IX LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1

1969

УДК–513

МАКСИМАЛЬНО ПОДВИЖНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ГИПЕРПЛОСКОСТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОБЩЕЙ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

А. П. УРБОНАС

Введение

В 1956 году японский математик Т. Окубо (T. Okubo), пользуясь методом Муто [5] для пространств аффинной связности рассмотрел вопрос о максимальных порядках групп аффинных коллинеаций в обобщенных пространствах путей [6]. Аффинные коллинеации в этих пространствах для случая $n=3$ рассмотрел в своей диссертации А. Т. Кондратьев [1].

В предлагаемой работе методом Муто–Окубо полностью решен вопрос о максимальном порядке групп движений в пространстве гиперплоскостных элементов общей аффинной связности.

Результаты данной статьи доложены автором на научно-исследовательском семинаре при кафедре геометрии Казанского Государственного университета.

Автор благодарен проф. Б. Л. Лаптеву за помощь в подготовке настоящей статьи.

§ 1. Пространство U_n. Общая теория движений (автоморфизмов) в U_n

Пусть U_n – пространство гиперплоскостных элементов (x_i, u_k). Аффинная связность в U_n задается объектом

$$\left(\Gamma^i_{jk}(x, u), \quad C^{ij}_k(x, u)\right), \quad i, j, k=1, 2, 3, \ldots, n),$$

где Γ^i_{jk} – преобразуются по закону объекта аффинной связности и является одородной функцией нулевого измерения относительно u_k;

C^{ij}_k – тензор, однородный, минус первого измерения относительно второй группы аргументов и удовлетворяющий условию

$$C^{ij}_k u_j=0. \tag{1}$$

Как показал Б. Л. Лаптев [3], в этом случае (число индексов опорного тензора не превышает двух) можно еще потребовать

$$C^{ji}_k u_j=0. \tag{2}$$

Ковариантный дифференциал и ковариантные производные в U_n строятся следующим образом [3]:

$$\delta T^i_j=dT^i_j+\omega^i_k T^k_j-\omega^k_j T^i_k,$$

где

$$\omega_j^i = \Gamma_{jk}^i dx^k + C_j^{ik} \delta u_k,$$

$$T_{j,k}^i = \partial_k T_j^i + T_j^{i \cdot p} \Gamma_{pk}^s u_s + \Gamma_{sk}^i T_j^s - \Gamma_{jk}^s T_s^i, \tag{3}$$

$$T_j^{i:k} = T_j^{i \cdot k} + C_s^{ik} T_j^s - C_j^{sk} T_s^i, \tag{4}$$

для тензора T_j^i.

Здесь и в дальнейшем $^{\cdot k} = \frac{\partial}{\partial u_k}$.

Теория кривизны пространств тензорных опорных элементов разработана Б. Л. Лаптевым [3]. Выпишем необходимое для дальнейшего выражение первого тензора кривизны

$$\frac{1}{2} K_{jkl}^i = \partial_{[l} \Gamma_{|j|k]}^i + \Gamma_{p[l}^i \Gamma_{|j|k]}^p - \Gamma_{j[l}^{i \cdot p} \Gamma_{|p|k]}^s u_s. \tag{5}$$

Движениями пространства U_n являются такие точечные преобразования, относительно которых сохраняется аффинная связность (Γ, C). Для того, чтобы $v^i(x)$ определяло инфинитезимальное движение, оно должно удовлетворять системе уравнений (см. [2])

$$D\Gamma_{jk}^i \equiv v^i_{,j,k} + v^p K_{jkp}^i - \Gamma_{jk}^{i \cdot p} v^s_{,p} u_s - 2(v^p \Omega_{pj}^i)_{,k} - 2v^p \Gamma_{jk}^{i \cdot l} \Omega_{pl}^s u_s = 0, \tag{6}$$

$$DC_k^{ij} \equiv v^p \{ C_{k,p}^{ij} + \Omega_{ps}^i C_k^{sj} + \Omega_{ps}^j C_k^{is} - \Omega_{pk}^s C_s^{ij} +$$

$$+ C_k^{ij \cdot l} \Omega_{pl}^s u_s \} - v^i_{,s} C_k^{sj} - v^j_{,s} C_k^{is} + v^s_{,k} C_s^{ij} = 0, \tag{7}$$

где $\Omega_{jk}^i = \Gamma_{[jk]}^i$, а D — символ производной Ли.

Введем обозначение

$$v_j^i = v^i_{,j} \tag{8}$$

и v^i, v_j^i будем рассматривать как $n^2 + n$ неизвестных функций.

Условия интегрируемости (6), (7) и (8) уравнений записываются следующим образом [4]:

а) уравнение $DK_{jkl}^i = 0$ и все полученные из него последовательным ковариантным дифференцированием по x^p до порядка a, под знаком D;

б) уравнение $D\left(\Gamma_{jk}^{i \cdot l \cdot l \cdot \ldots \cdot l}{}_{\beta}\right) = 0$ и все полученные из него последовательным ковариантным дифференцированием по x^p до порядка γ под знаком D;

в) уравнение $D(C_{k,l}^{ij}) = 0$ и все полученные из него последовательным ковариантным дифференцированием по x^p под знаком D до порядка δ;

г) уравнение $D\left(C_k^{i \cdot j \cdot l \cdot l \cdot \ldots \cdot l}{}_{\lambda}\right) = 0$ и все полученные из него последовательным ковариантным дифференцированием по x^p под знаком D до порядка μ. (9)

Если при увеличении каждого из чисел a, β, γ, δ, λ, и μ на единицу число независимых уравнений в системе (9) $\rho < n^2 + n$ не меняется, то пространство будет допускать группу движений G_r порядка $r = n^2 + n - \rho$.

Условия интегрируемости (9) запишем в виде

$$K^i_{jA}\, v^j_i + K_{iA}\, v^i = 0, \quad (A = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \rho), \tag{10}$$

где все ρ уравнений независимы (см. [5]).

Рассмотрим подгруппу $G_{r'}$ такую, что $v^i(x) = 0$, в рассматриваемой точке, тогда (10) примут вид

$$K^i_{jA}\, v^j_i = 0.$$

Пусть среди этих последних имеется ρ' независимых уравнений, тогда $r' = n^2 + n - \rho'$.

Преобразуем (10) в

$$\begin{cases} K^i_{j\lambda}\, v^j_i + K_{i\lambda}\, v^i = 0, & (\lambda = 1,\ 2,\ \ldots,\ \rho'), \\ K_{i\mu}\, v^i = 0, & (\mu = \rho' + 1,\ \ldots,\ \rho), \end{cases} \tag{11}$$

где $\| K^i_{j\lambda} \|$ имеет ранг ρ'.

Для $\rho' < nP$ добавим к (11) подходящие уравнения (см. [5], [6])

$$K^i_{jB}\, v^j_i = 0, \quad (B = \rho' + 1,\ \ldots,\ nP - 1),$$

чтобы набор уравнений

$$\begin{cases} K^i_{j\lambda}\, v^j_i = 0, \\ K^i_{jB}\, v^j_i = 0, \\ S^{P+1}_i\, v^i_j = 0,\ \ldots,\ S^n_i\, v^i_j = 0 \end{cases} \tag{12}$$

давал одно решение v^i_j.

Здесь $S^{P+1}_i,\ \ldots,\ S^n_i$ являются назависимыми ковариантными векторами. Последние $n(n-P)$ уравнений в (12) являются требованием, чтобы $\vec{v}_i$ лежали в определенной P – мерной плоскости, т.е.

$$\vec{v}_i = \omega^a_i\, \vec{\xi}_a, \quad (a = 1,\ 2,\ \ldots,\ P)$$

или, возвращаясь к координатной записи, имеем:

$$v^j_i = \omega^1_i\, \xi^j_1 + \omega^2_i\, \xi^j_2 + \ldots + \omega^P_i\, \xi^j_P. \tag{13}$$

Теперь в силу произвольности $S^{P+1}_i,\ \ldots,\ S^n_i,\ \vec{\xi}_a$ можно выбрать лежащими, например, в гиперплоскости рассматриваемого элемента u_k:

$$\xi^i_a\, u_i = 0. \tag{14}$$

Так как условия, наложенные на подгруппу $G_{r'}$, выполненны, то уравнение $DC^{ij\cdot k}_l = 0$, содержащееся в (9) в рассматриваемой точке $(x^i,\ u_k)$, запишется

$$\sum_{a=1}^{P} \omega^a_l\, \xi^h_a\, C^{ij\cdot k}_h = \sum_{a=1}^{P} \omega^a_h\, \xi^i_a\, C^{hj\cdot k}_l + \sum_{a=1}^{P} \omega^a_h\, \xi^j_a\, C^{ih\cdot k}_l +$$

$$+ \sum_{a=1}^{P} \omega^a_h\, \xi^k_a\, C^{ij\cdot h}_l = 0 \tag{15}$$

для G_r, где $r > n^2 + n - nP$.

§ 2. Необходимые условия для существования групп движений G_r, порядка $r > n^2$, $n \geqslant 4$

При рассмотрении движений в U_n с общей неусеченной аффинной связностью (Γ, C), основную роль в условиях интегруруемости играют серии уравнений в) и г), поскольку возможно $K^i_{jkl}=0$ и $\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}(x)$, в то время как C^{ij}_l обязательно зависит от u_k, ибо в противоположном случае $C^{ij}_l=0$, что мы исключаем.

В данном случае мы имеем $P=1$ и (15) уравнения дают

$$\omega_l\, \xi^s\, C^{ij\cdot k}_s = \omega_s\, \xi^i\, C^{sj\cdot k}_l + \omega_s\, \xi^j\, C^{is\cdot k}_l + \omega_s\, \xi^k\, C^{ij\cdot s}_l. \tag{16}$$

Для рассматриваемой точки (x^i, u_k) пространства U_n выберем специальную систему координат, в которой*)

$$u_k = \delta^{\alpha_1}_k. \tag{17}$$

Тогда условия (14) дают

$$\xi^{\alpha_1} = 0.$$

Если к этому еще положим

$$\xi^s = \delta^s_{\alpha_2}, \tag{18}$$

то из (16) получим

$$C^{ij\cdot k}_{\alpha_2} = 0, \quad (i,\ j,\ k \neq \alpha_2).$$

Точку, означающую частное дифференцирование, в записи тензора $C^{ij\cdot k}_l$ в дальнейшем мы будем пропускать.

Последнее равенство дает

$$C^{ijk}_a = 0, \quad (a \neq \alpha_1;\ i,\ j,\ k \neq a). \tag{19}$$

Рассмотрим преобразование координат

$$A^{\alpha_2}_{\alpha'_3} = t, \quad A^{\alpha'_2}_{\alpha_3} = -t, \quad \text{другие} \quad A^i_{j'} = \delta^i_{j'}, \quad A^{i'}_j = \delta^{i'}_j.$$

Оно сохраняет (17), а, следовательно, и (19).

