4)}{3!}\,p^i_\beta\,\Theta^\sigma_{\alpha\sigma}\equiv 0. \tag{104}$$

Исключая формы $\omega^i_{kh}p^k_\alpha p^h_\beta$, мы получим, что дифференциально-геометри ческий объект $N^i_{\alpha\beta}$ имеет вид

$$N^i_{\alpha\beta}=\frac{3}{(m+2)(m+3)(m+4)}\,p^k_{[\alpha}H^{i\ \cdot\gamma\varepsilon\sigma\rho}_{\beta]\gamma\varepsilon\sigma\rho k}, \tag{105}$$

т.е. эти величины являются решением системы (70). Если тензор

$$H^\beta_\alpha=H^\beta_k p^k_\alpha, \tag{106}$$

где

$$H^\beta_k=a_{\sigma\gamma}H^{l\ \cdot\beta_1\ldots\beta_5\sigma\gamma\beta}_{\beta_1\ldots\beta_5 lk},$$

невырожденный, то свертывая дифференциальные уравнения для объекта $N^i_{\alpha\beta}$, определенного формулой (105), с тензором H^σ_i, мы получим, что величины

$$c_\alpha=\frac{2}{m-1}\,\overset{*}{H}{}^\rho_\sigma H^\sigma_i N^i_{\alpha\rho} \tag{107}$$

образуют свернутый объект аффинной связности, охваченный вторым дифференциальным продолжением объекта $H^i_{\alpha_{(5)}}$. Свернутый объект аффинной связности, построенный из компонент объекта Кристоффеля, охватывается третьим дифференциальным продолжением объекта $H^i_{\alpha_{(5)}}$.

Из (103) и дифференциальных уравнений для C_α следует, что

$$\nabla\left(H^{i\cdot\gamma\varepsilon\sigma}_{\gamma\varepsilon\sigma\alpha j}+\frac{(m+2)\ldots(m+4)}{3!}\,\delta^i_j c_\alpha\right)-\frac{(m+1)\ldots(m+4)}{4!}\,\omega^i_{jh}p^h_\alpha\equiv 0,$$

т.е. можно положить

$$\Gamma^i_{j\alpha}=\frac{4!}{(m+1)!\ldots(m+4)!}\left(H^{i\cdot\gamma\varepsilon\sigma}_{\gamma\varepsilon\sigma\alpha j}+\frac{(m+2)\ldots(m+4)}{3!}\,\delta^i_j c_\alpha\right). \tag{108}$$

8. Общий случай

Если $p>2$, то из компонент тензора $H^{i\cdot\beta(p)\gamma(p)}_{\alpha(p+1)kh}$ можно построить тензор $(r=p-2)$

$$H^{\alpha_1\dots\alpha_r\beta_1\dots\beta_r}=H^{k\cdot\varepsilon_1\dots\varepsilon_p\alpha_1\dots\alpha_r\varepsilon\sigma}_{\gamma_1\dots\gamma_p\gamma hl}H^{h\cdot\gamma_1\dots\gamma_p\beta_1\dots\beta_r\gamma\rho}_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_p kj}p^l_\rho p^j_\sigma, \tag{109}$$

симметрический относительно двух групп индексов $\alpha_1\dots\alpha_r$ и $\beta_1\dots\beta_r$, а также и относительно индексов каждой группы. Таким образом, второе дифференциальное продолжение фундаментального дифференциально-геометрического объекта охватывает $2r$-раз контравариантный симметрический тензор

$$\mathfrak{A}^{\alpha_1\dots\alpha_{2r}}=H^{(\alpha_1\dots\alpha_r\alpha_{r+1}\dots\alpha_{2r})}.$$

Предположим, что гипердетерминант $\mathfrak{A}$ (тензора $\mathfrak{A}^{\alpha_1\dots\alpha_{2r}}$):

$$\mathfrak{A}=\frac{1}{m!}\,\mathfrak{A}^{\alpha_1\dots\alpha_{2r}}\mathfrak{A}^{\beta_1\dots\beta_{2r}}\dots\mathfrak{A}^{\lambda_1\dots\lambda_{2r}}\times$$

$$\times\,\varepsilon_{\alpha_1\beta_1\dots\lambda_1}\varepsilon_{\alpha_2\beta_2\dots\lambda_2}\dots\varepsilon_{\alpha_{2r}\beta_{2r}\dots\lambda_{2r}}, \tag{110}$$

