IX LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

1969

УДК–513

О ГЕОМЕТРИИ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

В. И. Близникас

Рассматривается расслоенное пространство, на котором определена квазилинейная система дифференциальных уравнений первого порядка с частными производными. Найдены линейные дифференциально-геометрические и аффинные связности расслоенного пространства, охваченные продолженным фундаментальным дифференциально-геометрическим объектом, при помощи которого определяется рассматриваемая система.

§1. Структурные уравнения

Пусть $V_m - m$ -мерное дифференцируемое многообразие, локальные координаты (u^α) которого являются первыми интегралами вполне интегрируемой системы

$$\Theta^\alpha = 0, \tag{1}$$

$$D\Theta^\alpha = \Theta^\beta \wedge \Theta^\alpha_\beta, \tag{2}$$

$$D\Theta^\alpha_\beta = \Theta^\gamma_\beta \wedge \Theta^\alpha_\gamma + \Theta^\gamma \wedge \Theta^\alpha_{\beta\gamma} \tag{3}$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m;\ a, b = 1, 2, \ldots, r).$$

С каждой точкой (u^α) дифференцируемого многообразия V_m, называемого *базисным пространством* (*база*), мы ассоциируем некоторое новое n -мерное дифференцируемое многообразие $V_n(u^\alpha)$, которое называется *локальным пространством* (*слой*), соответствующим данной точке (u^α) базисного пространства. Локальные пространства, ассоциированные с различными точками, предполагаются изоморфными друг другу. Множество всех этих локальных пространств, ассоциированных с точками базы, называется *составным многообразием* в смысле В. В. Вагнера [3] или *расслоенным пространством*, которое обозначим через $V_n(V_m)$. Локальные координаты (x^i) слоя $V_n(u^\alpha_0)$ будем считать первыми интегралами вполне интегрируемой системы

$$\omega^i \equiv 0 \pmod{\Theta^\alpha}, \tag{4}$$

т.е.

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega^i_k + \Theta^\alpha \wedge \omega^i_\alpha, \tag{5}$$

$$D\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk} + \Theta^\alpha \wedge \omega^i_{j\alpha}, \tag{6}$$

$$D\omega^i_\alpha = \omega^k_\alpha \wedge \omega^i_k + \Theta^\beta_\alpha \wedge \omega^i_\beta + \omega^k \wedge \omega^i_{k\alpha} + \Theta^\beta \wedge \omega^i_{\beta\alpha}, \tag{7}$$

где

$$\omega^i_{jk} = \omega^i_{kj}, \quad \omega^i_{\alpha\beta} = \omega^i_{\beta\alpha}.$$

Уравнения (2) и (5) называются структурными уравнениями расслоенного пространства $V_n\ (V_m)$. Группа, определенная инвариантными формами $\Theta^\alpha_\beta|_{\Theta^\alpha=0}=\vartheta^\alpha_\beta$ и действующая в касательном пространстве базы V_m, называется *горизонтальной центроаффинной группой* и обозначается через $GL\ (m,\ R)$, а группа, определенная инвариантными формами $\omega^i_j|_{\Theta^\alpha=0\ \omega^i=0}=\vartheta^i_j$ и действующая в касательном пространстве слоя $V_n\,|_{u^\alpha=\mathrm{const}}$, называется *вертикальной центроаффинной группой и обозначается через* $GL\,(n,\ R)$. Структурные уравнения этих групп имеют вид

$$D\vartheta^\alpha_\beta=\vartheta^\gamma_\beta\wedge\vartheta^\alpha_\gamma,\quad D\vartheta^i_j=\vartheta^k_j\wedge\vartheta^i_k. \tag{8}$$

Центроаффинная группа $GL\,(n+m,\ R)$, действующая в касательном пространстве расслоенного пространства $V_n\,(V_m)$, определяется инвариантными формами

$$\vartheta^i_j,\qquad \vartheta^i_\alpha=\omega^i_\alpha|_{\Theta^\alpha=0,\ \omega^i=0},\qquad \vartheta^\alpha_\beta,$$