Из равенства

$$C^{\alpha'_2\alpha'_4\alpha'_5}_{\alpha'_3} = -t^2\, C^{\alpha_3\alpha_4\alpha_5}_{\alpha_2} + t\,(C^{\alpha_2\alpha_4\alpha_5}_{\alpha_2} - C^{\alpha_3\alpha_4\alpha_5}_{\alpha_3}) + C^{\alpha_2\alpha_4\alpha_5}_{\alpha_3} = 0,$$

которое должно выполняться при любом t, имеем

$$C^{\alpha_2\alpha_4\alpha_5}_{\alpha_2} = C^{\alpha_3\alpha_4\alpha_5}_{\alpha_3}.$$

Аналогично, из

$$C^{\alpha'_2\alpha'_4\alpha'_4}_{\alpha'_3} = 0,\ C^{\alpha'_2\alpha'_2\alpha'_4}_{\alpha'_3} = 0 \text{ и } C^{\alpha'_2\alpha'_2\alpha'_2}_{\alpha'_3} = 0,$$

имеем

$$C^{\alpha_2\alpha_4\alpha_4}_{\alpha_2} = C^{\alpha_3\alpha_4\alpha_4}_{\alpha_3},$$

$$C^{\alpha_2\alpha_2\alpha_4}_{\alpha_2} = C^{\alpha_3\alpha_2\alpha_4}_{\alpha_3} + C^{\alpha_2\alpha_3\alpha_4}_{\alpha_3},$$

$$C^{\alpha_2\alpha_2\alpha_2}_{\alpha_2} = C^{\alpha_3\alpha_2\alpha_2}_{\alpha_3} + C^{\alpha_2\alpha_3\alpha_2}_{\alpha_3} + C^{\alpha_2\alpha_2\alpha_3}_{\alpha_3}.$$

---

*) Через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ будем обозначать подстановку $1, 2, 3, \ldots, n$, т. е. $\alpha_i \neq \alpha_j$, если $i \neq j$.

Введем обозначения

$$C_{\alpha_2}^{\alpha_2\alpha_3\alpha_4}=A^{\alpha_3\alpha_4};\quad C_{\alpha_2}^{\alpha_3\alpha_2\alpha_4}=B^{\alpha_3\alpha_4};\quad C_{\alpha_2}^{\alpha_3\alpha_4\alpha_2}=C^{\alpha_3\alpha_4};$$

$$C_{\alpha_2}^{\alpha_2\alpha_3\alpha_3}=A^{\alpha_3\alpha_3};\quad C_{\alpha_2}^{\alpha_3\alpha_2\alpha_3}=B^{\alpha_3\alpha_3};\quad C_{\alpha_2}^{\alpha_3\alpha_3\alpha_2}=C^{\alpha_3\alpha_3};\quad \text{и т. д.}$$

Тогда

$$C_{\alpha_2}^{\alpha_2\alpha_2\alpha_3}=A^{\alpha_2\alpha_3}+B^{\alpha_2\alpha_3},$$

$$C_{\alpha_2}^{\alpha_2\alpha_2\alpha_2}=A^{\alpha_2\alpha_2}+B^{\alpha_2\alpha_2}+C^{\alpha_2\alpha_2}\quad \text{и т. д.}$$

Так как эти соотношения выполняются для всех $C_d^{abc}(a,\ b,\ c,\ d\neq\alpha_1)$, то

$$C_d^{abc}=\delta_d^a A^{bc}+\delta_d^b B^{ac}+\delta_d^c C^{ab}. \tag{20}$$

Берем преобразование координат:

$$A_{\alpha_1'}^{\alpha_2}=t,\quad A_{\alpha_2}^{\alpha_1'}=-t,$$

остальные

$$A_j^{i'}=\delta_j^{i'},\quad A_{j'}^{i}=\delta_{j'}^{i},$$

сохраняющее (17). Из

$$C_{\alpha_2'}^{\alpha_2'\alpha_4'\alpha_4'}=0,\quad C_{\alpha_2'}^{\alpha_2'\alpha_2'\alpha_4'}=0 \text{ и } C_{\alpha_2'}^{\alpha_2'\alpha_2'\alpha_2'}=0$$

имеем

$$C_{\alpha_2}^{\alpha_1\alpha_4\alpha_4}=0,\quad C_{\alpha_2}^{\alpha_1\alpha_1\alpha_4}=0,\quad C_{\alpha_2}^{\alpha_1\alpha_1\alpha_1}=0,$$

а из

$$C_{\alpha_4'}^{\alpha_2'\alpha_2\alpha_2}=C_{\alpha_4'}^{\alpha_2'\alpha_4'\alpha_2'}+C_{\alpha_4'}^{\alpha_2'\alpha_2'\alpha_4'},$$

получим

$$C_{\alpha_2}^{\alpha_1\alpha_2\alpha_2}=C_{\alpha_4}^{\alpha_1\alpha_4\alpha_2}+C_{\alpha_4}^{\alpha_1\alpha_2\alpha_4}=B^{\alpha_1\alpha_2}+C^{\alpha_1\alpha_2}\quad \text{и т. д.}$$

Эти равенства и (20) дают

$$C_a^{ijk}=\delta_a^i A^{jk}+\delta_a^j B^{ik}+\delta_a^k C^{ij},\quad (a\neq\alpha_1). \tag{21}$$

Определим теперь величины D^{ijk} уравнениями

$$C_{\alpha_1}^{ijk}=\delta_{\alpha_1}^i A^{jk}+\delta_{\alpha_1}^j B^{ik}+\delta_{\alpha_1}^k C^{ij}+D^{ijk}. \tag{22}$$

Так как в нашей системе координат имеет место (17), то из (21) и (22) выводим

$$C_l^{ijk}=\delta_l^i A^{jk}+\delta_l^j B^{ik}+\delta_l^k C^{ij}+u_l D^{ijk} \tag{23}$$

в любой координатной системе и для любой точки $(x^i,\ u_k)$ пространства U_n.

Из (1), (2) и однородности C_l^{ij}, следует

$$C_l^{ijk}u_i=-C_l^{kj}, \tag{24}$$

$$C_l^{ijk}u_j=-C_l^{ik}, \tag{25}$$

$$C_l^{ijk}u_k=-C_l^{ij}. \tag{26}$$

Подставив, полученное (23) выражение C_l^{ijk} в (26), имеем

$$-C_l^{ij}=\delta_l^i A^{jp}u_p+\delta_l^j B^{ip}u_p+u_l C^{ij}+u_l C^{ijp}u_p. \tag{27}$$

Теперь, в силу (1) и (2), получим

$$u_l A^{ip}u_p+\delta_l^i B^{kp}u_k u_p+u_l C^{pi}u_p+u_l D^{kip}u_k u_p=0 \tag{28}$$

и

$$\delta_l^i A^{kp}u_k u_p+u_l B^{ip}u_p+u_l C^{ip}u_p+u_l D^{ikp}u_k u_p=0. \tag{29}$$

При $l=1$, $i\neq 1$, имеем

$$A^{ip}u_p+C^{pi}u_p+D^{kip}u_k u_p=0,$$
$$B^{ip}u_p+C^{ip}u_p+D^{ikp}u_k u_p=0.$$

При $l=2$, $i\neq 2$, получим аналогичные уравнения и, таким образом,

$$A^{ip}u_p+C^{pi}u_p+D^{kip}u_k u_p=0, \tag{30}$$
$$B^{ip}u_p+C^{ip}u_p+D^{ikp}u_k u_p=0 \tag{31}$$

верно при любом i.

Продифференцируем (27) по u_k частно и сложим с (23):

$$\delta_l^i(2A^{jk}+A^{jp\cdot k}u_p)+\delta_l^j(2B^{ik}+B^{ip\cdot k}u_p)+\delta_l^k(2C^{ij}+D^{ijp}u_p)+$$
$$+u_l(2D^{ijk}+C^{ij\cdot k}+D^{ijp\cdot k}u_p).$$

Отсюда при $n\geqslant 4$ получим:

$$2D^{ijk}+C^{ij\cdot k}+D^{ijp\cdot k}u_p=0, \tag{32}$$
$$2C^{ij}+D^{ijp}u_p=0, \tag{33}$$
$$2B^{ik}=B^{ip\cdot k}u_p=0, \tag{34}$$
$$2A^{jk}+A^{jp\cdot k}u_p=0. \tag{35}$$

Из (33), продифференцированного по u_k частно, и (32), имеем

$$D^{ijk}=C^{ij\cdot k} \tag{36}$$

(33) и (36) показывают, что C^{ij} однородный минус второго измерения, относительно u_k. Из (30) и (31), в силу (36), получим

$$A^{ip}u_p=C^{pi}u_p, \tag{37}$$
$$B^{ip}u_p=C^{ip}u_p. \tag{38}$$

Пользуясь последними, из (34) и (35) выводим

$$B^{ij}=-C^{ij}-C^{ip}-{}^{ip\cdot j}u_p, \tag{39}$$
$$A^{ij}=-C^{ji}-C^{pi\cdot j}u_p. \tag{40}$$

(36), (39) и (40) соотношения позволяют (23) записать в виде:

$$C_l^{ijk}=-\delta_l^i(C^{kj}+C^{pj\cdot k}u_p)-\delta_l^j(C^{ik}+C^{ip\cdot k}u_p)+\delta_l^k C^{ij}+u_l C^{ij\cdot k}. \tag{41}$$

Умножив (41) на u_k и просуммировав, получим

$$C_l^{ij}=-\delta_l^i C^{pj}u_p-\delta_l^j C^{ip}u_p+u_l C^{ij}. \tag{42}$$

Простые вычисления дают:

$$C^{ij}=\frac{1}{n-2}\left[C_l^{ijl}+\frac{1}{n(n-2)}\left(C_l^{jli}+C_l^{lij}-(n-1)C_l^{lji}-(n-1)C_l^{ilj}\right)\right]. \tag{43}$$

Отметим еще, что

$$C^{ij}u_i u_j=0. \tag{44}$$

Суммируя изложенное, имеем теорему.

Теорема 1. *Для того, чтобы пространство U_n аффинной связности (Γ, C) (причем $C\neq 0$) допускало группу движений G_r порядка r, $n^2<r\leqslant n^2+n$, $n\geqslant 4$, необходимо, чтобы имели место соотношения* (42) *и* (43).