где $\varepsilon_{\alpha_1\beta_1\dots\lambda_1}$ — m-вектор, т.е. $\nabla\varepsilon_{\alpha_1\beta_1\dots\lambda_1}+\Theta^\gamma_\gamma\varepsilon_{\alpha_1\beta_1\dots\lambda_1}=0$, отличный от нуля. Тогда можно построить тензор $(q=2r)$

$$\mathfrak{A}_{\alpha_1\dots\alpha_q}=-\frac{m}{q\mathfrak{A}}\,\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial\mathfrak{A}^{\alpha_1\dots\alpha_q}}, \tag{111}$$

который связан с тензором $\mathfrak{A}^{\alpha_1\dots\alpha_q}$ соотношениями

$$\mathfrak{A}_{\beta\alpha_2\dots\alpha_q}\mathfrak{A}^{\gamma\alpha_2\dots\alpha_q}=\delta^\gamma_\beta. \tag{112}$$

Рассмотрим величины

$$\Gamma_{\alpha_1\dots\alpha_q,\,\beta}=L_{(\beta}\mathfrak{A}_{\alpha_1\dots\alpha_q)}, \tag{113}$$

которые являются решениями следующей системы

$$\nabla\Gamma_{\alpha_1\dots\alpha_q,\,\beta}-q\,\delta^\rho_{(\beta}\delta^\tau_\gamma\mathfrak{A}_{\alpha_2\dots\alpha_q)\sigma}\Theta^\sigma_{\rho\tau}\equiv0. \tag{114}$$

Свертывая эти уравнения с тензором $\mathfrak{A}^{\alpha_1\dots\alpha_q}$, мы получим

$$\nabla(\mathfrak{A}^{\varepsilon\alpha_2\dots\alpha_q}\Gamma_{\nu\alpha_2\dots\alpha_q,\,\mu})-T^{\rho\tau,\,\varepsilon}_{\mu\nu,\,\sigma}\Theta^\sigma_{\rho\tau}\equiv0, \tag{115}$$

где

$$T^{\rho\tau,\,\varepsilon}_{\mu\nu,\,\sigma}=q\,\delta^\rho_{(\mu}\delta^\tau_\nu\mathfrak{A}_{\alpha_2\dots\alpha_q)\sigma}\mathfrak{A}^{\varepsilon\alpha_2\dots\alpha_q}. \tag{116}$$

Если $q>3$, то можно считать, что

$$T=\det\|T^{\rho\tau,\,\varepsilon}_{\mu\nu,\,\sigma}\|\neq0,$$

причем номер строки этой матрицы, порядок которой равен $\frac{m^2(m+1)}{2}$, определяется индексами ρ, τ, σ, а номер столбца — индексами μ, ν, ε, и построить тензор

$$\overset{*}{T}{}^{\gamma\beta,\,\sigma}_{\rho\tau,\,\alpha}=\frac{1}{T}\,\frac{\partial T}{\partial T^{\rho\tau,\,\alpha}_{\gamma\beta,\,\sigma}},$$

компоненты которого связаны с тензором (116) тождествами

$$\overset{*}{T}{}^{\gamma\beta,\sigma}_{\rho\tau,\,\alpha}T^{\rho\tau,\,\lambda}_{\mu\nu,\,\sigma}=\delta^\gamma_{(\mu}\delta^\beta_{\nu)}\delta^\lambda_\alpha, \tag{117}$$

$$\overset{*}{T}{}^{\gamma\beta,\,\sigma}_{\rho\tau,\,\alpha}T^{\mu\nu,\,\alpha}_{\gamma\beta,\,\lambda}+\delta^\mu_{(\rho}\delta^\nu_{\tau)}\delta^\sigma_\lambda. \tag{118}$$

Свертывая уравенения (115) с тензором $\overset{*}{T}{}^{\mu\nu,\,\gamma}_{\alpha\beta,\,\varepsilon}$, мы получим

$$\nabla(\overset{*}{T}{}^{\mu\nu,\,\gamma}_{\alpha\beta,\,\varepsilon}\mathfrak{A}^{\varepsilon\alpha_2\dots\alpha_q}\Gamma_{\nu\alpha_2\dots\alpha_q,\,\mu})-\Theta^{\gamma}_{\alpha\beta}\equiv 0,$$

т.е. величины

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}=\overset{*}{T}{}^{\mu\nu,\,\gamma}_{\alpha\beta,\,\varepsilon}\mathfrak{A}^{\varepsilon\alpha_2\dots\alpha_q}\Gamma_{\nu\alpha_2\dots\alpha_q,\,\mu} \tag{119}$$

образуют объект аффинной связности, охваченный третьим дифференциальным продолжением фундаментального дифференциально-геометрического объекта $H^i_{\alpha_{(p+1)}}$.