которые имеют следующую структуру

$$D\vartheta^i_j=\vartheta^k_j\wedge\vartheta^i_k,\qquad D\vartheta^\alpha_\beta=\vartheta^\gamma_\beta\wedge\vartheta^\alpha_\gamma,$$

$$D\vartheta^i_\alpha=\vartheta^k_\alpha\wedge\vartheta^i_k+\vartheta^\beta_\alpha\wedge\vartheta^i_\beta. \tag{9}$$

§2. Фундаментальный объект

Пусть на расслоенном пространстве $V_n\,(V_m)$ определена квазилинейная система дифференциальных уравнений первого порядка с частными производными:

$$H^a\equiv h^{a\alpha}_i(x,u)\ \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}+h^a(x,u)=0. \tag{10}$$

Очевидно, что эта система остается квазилинейной при следующих преобразованиях локальных координат расслоенного пространства (эти преобразования сохраняют структуру расслоенного пространства):

$$G:\qquad x^{i'}=x^{i'}(x,u),\quad u^{\alpha'}=u^{\alpha'}(u), \tag{11}$$

которые образуют псевдогруппу с фиксированной подпсевдогруппой. Можно считать, что эта псевдогруппа определяется инвариантными формами Θ^α и ω^i, т.е. системой вполне интегрируемых уравнений (переменные x^i и u^α обозначены через $\bar{x}^i$ и $\bar{u}^\alpha$):

$$\bar{\omega}^i=\omega^i,\qquad \bar{\Theta}^\alpha=\Theta^\alpha.$$

Кроме того, вид системы (10) не меняется и от преобразований следующего вида ($\det\|A^{a'}_a\|\neq 0$):

$$A^{a'}_a\,H^a=0,$$

совокупность которых образуют центроаффинную группу $GL\ (r,\ R)$.

Система дифференциальных уравнений (10) вполне определяется системой функций $h^{a\alpha}_i$ и h^a. Оказывается, что эти функции, определенные на $V_n\,(V_m)$, образуют дифференциально-геометрический объект следующей структуры (линейный и однородный объект):

$$h^{a'\alpha'}_{i'}=A^{a'}_a\ \frac{\partial u^{\alpha'}}{\partial u^\alpha}\ \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\ h^{a\alpha}_i,$$

$$h^{a'}=A^{a'}_a\,h^a-A^{a'}_a\ \frac{\partial x^{k'}}{\partial u^\alpha}\ \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\ h^{a\alpha}_k, \tag{12}$$

т.е. $h_i^{a\alpha}$ -тензор. Дифференциально-геометрический объект $(h_i^{a\alpha}, h^a)$ будем называть *фундаментальным дифференциально-геометрическим объектом системы* (10). Таким образом, *геометрия системы дифференциальных уравнений* (10) *относительно псевдогруппы* $G\times GL\,(r, R)$ *эквивалентна геометрии расслоенного пространства* $V_n\,(V_m)$ *с заданным фундаментальным дифференциально-геометрическим объектом* (12) (тот случай, когда $V_n\,(V_m)= = V_n\text{x}\ V_m$ был рассмотрен в заметке [2]).

Для того, чтобы применить теоретико-групповой метод Г. Ф. Лаптева [4], необходимо конечные законы преобразования компонент фундаментального дифференциально-геометрического объекта (12) заменить соответствующей системой дифференциальных уравнений. Оказывается, что поле фундаментального дифференциально-геометрического объекта $(h_i^{a\alpha}, h^a)$ определяется следующей системой

$$\nabla h_i^{a\alpha}=h_{ik}^{a\alpha}\,\omega^k+h_{i\beta}^{a\alpha}\,\Theta^\beta\,, \tag{13}$$

$$\nabla h^a-h_k^{a\alpha}\,\omega_\alpha^k=h_k^a\,\omega^k+h_\beta^a\,\Theta^\beta\,, \tag{14}$$

где, например,

$$\nabla h_i^{a\alpha}=d\,h_i^{a\alpha}-h_k^{a\alpha}\,\omega_i^k+h_i^{b\alpha}\,\Theta_b^a+h_i^{a\beta}\,\Theta_\beta^\alpha\,,$$

причем Θ_b^a — инвариантные формы группы $GL\,(r,\ R)$.