§ 3. Существование групп движений G_r, порядка $r>n^2$, $n\geqslant 4$

Из уравнения $DC_l^{ijk}=0$, учитывая (43), следует

$$\begin{cases} DC^{ij}=0, & (45)\\ DC^{ij\cdot k}=0. & (46)\end{cases}$$

Альтернируя (42) по индексам i и j, получим

$$C_l^{[ij]}=-\delta_l^i C^{[pj]}u_p-\delta_l^j C^{[ip]}u_p+u_l C^{[ij]}.$$

Последнее равенство показывает, что если $C_l^{[ij]}\neq 0$, то и $C^{[ij]}\neq 0$ и обратно, если $C^{[ij]}\neq 0$, то и $C_l^{[ij]}\neq 0$.

Рассмотрим случай

$$S^{ij}=C^{[ij]}\neq 0. \tag{47}$$

В рассматриваемой точке (x^i, u_k) пространства U_n выберем систему координат в которой

$$u_k=\delta_k^{\alpha_1}. \tag{48}$$

Так как хотя бы одна компонента S^{ij} отлична от нуля, рассмотрим два возможных случая:

а) $S^{\alpha_1\alpha_2}\neq 0$,

б) $S^{\alpha_2\alpha_3}\neq 0$, а все компоненты вида $S^{\alpha_1\alpha_i}=0$.

Из (45) следует

$$DS^{ij}=0,$$

или, в развернутом виде,

$$v^k(S^{ij}_{,k}+\Omega^i_{ks}S^{sj}+\Omega^j_{ks}S^{is}+S^{ij\cdot p}\Omega^{\alpha_1}_{kp})-v^s_k T^k_s({}^{ij})=0. \tag{49}$$

где

$$T^k_s({}^{ij})=\delta^i_s S^{kj}+\delta^j_s S^{ik}+S^{ij\cdot k}\delta^{\alpha_1}_s. \tag{50}$$

В случае а) ранг матрицы (50) $m\geqslant 2n-2$. Действительно, если вычислим минор порядка $2n-2$, составленный из коэффициентов при функциях $v^{\alpha_k}_{\alpha_1}$, $v^{\alpha_i}_{\alpha_2}$, $v^{\alpha_2}_{\alpha_1}$ в уравнениях $(a_l a_2)$, (a_1, a_j) и $(a_1 a_2 a_2)$, $(k, l=3, 4, \ldots, n;\ i, j=2, 3, \ldots, n)$ системы (49), то найдем, что он, с точностью до знака, равен степени составляющей $S^{\alpha_1\alpha_2}$.

Во втором случае (случай б)) ранг матрицы $m\geqslant 3n-8$. Аналогично случаю а), можно выделить минор порядка $3n-8$, составленный из коэффициентов при функциях $v^{\alpha_k}_{\alpha_2}$, $v^{\alpha_l}_{\alpha_3}$, $v^{\alpha_l}_{\alpha_1}$ в уравнениях $(a_l a_3)$, $(a_2 a_j)$, $(a_2 a_3 a_k)$, $(k, l=4,5,\ldots$ $\ldots, n;\ i, j=3, 4, \ldots, n)$, равный, с точностью до знака, степени компоненты $S^{\alpha_2\alpha_3}$. Так как у нас $r>n^2$, $n\geqslant 4$, то оба случая ($m\geqslant 2n-2$ и $m\geqslant 3n-8$) невозможны, поэтому

$$C^{[ij]}=0.$$

Если C^{ij} — симметрический тензор, тогда в точке (x^i, u_k) его можно представить, изменяя надлежащим образом систему координат, в канонической диагональной форме

$$C^{ij}=\varepsilon^i\delta^{ij},$$

где $\varepsilon^i = \pm 1{,}0$, а δ^{ij} — в особой записи символ Кроникера. Тогда (45) дает

$$v^i_j \varepsilon^j + v^j_i \varepsilon^i \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ v^k,\ v^k_p u_k) \tag{51}$$

(по i, j нет суммирования!).

Если ранг C^{ij} больше единицы, то уравнения (51) дают не менее $2n-3$ независимых уравнений, поэтому ранг C^{ij} может быть только единица. Представим C_{ij} в виде

$$C^{ij} = \pm C^i C^j. \tag{52}$$

Здесь $C^i \neq 0$, иначе аффинная связность (Γ, C) была бы усеченной, а этого случая мы не рассматриваем.

Из (44) и (52), имеем

$$C^i u_i = 0. \tag{53}$$

Так как C^{ij} однородный минус второго измерения, то C^i будет однородным минус первого измерения относительно опорного ковектора:

$$C^{i \cdot j} u_j = -C^i. \tag{54}$$

Дифференцируя (53) ковариантно по x^k и частно по u_k, получим

$$C^i_{,k} u_i = 0, \tag{55}$$

$$C^{i \cdot k} u_i = -C^k. \tag{56}$$

Из (45), учитывая (52), найдем

$$(DC^i) C^j + C^i (DC^j) = 0. \tag{57}$$

Умножив последнее на ковектор P_i, удовлетворяющий условию $C^i P_i = 1$, имеем

$$DC^i = KC^i.$$

Подстановка этого выражения обратно в (57), дает $K=0$, и

$$DC^i = 0. \tag{58}$$

Учитывая (53), можно выбрать координатную систему, в которой

$$u_k = \delta^{\alpha_1}_k,$$

$$C^i = \delta^i_{\alpha_2}, \tag{59}$$

в рассматриваемой точке (x^i, u_k). Тогда (55) и (56) дают

$$C^{\alpha_1}_{,k} = 0; \quad C^{\alpha_2 \cdot k} = -\delta^k_{\alpha_2}. \tag{60}$$

В выбранной выше системе координат, (58) уравнение становится

$$v^k (C^i_{,k} + \Omega^i_{kp} C^p + C^{i \cdot p} \Omega^{\alpha_1}_{kp}) - v^i_{\alpha_2} - C^{i \cdot k} v^{\alpha_1}_k = 0. \tag{61}$$

При $i=\alpha_1$ последнее уравнение удовлетворяется тождественно, вследствие (60). При $i=\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ (61) дает $n-1$ независимое уравнение:

$$v^i_{\alpha_2} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ v^k,\ v^{\alpha_1}_k). \tag{62}$$

Отметим, что из условий интегрируемости мы не должны получить другие уравнения, независимые от (62), иначе получим противоречие условию $r > n^2$, $n \geqslant 4$.

Продифференцировав (58) частно по u_k, учитывая перестановочность дифференцирования Ли и частного по u_k, имеем

$$D(C^{i\cdot k})=0. \tag{63}$$

Повторяя ту же самую аргументацию для $C^{i\cdot j}$, которую мы применяли к C^{ij}, получим

$$C^{i\cdot j}=\pm B^i B^j. \tag{64}$$

Из (63) и (64), следует

$$DB^i=0. \tag{65}$$

Если C^i линейно-независим от B^i, мы из (65) получим еще хотя бы одно уравнение, не зависящее от (62), поэтому

$$B^i=aC^i. \tag{66}$$

Теперь (64) становится

$$C^{i\cdot j}=\pm a^2 C^i C^j. \tag{67}$$

Умножив (67) на u_j и, имея в виду (53), (54), получим $C^i=0$, что противоречит условию $C_l^{ij}\neq 0$.

Таким образом, имеем теорему:

Теорема 2. *Не существует пространств U_n общей неусеченной аффинной связности, допускающих группы движений G_r порядка r, $r>n^2$, $n\geqslant 4$.*

§ 4. Необходимые условия для существования групп движений G_r, $r>n^2-n+2$, $n\geqslant 7$

В этом случае ($P=2$) формулы (13), (14) и (15) имеют вид:

$$v_j^i=\omega_j^1\,\xi_1^i+\omega_j^2\,\xi_2^i, \tag{68}$$

$$\xi_1^i\,u_i=\xi_2^i\,u_i=0, \tag{69}$$

$$(\omega_l^1\,\xi_1^h+\omega_l^2\,\xi_2^h)\,C_h^{ijk}=(\omega_h^1\,\xi_1^i+\omega_h^2\,\xi_2^i)\,C_l^{hjk}+$$
$$+(\omega_h^1\,\xi_1^j+\omega_h^2\,\xi_2^j)\,C_l^{ihk}+(\omega_h^1\,\xi_1^k+\omega_h^2\,\xi_2^k)\,C_l^{ijh}. \tag{70}$$

Возьмем координатную систему, в которой

$$u_k=\delta_k^{\alpha_1} \tag{71}$$

для рассматриваемой точки (x^i, u_k). Кроме того, берем

$$\xi_1^i=\delta_{\alpha_2}^i,\quad \xi_2^i=\delta_{\alpha_3}^i.$$

Тогда уравнения (70) дают

$$C_{\alpha_2}^{ijk}\,\omega_l^1+C_{\alpha_3}^{ijk}\,\omega_l^2=0,\qquad (i,\ j,\ k\neq\alpha_2,\ \alpha_3). \tag{72}$$

Если ω_l^1 и ω_l^2 линейно независимы, то из (72), получим

$$C_{\alpha_2}^{ijk}=C_{\alpha_3}^{ijk}=0,\qquad (i,\ j,\ k\neq\alpha_2,\ \alpha_3).$$

Так как вместо a_2, a_3 мы можем взять любую пару из $a_2, a_3, \ldots, a_n$, то

$$C_a^{ijk}=0,\qquad (a\neq\alpha_1;\quad i,\ j,\ k\neq a). \tag{73}$$

Отсюда, с помощью тех же приемов, которыми пользовались в § 2, получим формулы (42) и (43).

Пусть ω_l^1 и ω_l^2 линейно-независимы. Возьмем $n-3$ линейно-независимых ковариантных векторов W_i^a $(a=a_4, a_5, \ldots, a_n)$ не зависимых с u_k и удовлетворяющих условиям

$$\xi_1^i W_i^a = \xi_2^i W_i^a = 0. \tag{74}$$

Умножив (70) на $W_i^a W_j^b W_k^c$, получим

$$C_h^{ijk}(\xi_1^h \omega_l^1 + \omega_l^2 \xi_2^h) W_i^a W_j^b W_k^c = 0, \qquad (a, b, c \neq \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

Представим последнее в виде

$$\frac{C_h^{ijk}\xi_2^h W_i^a W_j^b W_k^c}{C_h^{ijk}\xi_1^h W_i^a W_j^b W_k^c} = -\frac{\omega_l^1}{\omega_l^2}. \tag{75}$$

Может случиться, что

$$1)\ C_h^{ijk}\xi_1^h W_i^a W_j^b W_k^c = 0, \tag{76}$$

$$2)\ C_h^{ijk}\xi_2^h W_i^a W_j^b W_k^c = 0. \tag{77}$$

Рассмотрим первый случай.