Из (43) и (46) следует, что

$$\varphi^{i\beta_1\dots\beta_p}_{\alpha_1\dots\alpha_{p+1}j}=(p+1)\,S^{\beta_1\dots\beta_p}_{(\alpha_1\dots\alpha_p}p^l_{\alpha_{p+1})}\omega^i_{lj}+$$
$$-\frac{(p+1)!}{2!\,(p-1)!}\,\delta^i_j\Theta^{\gamma}_{(\alpha_1\alpha_2}S^{\gamma_1\dots\gamma_p}_{\alpha_3\dots\alpha_{p+1})\gamma}\mathfrak{S}^{\beta_1\dots\beta_p}_{\gamma_1\dots\gamma_p}$$

и свертывая индексы получаем

$$\varphi^{i\beta_1\dots\beta_p}_{\beta_1\dots\beta_p\alpha j}=\frac{(m+1)(m+2)\dots(m+p)}{p!}\,\omega^i_{kj}p^k_\alpha+$$
$$-\frac{(m+2)(m+3)\dots(m+p)}{(p-1)!}\,\delta^i_j\Theta^{\gamma}_{\gamma\alpha}.$$

Тогда из уравнений (52) (при $a=p$) следует, что

$$\nabla H^{i\beta_1\dots\beta_p}_{\beta_1\dots\beta_p\alpha j}-\frac{(m+p)!}{p!\,m!}\,\omega^i_{kj}p^k_\alpha+\frac{(m+p)!}{(p-1)!\,(m+1)!}\,\delta^i_j\Theta^{\gamma}_{\gamma\alpha}\equiv 0,$$

т.е. можно положить

$$\Gamma^i_{j\alpha}=\frac{p!\,m!}{(m+p)!}\left(H^{i\cdot\beta_1\dots\beta_p}_{\beta_1\dots\beta_p\alpha j}+\frac{p}{m+1}\,\delta^i_j\Gamma^{\gamma}_{\gamma\alpha}\right). \tag{120}$$

Таким образом, объект характеристической аффинной связности охватывается третьим дифференциальным продолжением дифференциально-геометрического объекта $H^i_{\alpha_{(p+1)}}$, если существует отличный от нуля относительный инвариант, охваченный вторым дифференциальным продолжением объекта $H^i_{\alpha_{(p+1)}}$. Для построении относительных инвариантов можно привлечь и тензоры $(s=p-1)$

$$b^{\alpha_1\dots\alpha_s}_j=H^{k\cdot\beta_1\dots\beta_p\gamma\alpha_1\dots\alpha_s}_{\beta_1\dots\beta_p\gamma jk}\qquad(s>1),$$

$$C^{\alpha_1\dots\alpha_{s-1}}=b^{\alpha_1\dots\alpha_{s-1}\gamma}_j p^j_\gamma\qquad(s>2).$$

Заметим, что объект аффинной связности $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$, пользуясь гипердетерминантом тензора $\mathfrak{A}^{\alpha_1\dots\alpha_q}$, определенного формулой (111), можно построить и другим способом. Рассмотрим систему величин

$$G_{\alpha_1\dots\alpha_q\beta}=\frac{1}{2}\,(L_{\alpha_1}\mathfrak{A}_{\beta\alpha_2\dots\alpha_q}+\dots+L_{\alpha_q}\mathfrak{A}_{\alpha_1\dots\alpha_{q-1}\beta}-L_\beta\mathfrak{A}_{\alpha_1\dots\alpha_q}),$$

которая является решением системы

$$\nabla G_{\alpha_1 \dots \alpha_q \beta} - \frac{1}{2} (\mathfrak{A}_{\sigma\alpha_2 \dots \alpha_q} \Theta^{\sigma}_{\beta\alpha_1} + \dots + \mathfrak{A}_{\beta\alpha_2 \dots \sigma} \Theta^{\sigma}_{\alpha_q \alpha_1} +$$
$$+ \mathfrak{A}_{\sigma\beta\alpha_3 \dots \alpha_q} \Theta^{\sigma}_{\alpha_1\alpha_2} + \dots + \mathfrak{A}_{\alpha_1\beta\alpha_3 \dots \sigma} \Theta^{\sigma}_{\alpha_q\alpha_2} +$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ \mathfrak{A}_{\sigma\alpha_2 \dots \alpha_{q-1}\beta} \Theta^{\sigma}_{\alpha_1\alpha_q} + \dots + \mathfrak{A}_{\alpha_1 \dots \alpha_{q-1}\sigma} \Theta^{\sigma}_{\beta\alpha_q} +$$
$$- \mathfrak{A}_{\sigma\alpha_2 \dots \alpha_q} \Theta^{\sigma}_{\alpha_1\beta} - \dots - \mathfrak{A}_{\alpha_1 \dots \alpha_{q-1}\sigma} \Theta^{\sigma}_{\alpha_q\beta}) \equiv 0$$