Дифференцируя внешним образом уравнения (13) и (14) и развертывая полученные внешние квадратичные уравнения по лемме Картана, мы получим

$$\nabla h_{ik}^{a\alpha}-h_s^{a\alpha}\,\omega_{ik}^s=h_{iks}^{a\alpha}\,\omega^s+h_{ik\beta}^{a\alpha}\,\Theta^\beta\,, \tag{15}$$

$$\nabla h_{i\beta}^{a\alpha}+h_i^{a\gamma}\,\Theta_{\beta\gamma}^\alpha-h_{ik}^{a\alpha}\,\omega_\beta^k=h_{ik\beta}^{a\alpha}\,\omega^k+h_{i\beta\gamma}^{a\alpha}\,\Theta^\gamma\,, \tag{16}$$

$$\nabla h_k^a+h_{sk}^{a\alpha}\,\omega_\alpha^s-h_s^{a\alpha}\,\omega_{k\alpha}^s=h_{ks}^a\,\omega^s+h_{k\beta}^a\,\Theta^\beta, \tag{17}$$

$$\nabla h_\beta^a-h_{k\beta}^{a\gamma}\,\omega_\gamma^k-h_k^a\,\omega_\beta^k-h_k^{a\gamma}\,\omega_{\gamma\beta}^k=h_{k\beta}^a\,\omega^k+h_{\beta\gamma}^a\,\Theta^\gamma\,, \tag{18}$$

где

$$h_{iks}^{a\alpha}=h_{isk}^{a\alpha},\qquad h_{i\beta\gamma}^{a\alpha}=h_{i\gamma\beta}^{a\alpha}\,,\qquad h_{ks}^a=h_{sk}^a,\qquad h_{\beta\gamma}^a=h_{\gamma\beta}^a\,.$$

§3. Обратный тензор

Рассмотрим те случаи, когда из компонент тензора $h_i^{a\alpha}$ можно составить квадратичную матрицу. Матрица $\|\,h_i^{a\alpha}\,\|$ будет квадратичной только тогда, когда $m=nr$ ($n=mr$ или $r=nm$). В этих случаях можно построить обратный тензор $h_{a\alpha}^i$ (когда определитель отличен от нуля, т.е. когда $h=\det\|\,h_{a\alpha}^i\|\neq 0$). Оказывается, что величина h является решением следующей системы

$$\mathrm{d}\ln h=\,-m\,\omega_k^k+n\,\Theta_\alpha^\alpha+\Theta_a^a+h_k\,\omega^k+h_\alpha\,\Theta^\alpha \tag{19}$$

и компоненты обратного тензора $h_{a\alpha}^i$ связаны с компонентами тензора $h_i^{a\alpha}$ соотношениями

$$h_{a\alpha}^i\,h_i^{b\alpha}=\delta_a^b\,. \tag{20}$$

$$h_{a\alpha}^i\,h_j^{a\beta}=\delta_j^i\,\delta_\alpha^\beta\,. \tag{21}$$

Если $m < nr$, то можно построить тензор $\overset{*}{h}{}^{i}_{a\alpha}$ (см. [2]), который связан с тензором $h^{a\alpha}_{i}$ соотношениями

$$\overset{*}{h}{}^{i}_{a\alpha} h^{a\alpha}_{j} = mr\,\delta^{i}_{j}, \tag{22}$$

$$\overset{*}{h}{}^{i}_{a\beta} h^{a\alpha}_{i} = -nr\,\delta^{\alpha}_{\beta}, \tag{23}$$

$$\overset{*}{h}{}^{i}_{b\alpha} h^{a\alpha}_{i} = -nm\,\delta^{a}_{b}. \tag{24}$$

Если $n < mr$ (или $r < mn$), то обратный тензор тоже существует (в общем случае).