Возьмем

$$\xi_1^h = \delta_{\alpha_2}^h, \quad \xi_2^h = \delta_{\alpha_3}^h; \quad W_i^{\alpha_4} = \delta_i^{\alpha_4}, \quad W_j^{\alpha_5} = \delta_j^{\alpha_5}, \quad W_k^{\alpha_6} = \delta_k^{\alpha_6},$$

и (76) дает

$$C_{\alpha_2}^{\alpha_4\alpha_5\alpha_6} = 0,$$

при

$$W_i^{\alpha_4} = \delta_i^{\alpha_4}, \quad W_j^{\alpha_5} = \delta_j^{\alpha_4} + \delta_j^{\alpha_5}, \quad W_k^{\alpha_6} = \delta_k^{\alpha_6},$$

имеем

$$C_{\alpha_2}^{\alpha_4\alpha_4\alpha_6} = 0, \text{ а } W_i^{\alpha_4} = \delta_i^{\alpha_4}, \quad W_j^{\alpha_5} = \delta_j^{\alpha_4} + \delta_j^{\alpha_5}, \quad W_k^{\alpha_6} = \delta_k^{\alpha_4} + \delta_k^{\alpha_6},$$

дает $C_{\alpha_2}^{\alpha_4\alpha_4\alpha_4} = 0$.

Перейдем к новой системе координат $A_{\alpha_1'}^{\alpha_4} = t, A_{\alpha_1}^{\alpha} = -t$, остальные $A_{j'}^{i} = \delta_{jj'}^{i}$, $A_j^{i'} = \delta_j^{i'}$. В этой системе координат (71) сохраняется, а, следовательно, сохраняются и только что полученные соотношения:

$$C_{\alpha_2'}^{\alpha_4'\alpha_5'\alpha_6} = 0, \quad C_{\alpha_2}^{\alpha_4'\alpha_4'\alpha_6} = 0, \quad C_{\alpha_2'}^{\alpha_4'\alpha_4'\alpha_4'} = 0.$$

Из этих соотношений, получим

$$C_{\alpha_2}^{\alpha_1\alpha_5\alpha_6} = 0, \quad C_{\alpha_2}^{\alpha_1\alpha_1\alpha_6} = 0, \quad C_{\alpha_2}^{\alpha_1\alpha_1\alpha_1} = 0.$$

Аналогично убеждаемся в справедливости остальных соотношений

$$C_a^{ijk} = 0 \ (a \neq a_1; \ i, j, k \neq a).$$

Это совпадает с (73) и мы имеем (42) и (43).

К тому же результату приводит нас и рассмотрение (77) (второго случая). Ввиду полной аналогии, этим заниматься не будем.

Вернемся к (75) формуле. Имея ввиду линейную зависимость ω_l^1 и ω_l^2 можем записать:

$$\omega_l^1 = -\rho(\xi_1^h, \xi_2^h)\,\omega_l^2, \tag{78}$$

и (75) становится

$$\frac{C_h^{ijk}\xi_2^h W_i^a W_j^b W_k^c}{C_h^{ijk}\xi_1^h W_i^a W_j^b W_k^c} = \rho(\xi_1^h, \xi_2^h). \tag{79}$$

Пусть E_i^s $(s=\alpha_5, \alpha_6, \ldots, \alpha_n)-(n-4)$ линейно-независимых ковектора, не зависимых с u_k, и удовлетворяющих условиям

$$X^i E_i^s = Y^i E_i^s = Z^i E_i^s = 0,$$

где X^i, Y^i, Z^i, являются любыми данными линейно-независимыми векторами.

Положив

$$1)\ \begin{cases} \xi_2^i = Z^i, \\ \xi_1^i = Y^i; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} \xi_2^i = Y^i, \\ \xi_1^i = X^i; \end{cases} \qquad 3)\ \begin{cases} \xi_2^i = Z^i, \\ \xi_1^i = X^i; \end{cases}$$

и $W_i^s = E_i^s (s=\alpha_5, \alpha_6, \ldots, \alpha_n)$, из (79) получим

$$\rho(X^i, Y^i)\cdot\rho(Y^i, Z^i)=\rho(X^i, Z^i).$$

Отсюда

$$\rho(X^i, Y^i)=\frac{\rho(X^i, Z^i)}{\rho(Y^i, Z^i)},$$

что позволяет нам записать

$$\rho(\xi_1^h, \xi_2^h)=\frac{\mu(\xi_2^h)}{\mu(\xi_1^h)}. \tag{80}$$

Подставив (80) в (79), имеем

$$\frac{C_h^{ijk}\xi_2^h W_i^a W_j^b W_k^c}{C_h^{ijk}\xi_1^h W_i^a W_j^b W_k^c}=\frac{\mu(\xi_2^h)}{\mu(\xi_1^h)}. \tag{81}$$

Заменив вектор ξ_2^h в (81) на $\xi_2^h+t\xi_1^h$, найдем

$$\mu(\xi_2^h+t\xi_1^h)=\mu(\xi_2^h)+t\mu(\xi_1^h).$$

Так как это соотношение должно выполняться для произвольных ξ_1^i, ξ_2^i и t, то

$$\mu(\xi_a^h)=A_i\xi_a^i, \qquad (a=1,\ 2). \tag{82}$$

Случай $A_i=0$ сводится к рассмотренным случаям (76) и (77). Поэтому, будем считать, $A_i\neq 0$.

Подставив (82) в (81), получим

$$A_p\xi_2^p C_h^{ijk}\xi_1^h W_i^a W_j^b W_k^c = A_p\xi_1^p C_h^{ijk}\xi_2^h W_i^a W_j^b W_k^c. \tag{83}$$

Положив

$$\xi_1^i=\delta_{\alpha_2}^i, \quad \xi_2^i=\delta_{\alpha_3}^i; \quad W_i^a=\delta_i^a, \quad (a\neq\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3),$$

находим

$$A_{\alpha_3}C_{\alpha_2}^{abc}=A_{\alpha_2}C_{\alpha_3}^{abc}, \quad (a,\ b,\ c\neq\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3).$$

Так как вместо a_2, a_3 можно взять любые из $a_2, a_3, \ldots, a_n$, то имеем

$$A_l C_k^{abc}=A_k C_l^{abc}, \quad (a,\ b,\ c,\ l,\ k\neq\alpha; \quad a,\ b,\ c\neq k,\ l). \tag{84}$$

Рассмотрим преобразование координат $A_{\alpha_1'}^{\alpha_3}=-t$, $A_{\alpha_1}^{\alpha_3'}=t$, остальные $A_{j'}^i=\delta_{j'}^i$, $A_j^{i'}=\delta_j^{i'}$, которое сохраняет (71), а тем самым и (84). Тогда из

$$A_{\alpha_2'}C_{\alpha_3'}^{\alpha_5'\alpha_4'\alpha_6'}=A_{\alpha_3'}C_{\alpha_2'}^{\alpha_5'\alpha_4'\alpha_6'},$$

вытекает

$$A_{\alpha_3}(C_{\alpha_2}^{\alpha_5\alpha_4\alpha_6}+tC_{\alpha_2}^{\alpha_1\alpha_4\alpha_6})=A_{\alpha_2}(C_{\alpha_3}^{\alpha_5\alpha_4\alpha_6}+tC_{\alpha_3}^{\alpha_1\alpha_4\alpha_6}),$$

которое должно выполняться для любого t, поэтому должно иметь место

$$A_{\alpha_2} C_{\alpha_5}^{\alpha_1 \alpha_4 \alpha_4} = A_{\alpha_5} C_{\alpha_2}^{\alpha_1 \alpha_4 \alpha_4} .$$

Тем же путем легко убеждаемся в справедливости соотношений

$$A_l C_p^{ijk} = A_p C_l^{ijk}, \quad (i,\ j,\ k \neq l,\ p;\ l,\ p \neq \alpha_1). \tag{85}$$

Определим величины D^{ijk} уравнениями

$$C_l^{ijk} = A_l D^{ijk}, \quad (l \neq \alpha_1;\ i,\ j,\ k \neq l), \tag{86}$$

которые, в силу (85), совместны.

Взяв в (83) $a = \alpha_5$, $b = \alpha_4$, $c = \alpha_6$,

$$\xi_1^i = \delta_{\alpha_2}^i + t\delta_{\alpha_4}^i,\ \ \xi_2^i = \delta_{\alpha_3}^i,\ \ W_i^{\alpha_6} = t\delta_i^{\alpha_3} - \delta_i^{\alpha_4},\ \ W_i^{\alpha_5} = \delta_i^{\alpha_5},\ \ W_i^{\alpha_4} = \delta_i^{\alpha_6},$$

имеем

$$t^2 (A_{\alpha_6} C_{\alpha_4}^{\alpha_5 \alpha_3 \alpha_6} - A_{\alpha_4} C_{\alpha_6}^{\alpha_5 \alpha_3 \alpha_6}) + t (A_{\alpha_3} C_{\alpha_3}^{\alpha_5 \alpha_2 \alpha_6} - A_{\alpha_2} C_{\alpha_4}^{\alpha_5 \alpha_4 \alpha_6} -$$

$$- A_{\alpha_6} C_{\alpha_3}^{\alpha_5 \alpha_3 \alpha_6} + A_{\alpha_4} C_{\alpha_2}^{\alpha_5 \alpha_4 \alpha_4}) - A_{\alpha_3} C_{\alpha_2}^{\alpha_5 \alpha_4 \alpha_6} + A_{\alpha_2} C_{\alpha_3}^{\alpha_5 \alpha_4 \alpha_4} = 0.$$

Если учтем (86), получим

$$C_{\alpha_2}^{\alpha_5 \alpha_3 \alpha_6} - A_{\alpha_6} D^{\alpha_5 \alpha_3 \alpha_6} = D_{\alpha_4}^{\alpha_5 \alpha_4 \alpha_6} - A_{\alpha_4} D^{\alpha_6 \alpha_4 \alpha_5}. \tag{87}$$

Обозначим

$$M_l^{ijk} = C_l^{ijk} - A_l C^{ijk}, \quad (l \neq \alpha_1). \tag{88}$$

Теперь (87) запишутся в виде

$$M_{\alpha_2}^{\alpha_6 \alpha_3 \alpha_6} = M_{\alpha_4}^{\alpha_5 \alpha_4 \alpha_6} .$$