или (после сокращения подобных членов и замены строк столбцами)

$$\nabla G_{\alpha_1 \dots \alpha_q \beta} - \frac{1}{2} (\mathfrak{A}_{\beta\sigma\alpha_3 \dots \alpha_q} \delta^{\lambda}_{\alpha_2} \delta^{\mu}_{\alpha_1} +$$
$$+ \mathfrak{A}_{\sigma\beta\alpha_3 \dots \alpha_q} \delta^{\lambda}_{\alpha_1} \delta^{\mu}_{\alpha_2} + \dots + \mathfrak{A}_{\sigma\beta\alpha_2 \dots \alpha_q} \delta^{\lambda}_{\alpha_2} \delta^{\mu}_{\alpha_1} +$$
$$+ \mathfrak{A}_{\sigma\beta\alpha_1 \dots \alpha_q} \delta^{\lambda}_{\alpha_3} \delta^{\mu}_{\alpha_2} + \dots + \mathfrak{A}_{\sigma\beta\alpha_2 \dots \alpha_{q-1}} \delta^{\lambda}_{\alpha_q} \delta^{\mu}_{\alpha_1} +$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ \mathfrak{A}_{\sigma\beta\alpha_2 \dots \alpha_{q-1}} \delta^{\lambda}_{\alpha_1} \delta^{\mu}_{\alpha_q} + \dots + \mathfrak{A}_{\sigma\beta\alpha_1 \dots \alpha_{q-2}} \delta^{\lambda}_{\alpha_{q-1}} \delta^{\mu}_{\alpha_q}) \Theta^{\sigma}_{\lambda\mu} \equiv 0.$$

Дважды применив тождество

$$Q_{(\alpha_1 \dots \alpha_q)} = \frac{1}{q} (Q_{\alpha_1(\alpha_2 \dots \alpha_q)} + \dots + Q_{\alpha_q(\alpha_1 \dots \alpha_{q-1})})$$

мы получим систему дифференциальных уравнений

$$\nabla G_{\alpha_1 \dots \alpha_q \beta} - \frac{1}{2(q-1)!} \mathfrak{A}_{\beta\sigma(\alpha_3 \dots \alpha_q} \delta^{\lambda}_{\alpha_1} \delta^{\mu}_{\alpha_2)} \Theta^{\sigma}_{\lambda\mu} \equiv 0, \tag{121}$$

содержащую $\frac{(m+q-1)m}{(m-1)!\,q!}$-уравнений, число которых при $q>2$ всегда превышает число форм $\Theta^{\sigma}_{\lambda\mu}$. Свертывая уравнения (121) с тензором $\mathfrak{A}^{\rho\beta\alpha_3 \dots \alpha_q}$, мы получим

$$\nabla (G_{\alpha\beta\alpha_3 \dots \alpha_q} \mathfrak{A}^{\rho\gamma\alpha_3 \dots \alpha_q}) - B^{\lambda\mu,\ \rho}_{\alpha\beta,\ \sigma} \Theta^{\sigma}_{\lambda\mu} \equiv 0, \tag{122}$$

где

$$B^{\lambda\mu,\ \rho}_{\alpha\beta,\ \sigma} = \frac{1}{2(q-1)!} \mathfrak{A}_{\gamma\sigma(\alpha_3 \dots \alpha_q} \delta^{\lambda}_{\alpha} \delta^{\mu}_{\beta)} \mathfrak{A}^{\rho\gamma\alpha_3 \dots \alpha_q}.$$

В общем случае матрица $\| B^{\lambda\mu,\ \rho}_{\alpha\beta,\ \sigma} \|$ невырождена (см. [3]) и уравнения (122) можно разрешить относительно форм $\Theta^{\sigma}_{\lambda\mu}$, т.е. существует охват для объекта $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$, отличный от охвата (119).