§4. Объекты связностей

1. Объект Γ^{i}_{α}. Объект линейной дифференциально-геометрической связности Γ^{i}_{α} расслоенного пространства V_n (V_m) имеет следующую структуру (см. [1]):

$$\nabla\Gamma^{i}_{\alpha} - \omega^{i}_{\alpha} = \Gamma^{i}_{\alpha k}\,\omega^{k} + \Gamma^{i}_{\alpha\beta}\,\Theta^{\beta}. \tag{25}$$

Если $r = mn$, то свертывая уравнения (14) с тензором $h^{j}_{a\beta}$, мы получим

$$h^{j}_{a\beta}\nabla h^{a} - h^{j}_{a\beta} h^{a\alpha}_{k}\,\omega^{k}_{\alpha} \equiv 0 \pmod{\omega^{k}, \Theta^{\alpha}}.$$

Отсюда, в силу (21), следует, что

$$\nabla(h^{j}_{a\beta} h^{a}) - \omega^{j}_{\beta} \equiv 0 \pmod{\omega^{k}, \Theta^{\alpha}},$$

т.е. что объект Γ^{i}_{α}, образованный из компонент фундаментального объекта $(h^{a\alpha}_{i}, h^{a})$, можно определить следующей формулой

$$\Gamma^{i}_{\alpha} = h^{i}_{a\alpha} h^{a}. \tag{26}$$

2. Объект аффинной связности Γ^{j}_{jk}. Свертывая уравнения (15) с $h^{i}_{a\alpha}$, мы получим ($r = mn$):

$$h^{j}_{a\alpha}\nabla h^{a\alpha}_{ik} + m\,\omega^{j}_{ik} \equiv 0 \pmod{\omega^{k}, \Theta^{\alpha}},$$

т.е. что величины

$$\Gamma^{j}_{ik} = \frac{1}{m}\, h^{j}_{a\alpha} h^{a\alpha}_{k} \tag{27}$$

образуют объект аффинной связности. Заметим, что такой объект можно построить тогда, когда существует тензор $\overset{*}{h}{}^{i}_{a\alpha}$, образованный из компонент тензора $h^{a\alpha}_{i}$ (если тензор $\overset{*}{h}{}^{i}_{a\alpha}$ и существует, то отсюда еще не следует существование объекта Γ^{i}_{α}).

3. Объект аффинной связности $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$. При помощи объекта Γ^{i}_{α} можно построить следующее преобразование форм ω^{i}:

$$\overset{\circ}{\omega}{}^{i} = \omega^{i} + \Gamma^{i}_{\alpha}\,\Theta^{\alpha},$$

которому соответствует процесс неголономного базисного дифференцирования. Неголономная базисная производная тензора $h_i^{a\alpha}$ имеет вид

$$\overset{\circ}{\nabla}_\beta h_i^{a\alpha} = h_{i\beta}^{a\alpha} - h_{ik}^{a\alpha}\Gamma_\beta^k \tag{28}$$

и

$$\nabla(\overset{\circ}{\nabla}_\beta h_i^{a\alpha}) + h_i^{a\gamma}\Theta_{\gamma\beta}^\alpha \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^k,\ \Theta^\alpha).$$

Отсюда следует, что величины

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = -\frac{1}{n} h_{a\beta}^i \overset{\circ}{\nabla}_\gamma h_i^{a\alpha} \tag{29}$$

образуют объект аффинной связности.

§5. Аффинное расслоенное пространство

Расслоенное пространство $V_n(V_m)$ будем называть *аффинным расслоенном пространством*, если базисное пространство V_m и слои $V_n| u^\alpha = const$ являются аффинными пространствами. В этом случае структурные уравнения (2), (3), (5) и (6) имеют вид

$$D\Theta^\alpha = \Theta^\beta \wedge \Theta_\beta^\alpha, \qquad D\Theta_\beta^\alpha = \Theta_\beta^\gamma \wedge \Theta_\gamma^\alpha,$$
$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i + \Theta^\alpha \wedge \omega_\alpha^i, \tag{30}$$
$$D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \Theta^\alpha \wedge \omega_{j\alpha}^i.$$

Расслоенное пространство, определенное структурными уравнениями (30), является частным случаем аффинного расслоения [5].