Вычисления, аналогичные только что проведенному, дают

$$M_{\alpha_2}^{\alpha_2 \alpha_4 \alpha_5} = M_{\alpha_3}^{\alpha_3 \alpha_4 \alpha_4} = M_{\alpha_4}^{\alpha_4 \alpha_4 \alpha_5} = \ldots = M_{\alpha_n}^{\alpha_n \alpha_4 \alpha_5} = A^{\alpha_4 \alpha_5};$$

$$M_{\alpha_2}^{\alpha_4 \alpha_2 \alpha_6} = M_{\alpha_3}^{\alpha_4 \alpha_3 \alpha_5} = M_{\alpha_4}^{\alpha_4 \alpha_4 \alpha_5} = \ldots = M_{\alpha_n}^{\alpha_4 \alpha_n \alpha_5} = B^{\alpha_4 \alpha_5};$$

$$M_{\alpha_2}^{\alpha_4 \alpha_5 \alpha_2} = M_{\alpha_3}^{\alpha_4 \alpha_5 \alpha_3} = M_{\alpha_4}^{\alpha_4 \alpha_5 \alpha_4} = \ldots = M_{\alpha_n}^{\alpha_4 \alpha_5 \alpha_n} = N^{\alpha_4 \alpha_5};$$

$$M_{\alpha_2}^{\alpha_2 \alpha_2 \alpha_5} = A^{\alpha_2 \alpha_5} + B^{\alpha_2 \alpha_5},$$

$$M_{\alpha_2}^{\alpha_2 \alpha_2 \alpha_2} = A^{\alpha_2 \alpha_2} + B^{\alpha_2 \alpha_2} + N^{\alpha_2 \alpha_2} .$$

Так как эти соотношения верны для чисел $a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n$, то мы имеем

$$M_l^{ijk} = \delta_l^i A^{jk} + \delta_l^j B^{ik} + \delta_l^k N^{ij}, \quad (i,\ j,\ k,\ l \neq \alpha_1). \tag{89}$$

Рассматривая преобразования координат, оставляющих (71), из (89) легко получить

$$M_l^{ijk} = \delta_l^i A^{jk} + \delta_l^j B^{ik} + \delta_l^k N^{ij}, \quad (l \neq \alpha_1) \tag{90}$$

Вспомнив еще обозначение (88), имеем

$$C_l^{ijk} = \delta_l^i A^{jk} + \delta_l^j B^{ik} + \delta_l^k N^{ij} + A_l C^{ijk}, \quad (l \neq \alpha_1). \tag{91}$$

Определим величины C^{ijk} следующим образом:

$$C_{\alpha_1}^{ijk} = \delta_{\alpha_1}^i A^{jk} + \delta_{\alpha_1}^j B^{ik} + \delta_{\alpha_1}^k N^{ij} + A_{\alpha_1} D^{ijk} + C^{ijk}. \tag{92}$$

Так как в рассматриваемой точке мы имеем (71), то из (91) и (92), следует

$$C_l^{ijk} = \delta_l^i A^{jk} + \delta_l^j B^{ik} + \delta_l^k N^{ij} + A_l D^{ijk} + u_l C^{ijk}. \qquad (93)$$

Это выражение мы получили для рассматриваемой точки (x^i, u_k), но так как это тензорная форма, то она остается верной и для любой точки пространства U_n.

Если в (93) A_l и u_l линейно-зависимы, то из (93) легко следует (42) и (43).

§ 5. Для G_r, $r > n^2 - n + 2$, $n \geqslant 7$ тензор $D^{ijk} = 0$

В этом параграфе, считая A_l и u_l линейно-независимыми, докажем, что при $r > n^2 - n + 2$, $n \geqslant 7$

$$D^{ijk} = 0. \qquad (94)$$

В силу (93), имеем

$$DC_l^{ijk} = \delta_l^i DA^{jk} + \delta_l^j DB^{ik} + \delta_l^k DN^{ij} + \\ + u_l DC^{ijk} + (DA_l) D^{ijk} + A_l (DD^{ijk}) = 0. \qquad (95)$$

В рассматриваемой точке (x^i, u_k) выберем систему координат, в которой

$$u_k = \delta_k^i, \; DA_l = A_l = 0, \; (l = 4, 5, \ldots, n).$$

Из (95), получим:

$$DA^{jk} = 0, \; (i = l = 4; \; j, k \neq 4),$$

$$DA^{jk} = 0, \; (i = l = 5; \; j, k \neq 5),$$

$$DA^{jk} = 0, \; (i = l = 6; \; j, k \neq 6);$$

или

$$DA^{jk} = 0, \text{ для любых } j, k. \qquad (96)$$

Аналогично, имеем

$$DB^{ik} = 0, \qquad (97)$$

$$DN^{ij} = 0. \qquad (98)$$

Таким образом, (95) становится

$$u_l DC^{ijk} + (DA_l) D^{ijk} + A_l DD^{ijk} = 0. \qquad (99)$$

Если u_l, A_l и DA_l линейно-независимы, то (99) сразу дает

$$D^{ijk} = 0,$$

поэтому

$$DA_l = \alpha A_l + \beta u_l. \qquad (100)$$

Подстановка этого выражения в (99), дает

$$DC^{ijk} = -\beta D^{ijk}, \qquad (101)$$

$$DD^{ijk} = -\alpha D^{ijk}. \qquad (102)$$

Таким образом, уравнение (95) можно заменить системой уравнений (96), (97), (98), (100), (101) и (102). Число независимых уравнений в этой системе не должно превысить $2n-3$.

Займемся подсчетом числа линейно-независимых уравнений в (100).

Возьмем координатную систему, в которой

$$u_k = \delta_k^{\alpha_1}, \quad A_l = \delta_l^{\alpha_2}. \tag{103}$$

Тогда (100) запишется:

$$v^h (A_{l,h} - \Omega_{hl}^{\alpha_2} - A_l^{\cdot p}\, \Omega_{hp}^{\alpha_1}) + v_l^{\alpha_2} - A_l^{\cdot s}\, v_s^{\alpha_1} = \alpha\delta_l^{\alpha_2} + \beta\delta_l^{\alpha_1}. \tag{104}$$

При $l = \alpha_1,\ \alpha_2$, получим

$$\beta = v^h (A_{\alpha_1, h} - \Omega_{h\alpha_1}^{\alpha_2} - A_{\alpha_1}^{\cdot p}\, \Omega_{hp}^{\alpha_1}) + v_{\alpha_1}^{\alpha_2} - A_{\alpha_1}^{\cdot s}\, v_s^{\alpha_1}, \tag{105}$$

$$\alpha = v^h (A_{\alpha_2, h} - \Omega_{h\alpha_2}^{\alpha_2} - A_{\alpha_2}^{\cdot p}\, \Omega_{hp}^{\alpha_1}) + v_{\alpha_2}^{\alpha_2} - A_{\alpha_2}^{\cdot s}\, v_s^{\alpha_1}, \tag{106}$$

которые позволяют определить α и β.

При $l = \alpha_3,\ \alpha_4,\ \ldots,\ \alpha_n$ (104) дают $n-2$ линейно-независимых уравнений

$$v_l^{\alpha_2} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, v^h,\ v_h^{\alpha_1}). \tag{107}$$

Докажем теорему.

Теорема 3. *Тензора A^{ij}, B^{ij}, N^{ij} являются симметрическими тензорами вида*

$$A^{ij} = \varepsilon_1 A^i A^j, \tag{108}$$

$$B^{ij} = \varepsilon_2 B^i B^j, \tag{109}$$

$$N^{ij} = \varepsilon_3 N^i N^j, \tag{110}$$

где $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3 = \pm 1$.

Доказательство. Начнем с тензора A^{ij}.

Введем обозначение

$$S^{ij} = A^{[ij]} \tag{111}$$

и предположим что $S^{ij} \neq 0$.

Из (96), следует

$$DS^{ij} \equiv v^h (S^{ij}{}_{,h} + \Omega_{hs}^{i}\, S^{sj} + \Omega_{hs}^{j}\, S^{is} + S^{ij\cdot p}\, \Omega_{hp}^{s}\, u_s -$$

$$- v_h^i\, S^{hj} - v_h^j\, S^{ih} - S^{ij\cdot h}\, v_h^s\, u_s = 0. \tag{112}$$

В координатной системе, удовлетворяющей (103), уравнения (112) становятся

$$v_k^s\, T_s^k ({}^{ij}) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ v^k,\ v_k^{\alpha_1}), \tag{113}$$

где

$$T_s^k ({}^{ij}) = \delta_s^i\, S^{kj} + \delta_s^j\, S^{ik}. \tag{114}$$

Рассмотрим следующие случаи (в выбранной системе координат индексы α_1 и α_2 имеют особое положение):

1. $S^{\alpha_1 \alpha_2} \neq 0$,
2. $S^{\alpha_1 \alpha_3} \neq 0$,
3. $S^{\alpha_2 \alpha_3} \neq 0$,
4. $S^{\alpha_3 \alpha_4} \neq 0$.

1. Пусть $S^{\alpha_1 \alpha_2} \neq 0$. В этом случае ранг матрицы (113) и (107) уравнений не ниже $3n-5$.

Действительно, минор порядка $3n-5$, составленный из коэффициентов при функциях $v_{\alpha_l}^{\alpha_2}$, $v_{\alpha_1}^{\alpha_l}$, $v_{\alpha_2}^{\alpha_i}$ в уравнениях (107) и $(\alpha_k \alpha_2)$, (α_1, α_j) из системы (113) ($k, l=3, 4, \ldots, n$; $ij=2, 3, \ldots, n$), равен (с точностью до знака) степени $S^{\alpha_1\alpha_2}$. Так как $r>n_2-n+2$, $n\geqslant 7$, то этот случай невозможен.

2. $S^{\alpha_1\alpha_3}\neq 0$, $S^{\alpha_1\alpha_2}=0$.

Минор порядка $3n-6$, составленный из коэффициентов при функциях $v_{\alpha_l}^{\alpha_2}$, $v_{\alpha_1}^{\alpha_i}$, $v_{\alpha_3}^{\alpha_k}$ в уравнениях (107) и $(a_j a_3)$, $(\alpha_l \alpha_k)$ системы (113), отличен от нуля ($l, k=3, 4, \ldots, n$; $i, j=2, 4, \ldots, n$). Этот случай невозможен по той же причине, что и первый случай.

3. $S^{\alpha_2\alpha_3}\neq 0$, $S^{\alpha_1\alpha_2}=S^{\alpha_1\alpha_3}=0$.

Минор порядка $3n-7$, составленный из коэффициентов при функциях $v_{\alpha_l}^{\alpha_2}$, $v_{\alpha_2}^{\alpha_i}$, $v_{\alpha_3}^{\alpha_k}$ в уравнениях (107) и $(\alpha_j a_3)$, $(\alpha_2\alpha_k)$ системы (113), отличен от нуля ($i, j=4, 5, \ldots, n$; $l, k=3, 4, \ldots, n$), что противоречит условию $r>n^2-n+2$, $n\geqslant 7$.

4. $S^{\alpha_3\alpha_4}\neq 0$, $S^{\alpha_1\alpha_2}=S^{\alpha_1\alpha_3}=S^{\alpha_2\alpha_3}=0$.