Таким образом, мы указали конкретное решение проблемы Кавагути, т.е. построили охваты объекта $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ при помощи дифференциальных продолжений фундаментального дифференциально-геометрического объекта $H^{i}_{\alpha_{(p+1)}}$. Следует ожидать, что порядок охвата для $\Gamma^{j}_{i\alpha}$ всегда равен двум (это доказано только при $p=2$). Если $p=1$, то существуют охваты второго порядка для объекта $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$, но такие охваты для $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ при произвольном p еще неизвестны.

Вильнюсский Государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
28.IX.1968

Литература

1. В. И. Близникас, О геометрии систем дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными, Лит. матем. сб., VII, № 2 (1967), 69–84.
2. В. В. Вагнер, Теория дифференциальных объектов и основания дифференциальной геометрии, Приложение к книге О. Веблена и Дж. Уайтхеда „Основания дифференциальной геометрии", ИИЛ, Москва, 1949.
3. Ю. И. Ермаков, Пространства X_n с алгебраической метрикой и полуметрикой, ДАН СССР, т. **128**, № 3, 460–463, 1959.
4. Г. Ф. Лаптев, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий, Труды Московского мат. об-ва, т. **2**, 275–382, 1953.
5. E. Bortolotti, Geometry of a system of partial differential eguations, Tensor, 1941, **4**, 25–34.
6. H. V. Craig, On a generalized tangent vector, Amer. J. Math., **57**, 457–462, 1935.
7. J. Douglas, Systems of K-dimensional manifolds in an n-dimensional space, Math. Ann., **105**, 707–733, 1931.
8. S. Hokari, On a geometrical treatment of a system of higher partial differential eguations, Tensor, **5**, 89–103, 1942.
9. A. Kawaguchi, Die Differentialgeometrie hoherer Ordnung, I, II, III, J. Fac. Sci. Hokkaido Imp. Univ. Ser. I, **9**, 1–153, 1940; Ser I, **9**, 153–188, 1940; Ser. I, **10**, 77–156, 1941.
10. A. Kawaguchi, H. Hombu, Die Geometrie des Systems der patiellen Differentialgleichungen, J. Fac. Sci. Hokkaido Imp. Univ., Ser. I, **6**, 21–62, 1937.
11. T. Ohkubo, Die Geometrie der partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung, J. Fac. Sci. Hokkaido Imp. Univ., Ser. 1, **6**, 113–124, 1937.

AUKŠTESNĖS EILĖS DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SISTEMŲ SU DALINĖMIS IŠVESTINĖMIS GEOMETRIJOS KLAUSIMU

V. Bliznikas

(*Reziumė*)

Surastos p-tos eilės m-mačių paviršinių elementų erdvės $K^{(p)}_{n,m}$ struktūrinės lygtys (11) ir erdvės $K^{(p)}_{n,m}$ diferencialinių grupių struktūrinės lygtys. G. F. Laptevo metodu išdėstyti daugiamačių ekstenzorių teorijos elementai.

Įrodyta, kad erdvės $K^{(p)}_{n,m}$ fundamentalinio objekto $H^i_{\alpha_{(p+1)}}$, atitinkančio lygčių (1) sistemą, trečios eilės diferencialinis pratęsimas apima sąryšio objektą $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$, $\Gamma^i_{j\alpha}$, t. y. nurodytas vienas iš galimų Kavagučio uždavinio sprendimų.

ÜBER DIE GEOMETRIE DES NORMALSYSTEMS PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN HÖHERER ORDNUNG

V. Bliznikas

(*Zusammenfassung*)

Die Geometrie der Bahnen ist zuerst vom J. Douglas im Falle des verallgemeinerten Systems der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}+H^i_{\alpha\beta}\left(x,\ \frac{\partial x}{\partial u}\right)=0$$

erweitert worden. Die Geometrie der Systeme von Differentialgleichungen höherer Ordnung ist dagegen weniger bekannt. In derm vorliegenden Artikel möchten wir uns mit der Grundlegung der allgemeinen Theorie des Normalsystems der partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung beschäftigen.

Mit Hilfe der Methode vom G. Laptew werden die Elemente der Rechnung von mehrdimensionalen Extensoren durchgestellt. In diesem Artikel sind die Strukturgleichungen des Raumes von mehrdimensionalen Flächenelementen höherer Ordnung, sowie die intrinsike Objekte vom affinen Zusammenhange und die Objekte anderen intrinsiken Zusammenhängen gefunden ($p>2$).