Если на аффинном расслоенном пространстве определен объект $(h_i^{a\alpha}, h^a)$, то уравнения (13) и (14) имеют такой же вид, уравнения (15) и (16) заменяются следующими уравнениями

$$\nabla h_{ik}^{a\alpha} = h_{iks}^{a\alpha}\omega^s + h_{ik\beta}^{a\alpha}\Theta^\beta, \tag{15'}$$

$$\nabla h_{i\beta}^{a\alpha} - h_{ik}^{a\alpha}\omega_\beta^k = h_{ik\beta}^{a\alpha}\omega^k + h_{i\beta\gamma}^{a\alpha}\Theta^\gamma. \tag{16'}$$

Рассмотрим тот случай, когда $r \neq nm$ (если $r = nm$, то объект Γ_α^i можно построить таким же путем, как и в п. §4). Тензор $\overset{*}{h}{}_{a\alpha}^i$, удовлетворяющий соотношениям (22)–(24) (см. [2]), в этом случае существует и является решением системы $(r < nm)$

$$\nabla \overset{*}{h}{}_{a\alpha}^i \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \omega^k,\ \Theta^\alpha).$$

Для того, чтобы построить объект Γ_α^i необходимо либо систему (14), либо систему (16) (или какую-нибудь другую систему такой же структуры) разрешить относительно форм ω_α^i. Свернем уравнения (16') с тензором $\overset{*}{h}{}_{a\alpha}^j$:

$$\nabla(\overset{*}{h}{}_{a\alpha}^l h_{i\beta}^{a\alpha}) - a_{ik}^l\omega_\beta^k \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^k, \Theta^\alpha), \tag{31}$$

где

$$a^i_{jk} = \overset{*}{h}{}^i_{a\alpha} \; h^{a\alpha}_{jk}, \tag{32}$$

т.е. a^i_{jk} – тензор. Если симметрический тензор

$$a_{ij} = a^l_{ki} \; a^k_{lj} \tag{33}$$

является невырожденным, то в этом случае систему (31) можно разрешить относительно форм ω^i_α, т.е. инвариантным образом построить объект Γ^i_α.

Вильнюсский Государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
5.IX.1968

Литература

1. В. И. Близникас, Неголономное дифференцирование Ли и линейные связности в пространстве опорных элементов, Лит. матем. сб., VI (1966), 141–209.
2. В. И. Близникас, Аффинные связности, присоединенные к квазилинейной системе дифференциальных уравнений первого порядка с частными производными, Известн. высш. учебн. зав., мат., № 1 (68) (1968), 18–22.
3. В. В. Вагнер, Теория состовного многообразия, Труды сем. по векторн. и тензорн. анализу, вып. 8, 11–72, 1950.
4. Г. Ф. Лаптев, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий, Труды Московского мат. об-ва, т. 2,275–382, 1953.
5. Ю. Г. Лумисте, Связности в однородных расслоениях, Мат. сборн., т. 69 (111), № 3, 434–469, 1966.

PIRMOS EILĖS KVAZITIESINIŲ DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS SU DALINĖMIS IŠVESTINĖMIS GEOMETRIJOS KLAUSIMU

V. Bliznikas

(*Reziumė*)

Sakykime, $V_n(V_m)$ – išsluoksniuota erdvė V. Vagnerio prasme [3]. Jeigu turime diferencialinių lygčių sistemą (10), apibrėžtą ant $V_n(V_m)$, tai šią sistemą visuomet atitinka konkretus diferencialinis geometrinis objektas, sudarytas iš nagrinėjamos sistemos koeficientų, t. y. funkcijų sistema $h^{a\alpha}_i$, h^a visuomet sudaro diferencialinį geometrinį objektą.

Įrodyta, kad erdvės $V_n(V_m)$ vidiniai invariantiniai sąryšiai egzistuoja dviem atvejais, t. y. pirmuoju atveju $r=nm$ ir egzistuoja reliatyvus invariantas, kurio struktūra nusakoma (19) lygtimi, o antruoju atveju tenzorius $h^{a\alpha}_i$ turi atvirkštinį tenzorių $\overset{*}{h}{}^i_{a\alpha}$ ir išsluoksniuotos erdvės $V_n(V_m)$ bazė ir standartinis sluoksnis sutampa su afininėmis erdvėmis.

ÜBER DIE GEOMETRIE DES QUASILINEARISCHEN SYSTEMS PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ERSTER ORDNUNG

V. Bliznikas

(*Zusammenfassung*)

Das Problem der Geometrie der quasilinearischen Systems partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung ist von A. M. Wasiljew untersucht. Im diesem Artikel sind die intrinsike affinen Zusammenhänge und die Objekte anderer Zusammenhängen gefunden.