Минор порядка $3n-9$, составленный из коэффициентов при функциях $v_{\alpha_l}^{\alpha_2}$, $v_{\alpha_3}^{\alpha_i}$, $v_{\alpha_4}^{\alpha_4}$, $v_{\alpha_4}^{\alpha_i}$ в уравнениях (107) и $(\alpha_4\,\alpha_j)$ $(\alpha_3\alpha_4)$, $(\alpha_3\alpha_j)$ системы (113), отличен от нуля ($l=3, 4, \ldots n$; $i, j=5, 6, \ldots, n$).

Из изложенного следует, что если $S^{ij}\neq 0$, то пространство U_n общей аффинной связности не может допускать групп движений G_r, порядка $r>n^2-n+$ $+2$, $n\geqslant 7$.

Следовательно, A^{ij} — симметрический.

Аналогично следует симметричность B^{ij} и N^{ij}.

В координатной системе, удовлетворяющей (103), уравнение (96) запишется:

$$v_k^i\, A^{kj}+v_k^j\, A^{ik}\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ v^k,\ v_k^{\alpha_1}). \tag{115}$$

Рассмотрим три случая:

а) $A^{\alpha_1 k}\neq 0$;

б) $A^{\alpha_2 k}\neq 0$, $A^{\alpha_1 k}=0$;

в) $A^{\alpha_3 k}\neq 0$, $A^{\alpha_1 k}=A^{\alpha_2 k}=0$.

Случай а). Из (115), имеем

$$v_k^j\, A^{\alpha_1 k}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ v^k,\ v_k^{\alpha_1}), \qquad (j=\alpha_3,\ \alpha_4,\ \ldots,\ \alpha_n) \tag{116}$$

и

$$v_k^j\, A^{\alpha_2 k}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ v^k,\ v_k^{\alpha_1},\ v_k^{\alpha_2}), \qquad (j=\alpha_3\ \alpha_4,\ \ldots,\ \alpha_n). \tag{117}$$

Если $A^{\alpha_2 k}$ линейно не зависит от $A^{\alpha_1 k}$, то (107), (116) и (117) вместе дают $3n-6$ независимых уравнений, что противоречит условию $r>n^2-n+2$, $n\geqslant 7$.

Поэтому, положим

$$A^{\alpha_2 k}=t^{\alpha_2}\, A^k, \quad \text{где} \quad A^k=A^{\alpha_1 k}.$$

Далее, опять из (115), получим

$$\left\{\begin{aligned} & v_k^{\alpha_3}\, A^{\alpha_3 k}\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ v^k,\ v_k^{\alpha_1}),\\ & v_k^j\, A^{\alpha_3 k}\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ v^k,\ v_k^{\alpha_1},\ v_k^{\alpha_3}), \quad (j=\alpha_4,\ \alpha_5,\ \ldots,\ \alpha_n). \end{aligned}\right. \tag{118}$$

Если $A^{\alpha_3 k}$ линейно не зависит от $A^{\alpha_1 k}$, то (107), (116) и (118) дают $3n-6$ независимых уравнений.

Следовательно,

$$A^{\alpha_s k}=t^{\alpha_s} A^k.$$

Это равносильно

$$A^{ij}=t^i A^j, \quad \text{где} \quad t^{\alpha_1}=1.$$

Если еще учтем симметричность тензора A^{ij}, получим

$$A^{ij}=\varepsilon_1 A^i A^j, \quad \varepsilon_1=\pm 1.$$

б) $A^{\alpha_2 k}\neq 0$, $A^{\alpha_1 k}=0$.

Из (115):

$$v^j_k A^{\alpha_2 k}\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ v^k,\ v_k^{\alpha_2}), \qquad (j=\alpha_3,\ \alpha_4,\ \ldots,\ \alpha_n), \tag{119}$$

$$\left\{\begin{array}{l} v_k^{\alpha_3} A^{\alpha_3 k}\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ v^k,\ v_k^{\alpha_2}), \\ v^j_k A^{\alpha_3 k}\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ v^k,\ v_k^{\alpha_2}, v_k^{\alpha_3}), \quad (j=\alpha_4,\ \alpha_5,\ \ldots,\ \alpha_n). \end{array}\right. \tag{120}$$

Если $A^{\alpha_3 k}$ линейно не зависит от $A^{\alpha_2 k}$, то (107), (119) и (120) образуют систему из $3n-6$ независимых уравнений, поэтому

$$A^{\alpha_3 k}=t^{\alpha_3} A^k, \quad \text{где} \quad A^k=A^{\alpha_2 k}.$$

Отсюда,

$$A^{ij}=t^i A^j, \quad \text{где} \quad t^{\alpha_1}=0,\ t^{\alpha_2}=1,$$

и, ввиду симметрии A^{ij}, имеем

$$A^{ij}=\varepsilon_1 A^i A^j.$$

Случай в). Те же (115) дают:

$$\left\{\begin{array}{l} v_k^{\alpha_3} A^{\alpha_3 k}\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ v^k,\ v_k^{\alpha_3}), \\ v^j_k A^{\alpha_3 k}\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ v^k,\ v_k^{\alpha_3},\ v_k^{\alpha_3}), \quad (j=\alpha_4,\ \alpha_5,\ \ldots,\ \alpha_n) \end{array}\right. \tag{121}$$

и

$$\left\{\begin{array}{l} v_k^{\alpha_4} A^{\alpha_4 k}\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ v^k,\ v_k^{\alpha_3}), \\ v^j_k A^{\alpha_4 k}\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ v^k,\ v_k^{\alpha_3},\ v_k^{\alpha_4}), \quad (j=\alpha_5,\ \alpha_6,\ \ldots,\ \alpha_n). \end{array}\right. \tag{122}$$

Если $A^{\alpha_4 k}$ линейно не зависит от $A^{\alpha_3 k}$, то (107), (121) и (122) вместе образуют систему $3n-7$ независимых уравнений, что противоречит условию $r>n^2-n+2$, $n\geqslant 7$. Поэтому

$$A^{\alpha_4 k}=t^{\alpha_4} A^k, \quad \text{где} \quad A^k=A^{\alpha_3 k},$$

и, аналогично первым двум случаям, получим

$$A^{ij}=\varepsilon_1 A^i A^j, \ \varepsilon_1=\pm 1.$$

Мы доказали, что в любом случае тензор A^{ij} должен иметь вид (108).

С помощью тех же аргументов и тем же путем доказываются формулы (109) и (110).

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Если $A^i\neq 0$, то*

$$B^i=bA^i, \tag{123}$$

и

$$N^i=aA^i. \tag{124}$$

Доказательство. Из (96), учитывая (108), имеем

$$(DA^i)\,A^j + A^i\,DA^j = 0.$$

Умножив это уравнение на ковектор t_i, удовлетворяющий условию $A^i t_i = 1$, найдем $DA^i = KA^i$.

Подстановкой этого выражения в предыдущее уравнение получим $K=0$. Тогда

$$DA^i = 0. \tag{125}$$

Аналогично получим

$$DB^i = 0, \tag{126}$$

$$DN^i = 0. \tag{127}$$

Из (125) получим $n-2$ независимые уравнения:

$$v^j_k\,A^k \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ v^k,\ v^{\alpha_1}_k), \quad (j=\alpha_3,\ \alpha_4,\ \ldots,\ \alpha_n). \tag{128}$$

Из (126) имеем

$$v^j_k\,B^k \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ v^k,\ v^{\alpha_1}_k). \tag{129}$$

Если A^i и B^i линейно не зависимы, то (107), (128) и (129) вместе дают $3n-6$ независимых уравнений, что противоречит $r > n^2 - n + 2$, $n \geqslant 7$, поэтому

$$B^i = bA^i.$$

Тем же путем получим

$$N^i = aA^i.$$

Теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Тензор D^{ijk} является симметрическим по всем индексам и имеем вид*

$$D^{ijk} = D^i\,D^j\,D^k. \tag{130}$$

Доказательство. Уравнение (102), с учетом (106), в координатной системе (103), запишется

$$DD^{ijk} \equiv -v^{\alpha_1}_{\alpha_1}\,D^{ijk}\ (\mathrm{mod}\ v^k,\ v^{\alpha_1}_k). \tag{131}$$

Предположим, что D^{ijk} — не симметричный по j и k. Обозначив

$$D^{i\,[jk]} = S^{ijk}, \tag{132}$$

из (131), получим

$$v^s_k\,T^k_s\,(^{ijh}) \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ v^k,\ v^{\alpha_1}_k,\ v^{\alpha_1}_{\alpha_2}), \tag{133}$$

где

$$T^h_s\,(^{ijk}) = \delta^i_s\,S^{hjk} + \delta^j_s\,S^{ihk} + \delta^k_s\,S^{ijh}. \tag{134}$$

Рассмотрим следующие случаи:

1. $S^{\alpha_1\alpha_1\alpha_2} \neq 0$;
2. $S^{\alpha_1\alpha_1\alpha_3} \neq 0$, $S^{\alpha_1\alpha_1\alpha_2} = 0$;
3. $S^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \neq 0$, $S^{\alpha_1\alpha_1\alpha_2} = S^{\alpha_1\alpha_1\alpha_3} = 0$;
4. $S^{\alpha_2\alpha_1\alpha_2} \neq 0$, $S^{\alpha_1\alpha_1\alpha_2} = S^{\alpha_1\alpha_1\alpha_3} = S^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = 0$;
5. $S^{\alpha_2\alpha_1\alpha_3} \neq 0$, $S^{\alpha_1\alpha_1\alpha_2} = S^{\alpha_1\alpha_1\alpha_3} = S^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = S^{\alpha_2\alpha_1\alpha_2} = 0$;
6. $S^{\alpha_2\alpha_2\alpha_3} \neq 0$, $S^{\alpha_1\alpha_1\alpha_2} = S^{\alpha_1\alpha_1\alpha_3} = S^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = S^{\alpha_2\alpha_1\alpha_2} = S^{\alpha_2\alpha_1\alpha_3} = 0$;

7. $S^{\alpha_3\alpha_1\alpha_2}\neq 0$, $S^{\alpha_1\alpha_1\alpha_2}=S^{\alpha_1\alpha_1\alpha_3}=S^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}=S^{\alpha_2\alpha_1\alpha_2}=S^{\alpha_2\alpha_1\alpha_3}=S^{\alpha_2\alpha_2\alpha_3}=0$;

8. $S^{\alpha_3\alpha_1\alpha_3}\neq 0$, $S^{\alpha_1\alpha_1\alpha_2}=S^{\alpha_1\alpha_1\alpha_3}=S^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}=S^{\alpha_2\alpha_1\alpha_2}=S^{\alpha_2\alpha_1\alpha_3}=S^{\alpha_2\alpha_2\alpha_3}=S^{\alpha_3\alpha_1\alpha_2}=0$;

9. $S^{\alpha_3\alpha_2\alpha_3}\neq 0$, $S^{\alpha_1\alpha_1\alpha_2}=S^{\alpha_1\alpha_1\alpha_3}=S^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}=S^{\alpha_2\alpha_1\alpha_2}=S^{\alpha_2\alpha_1\alpha_3}=S^{\alpha_2\alpha_2\alpha_3}=S^{\alpha_3\alpha_1\alpha_2}=$
$=S^{\alpha_3\alpha_1\alpha_3}=0$;

если все $S^{\alpha_s\alpha_v\alpha_t}=0\,(s,\ v,\ t=1,\ 2,\ 3)$, а

10. $S^{\alpha_1\alpha_3\alpha_4}\neq 0$;

11. $S^{\alpha_2\alpha_3\alpha_4}\neq 0$, $S^{\alpha_1\alpha_3\alpha_4}=0$;

12. $S^{\alpha_3\alpha_1\alpha_4}\neq 0$, $S^{\alpha_1\alpha_3\alpha_4}=S^{\alpha_2\alpha_3\alpha_4}=0$;

13. $S^{\alpha_3\alpha_2\alpha_4}\neq 0$, $S^{\alpha_1\alpha_3\alpha_4}=S^{\alpha_2\alpha_3\alpha_4}=S^{\alpha_3\alpha_1\alpha_4}=0$;

13. $S^{\alpha_3\alpha_3\alpha_4}\neq 0$, $S^{\alpha_1\alpha_3\alpha_4}=S^{\alpha_2\alpha_3\alpha_4}=S^{\alpha_3\alpha_1\alpha_4}=S^{\alpha_3\alpha_2\alpha_4}=0$;

если все $S^{\alpha_s\alpha_v\alpha_t}=0\,(s,\ v,\ t=1,\ 2,\ 3)$, а

15. $S^{\alpha_3\alpha_4\alpha_4}\neq 0$.

Результаты исследований этих случаев сведены в таблицу 1.

Из таблицы видно, что для выполнения условия $r>n^2-n+2$, $n\geqslant 7$ необходимо

$$S^{ijk}=0. \tag{135}$$

Это значит, что D^{ijk} симметричен по индексам j и k. Точно таким же путем можно доказать симметричность D^{ijk} относительно любой пары его индексов. Следовательно D^{ijk} симметричный по всем индексам.

Переходим к доказательству второй части теоремы.

Пусть хоть одна компонента из

$$D^{hst},\quad (h=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n;\quad s,\ t=\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$$

отлична от нуля. Если все указанные компоненты равны нулю, то, легко показать, что уравнения (107) и (131) содержат, по крайней мере, $3n-7$ независимых уравнений.

Допустим

$$D^{hs_0t_0}\neq 0.$$

Уравнения (131) дают

$$\begin{cases} v_h^{\alpha_3} D^{hs_0t_0}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ v^k,\ v_k^{\alpha_1},\ v_k^{\alpha_3}), \\ v_h^j D^{hs_0t_0}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ v^k,\ v_k^{\alpha_1},\ v_k^{\alpha_2},\ v_k^{\alpha_3}). \quad (j=\alpha_4,\ \alpha_5,\ \ldots,\ \alpha_n). \end{cases} \tag{136}$$

Возьмем $D^{huv}\,(u,\ v=\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)$ и из (131) получим

$$\begin{cases} v_h^{\alpha_4} D^{huv}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ v^k,\ v_k^{\alpha_1},\ v_k^{\alpha_2},\ v_k^{\alpha_3}), \\ v_h^j D^{huv}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ v^k,\ v_k^{\alpha_1},\ v_k^{\alpha_2},\ v_k^{\alpha_3},\ v_k^{\alpha_4}). \quad (j=\alpha_5,\ \alpha_6,\ \ldots,\ \alpha_n). \end{cases} \tag{137}$$

Если D^{huv} линейно не зависит от $D^{hs_0t_0}$, то (107), (136) и (137) дают $3n-7$ независимых уравнений, поэтому

$$D^{huv}=D^{uv}\,D^{hs_0t_0},$$

а, отсюда, обозначив $D^{hs_0t_0}=D^h$, имеем

$$D^{ijk}=D^i\,D^{jk}. \tag{138}$$

Подстановка (138) в (102) дает

$$(DD^i)\,D^{jk}+D^i(DD^{jk})=-\alpha D^i\,D^{jk}. \tag{139}$$

Умножим последнее уравнение на t_i, удовлетворяющий условию $D^it_i=1$:

$$(DD^i)\,t_i\,D^{jk}+DD^{jk}=-\alpha D^{jk},$$

№	Вид компоненты $S^{ijk} \neq 0$	Матрица (134)			
		Порядок минора $\neq 0$	Функции, при которых взяты коэффициенты выделенного минора	Уравнения, взятые из (133) системы (строки минора)	Число незав. уравнений в (107) и (133)
1.	$S^{\alpha_1\alpha_1\alpha_2}$	$2n-4$	$v^{\alpha_l}_{\alpha_1},\ v^{\alpha_i}_{\alpha_2}\ (i,\ j,\ l,\ k = 3,\ 4,\ \ldots,\ n)$	$(\alpha_1\,\alpha_k\,\alpha_2)$, $(\alpha_1\,\alpha_1\,\alpha_j)$	$3n-6$
2.	$S^{\alpha_1\alpha_1\alpha_3}$	$2n-5$	$v^{\alpha_i}_{\alpha_1},\ v^{\alpha_l}_{\alpha_3}\ \begin{pmatrix} l,\ k = 3,\ 4,\ \ldots,\ n \\ i,\ j = 4,\ 5,\ \ldots,\ n \end{pmatrix}$	$(\alpha_1\,\alpha_j\,\alpha_3)$, $(\alpha_1\,\alpha_1\,\alpha_l)$	$3n-7$
3.	$S^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$	$2n-6$	$v^{\alpha_l}_{\alpha_2},\ v^{\alpha_i}_{\alpha_3}\ \begin{pmatrix} l,\ k = 4,\ 5,\ \ldots,\ n \\ i,\ j = 4,\ 5,\ \ldots,\ n \end{pmatrix}$	$(\alpha_1\,\alpha_l\,\alpha_3)$, $(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_j)$	$3n-8$
4.	$S^{\alpha_2\alpha_1\alpha_2}$	$2n-4$	$v^{\alpha_l}_{\alpha_1},\ v^{\alpha_i}_{\alpha_2}\ (i,\ j,\ k,\ l = 3,\ 4,\ \ldots,\ n)$	$(\alpha_2\,\alpha_k\,\alpha_2)$, $(\alpha_2\,\alpha_1\,\alpha_j)$	$3n-6$
5.	$S^{\alpha_2\alpha_1\alpha_3}$	$2n-5$	$v^{\alpha_l}_{\alpha_1},\ v^{\alpha_i}_{\alpha_3}\ \begin{pmatrix} k,\ l = 4,\ 5,\ \ldots,\ n \\ i,\ j = 3,\ 4,\ \ldots,\ n \end{pmatrix}$	$(\alpha_2\,\alpha_k\,\alpha_3)$, $(\alpha_2\,\alpha_1\,\alpha_j)$	$3n-7$
6.	$S^{\alpha_2\alpha_2\alpha_3}$	$2n-5$	$v^{\alpha_l}_{\alpha_2},\ v^{\alpha_i}_{\alpha_3}\ \begin{pmatrix} k,\ l = 4,\ 5,\ \ldots,\ n \\ i,\ j = 3,\ 4,\ \ldots,\ n \end{pmatrix}$	$(\alpha_2\,\alpha_k\,\alpha_3)$, $(\alpha_2\,\alpha_2\,\alpha_j)$	$3n-7$
7.	$S^{\alpha_3\alpha_1\alpha_2}$	$2n-6$	$v^{\alpha_l}_{\alpha_1},\ v^{\alpha_i}_{\alpha_2}\ (i,\ j,\ k,\ l = 4,\ 5,\ \ldots,\ n)$	$(\alpha_3\,\alpha_k\,\alpha_2)$, $(\alpha_3\,\alpha_1\,\alpha_j)$	$3n-8$
8.	$S^{\alpha_3\alpha_1\alpha_3}$	$2n-5$	$v^{\alpha_k}_{\alpha_1},\ v^{\alpha_i}_{\alpha_3}\ \begin{pmatrix} l,\ k = 2,\ 4,\ \ldots,\ n \\ l,\ j = 4,\ 5,\ \ldots,\ n \end{pmatrix}$	$(\alpha_3\,\alpha_k\,\alpha_3)$, $(\alpha_3\,\alpha_1\,\alpha_j)$	$3n-7$
9.	$S^{\alpha_3\alpha_2\alpha_3}$	$2n-6$	$v^{\alpha_l}_{\alpha_2},\ v^{\alpha_i}_{\alpha_3}\ (i,\ j,\ k,\ l = 4,\ 5,\ \ldots,\ n)$	$(\alpha_3\,\alpha_k\,\alpha_3)$, $(\alpha_3\,\alpha_2\,\alpha_j)$	$3n-8$
10.	$S^{\alpha_1\alpha_3\alpha_4}$	$3n-10$	$v^{\alpha_3}_{\alpha_1},\ v^{\alpha_l}_{\alpha_1},\ v^{\alpha_i}_{\alpha_3},\ v^{\alpha_k}_{\alpha_4}\ \begin{pmatrix} k,\ l = 5,\ \ldots,\ n \\ i,\ j = 3,\ 5,\ \ldots,\ n \end{pmatrix}$	$(\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4)$, $(\alpha_k\,\alpha_3\,\alpha_4)$, $(\alpha_1\,\alpha_j\,\alpha_4)$, $(\alpha_1\,\alpha_3\,\alpha_l)$	$4n-12$
11.	$S^{\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$	$3n-12$	$v^{\alpha_l}_{\alpha_2},\ v^{\alpha_i}_{\alpha_3},\ v^{\alpha_j}_{\alpha_4}\ (i,\ j,\ k,\ l = 5,\ 6,\ \ldots,\ n)$	$(\alpha_k\,\alpha_3\,\alpha_4)$, $(\alpha_2,\,\alpha_i\,\alpha_4)$, $(\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_j)$	$4n-14$
12.	$S^{\alpha_3\alpha_1\alpha_4}$	$3n-10$	$v^{\alpha_2}_{\alpha_1},\ v^{\alpha_k}_{\alpha_3},\ v^{\alpha_l}_{\alpha_1},\ v^{\alpha_i}_{\alpha_4}\ \begin{pmatrix} k,\ l = 5,\ 6,\ \ldots,\ n \\ i,\ j = 4,\ 5,\ \ldots,\ n \end{pmatrix}$	$(\alpha_3\,\alpha_2\,\alpha_4)$, $(\alpha_k\,\alpha_1\,\alpha_4)$, $(\alpha_3\,\alpha_l\,\alpha_4)$, $(\alpha_3\,\alpha_1\,\alpha_j)$	$4n-12$
13.	$S^{\alpha_3\alpha_2\alpha_4}$	$3n-11$	$v^{\alpha_k}_{\alpha_3},\ v^{\alpha_l}_{\alpha_2},\ v^{\alpha_i}_{\alpha_4}\ \begin{pmatrix} k,\ l = 5,\ 6,\ \ldots,\ n \\ i,\ j = 4,\ 5,\ \ldots,\ n \end{pmatrix}$	$(\alpha_l\,\alpha_2\,\alpha_4)$, $(\alpha_3\,\alpha_k\,\alpha_4)$, $(\alpha_3\,\alpha_2\,\alpha_i)$	$4n-13$
14.	$S^{\alpha_3\alpha_3\alpha_4}$	$2n-7$	$v^{\alpha_k}_{\alpha_3},\ v^{\alpha_i}_{\alpha_4}\ \begin{pmatrix} k,\ l = 5,\ 6,\ \ldots,\ n \\ i,\ j = 4,\ 5,\ \ldots,\ n \end{pmatrix}$	$(\alpha_3\,\alpha_l\,\alpha_4)$, $(\alpha_3\,\alpha_3\,\alpha_j)$	$3n-9$
15.	$S^{\alpha_3\alpha_4\alpha_5}$	$3n-14$	$v^{\alpha_k}_{\alpha_3},\ v^{\alpha_l}_{\alpha_4},\ v^{\alpha_i}_{\alpha_5}\ \begin{pmatrix} l,\ k = 6,\ 7,\ \ldots,\ n \\ i,\ j = 5,\ 6,\ \ldots,\ n \end{pmatrix}$	$(\alpha_l\,\alpha_4\,\alpha_5)$, $(\alpha_3\,\alpha_k\,\alpha_5)$, $(\alpha_3\,\alpha_4\,\alpha_j)$	$4n-16$

или

$$DD^{jk} = -(\alpha+\gamma)\, D^{jk}. \tag{140}$$

Подставляя (140) в (139), получим

$$DD^{l} = \gamma D^{l}. \tag{141}$$

Возможны три случая $\Big($мы пользуемся спец. координатной системой (103)$\Big)$:

1. $D^{\alpha_1} \neq 0$;
2. $D^{\alpha_2} \neq 0$;
3. $D^{\alpha_3} \neq 0$.

Соответственно этим случаям из (141), имеем:

1. $\gamma \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, v^h,\ v_h^{\alpha_1})$;
2. $\gamma \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, v^h,\ v_h^{\alpha_1},\ v_h^{\alpha_2})$;
3. $\gamma \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, v^h,\ v_h^{\alpha_1},\ v_h^{\alpha_3})$;

Мы рассмотрим только случай 3, так как анализ первых двух аналогичен и более прост.

Итак, $\gamma \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, v^h,\ v_h^{\alpha_1},\ v_h^{\alpha_3})$.

Теперь (140) можно записать в виде

$$DD^{jk} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, v^k,\ v_k^{\alpha_1},\ v_{\alpha_2}^{\alpha_2},\ v_k^{\alpha_3}). \tag{142}$$

Рассмотрим четыре случая:

а) $D^{\alpha_1 h} \neq 0$;
б) $D^{\alpha_2 h} \neq 0,\ D^{\alpha_1 h} = 0$;
в) $D^{\alpha_3 h} \neq 0,\ D^{\alpha_1 h} = D^{\alpha_2 h} = 0$;
г) $D^{\alpha_4 h} \neq 0,\ D^{\alpha_1 h} = D^{\alpha_2 h} = D^{\alpha_3 h} = 0$.

Случай а). Из (142) имеем:

$$v_n^j D^{\alpha_1 h} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, v^k,\ v_k^{\alpha_1},\ v_{\alpha_2}^{\alpha_2},\ v_k^{\alpha_3}) \tag{143}$$

$$(j = \alpha_4,\ \alpha_5,\ \ldots,\ \alpha_n),$$

$$v_h^j D^{\alpha_2 h} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, v^k,\ v_k^{\alpha_1},\ v_k^{\alpha_2},\ v_k^{\alpha_3}), \tag{144}$$

$$(j = \alpha_4,\ \alpha_5,\ \ldots,\ \alpha_n),$$

$$v_h^j D^{\alpha_3 h} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, v^k,\ v_k^{\alpha_1},\ v_{\alpha_2}^{\alpha_2},\ v_k^{\alpha_3}), \tag{145}$$

$$(j = \alpha_4,\ \alpha_5,\ \ldots,\ \alpha_n),$$

$$\left\{\begin{array}{l} v_h^{\alpha_4} D^{\alpha_4 h} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, v^k,\ v_k^{\alpha_1},\ v_{\alpha_2}^{\alpha_2},\ v_k^{\alpha_3}), \\ v_h^j D^{\alpha_4 h} = 0 \,(\mathrm{mod}\, v^k,\ v_k^{\alpha_1},\ v_{\alpha_2}^{\alpha_2},\ v_k^{\alpha_3},\ v_k^{\alpha_4}), \\ (j = \alpha_5,\ \alpha_6,\ \ldots,\ \alpha_n). \end{array}\right. \tag{146}$$

Компоненты $D^{\alpha_2 h}$, $D^{\alpha_3 h}$, $D^{\alpha_4 h}$ должны быть линейно зависимы от $D^{\alpha_1 h}$, иначе получим $\geqslant 3n-8$ независимых уравнений, что противоречит условию $r > n^2 - n + 2$, $n \geqslant 7$.

Аналогично, как и в теореме 3, имеем

$$D^{ij} = \pm K^i K^j.$$

Случай б). Уравнение (142) дает

$$v_h^j D^{\alpha_2 h} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, v^k,\ v_k^{\alpha_1},\ v_k^{\alpha_2},\ v_k^{\alpha_3}), \tag{147}$$
$$(j=\alpha_4,\ \alpha_5,\ \ldots,\ \alpha_n),$$
$$v_h^j D^{\alpha_3 h} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, v^k,\ v_k^{\alpha_1},\ v_k^{\alpha_2},\ v_k^{\alpha_3}), \tag{148}$$
$$(j=\alpha_4,\ \alpha_5,\ \ldots,\ \alpha_n),$$
$$\left\{\begin{array}{l} v_h^{\alpha_4} D^{\alpha_4 h} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, v^k,\ v_k^{\alpha_1},\ v_{\alpha_2}^{\alpha_2},\ v_k^{\alpha_3}), \\ v_h^j D^{\alpha_4 h} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, v^k,\ v_k^{\alpha_1},\ v_{\alpha_2}^{\alpha_2},\ v_k^{\alpha_3},\ v_k^{\alpha_4}), \\ (j=\alpha_5,\ \alpha_6,\ \ldots,\ \alpha_n). \end{array}\right. \tag{149}$$

Система уравнений (107), (147), (148) имеет $3n-8$ независимых уравнений, если $D^{\alpha_2 h}$ линейно не зависит от $D^{\alpha_3 h}$. То же самое можно сказать о системе уравнений: (107), (147), (149). Таким образом, из условия $r>n^2-n+2$, $n\geqslant 7$, выводим

$$D^{jk}=\pm K^j K^k.$$

Случай в). Опять (142) дает

$$v_h^j D^{\alpha_3 h} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, v^k,\ v_k^{\alpha_1},\ v_{\alpha_2}^{\alpha_2},\ v_k^{\alpha_3}), \tag{150}$$
$$(j=\alpha_4,\ \alpha_5,\ \ldots,\ \alpha_n);$$
$$\left\{\begin{array}{ll} v_h^{\alpha_4} D^{\alpha_4 h} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, v^k,\ v_k^{\alpha_1},\ v_{\alpha_2}^{\alpha_2},\ v_k^{\alpha_3}), & \\ v_h^j D^{\alpha_4 h} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, v^k,\ v_k^{\alpha_1},\ v_{\alpha_2}^{\alpha_2},\ v_k^{\alpha_3},\ v_k^{\alpha_4}), & (j=\alpha_5,\ \alpha_6,\ \ldots,\ \alpha_n). \end{array}\right. \tag{151}$$

Если $D^{\alpha_4 h}$ линейно не зависит от $D^{\alpha_3 h}$, то система уравнений (107), (150), (151) содержит $3n-8$ независимых уравнений.

Следовательно,

$$D^{jk}=\pm K^j K^k.$$

Случай г). Те же (142) дают

$$\left\{\begin{array}{ll} v_h^{\alpha_4} D^{\alpha_4 h} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, v^k,\ v_k^{\alpha_1},\ v_{\alpha_2}^{\alpha_2},\ v_k^{\alpha_3}), & \\ v_h^j D^{\alpha_4 h} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, v^k,\ v_k^{\alpha_1},\ v_{\alpha_2}^{\alpha_2},\ v_k^{\alpha_3},\ v_k^{\alpha_4}), & (j=\alpha_5,\ \alpha_6,\ \ldots,\ \alpha_n); \end{array}\right. \tag{152}$$
$$\left\{\begin{array}{ll} v_h^{\alpha_5} D^{\alpha_5 h} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, v^k,\ v_k^{\alpha_1},\ v_{\alpha_2}^{\alpha_2},\ v_k^{\alpha_3}), & \\ v_h^j D^{\alpha_5 h} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, v^k,\ v_k^{\alpha_1},\ v_{\alpha_2}^{\alpha_2},\ v_k^{\alpha_3},\ v_k^{\alpha_5}), & (j=\alpha_4,\ \alpha_5,\ \ldots,\ \alpha_n). \end{array}\right. \tag{153}$$

Если $D^{\alpha_5 h}$ линейно не зависит от $D^{\alpha_4 h}$, то (107), (152) и (153) вместе дают $3n-8$ независимых уравнений, поэтому при нашем условии на r они линейно зависимы и мы имеем

$$D^{jk}=\pm K^j K^k.$$

Все случаи рассмотрены и во всех ранг тензора D^{jk} равен единице:

$$D^{jk}=\pm K^j K^k. \tag{154}$$

Подставив (154) в (138), имеем

$$D^{ijk}=\pm D^i K^j K^k,$$

но так как тензор D^{ijk} симметрический по всем индексам, то его можно записать в виде

$$D^{ijk}=D^i D^j D^k.$$

Теорема 5 доказана.

Если $D^i=0$, то цель достигнута, поэтому будем считать $D^i\neq 0$. Аналогично теореме 5, доказывается теорема 6.

Теорема 6. *Тензор C^{ijk} является симметрическим и имеет вид*

$$C^{ijk}=C^i C^j C^k. \tag{155}$$

Теорема 7. *Если $C^i\neq 0$, то D^i и C^i являются линейно зависимыми.*

Доказательство. Из (101) и (102), имеем

$$(DC^i) C^j C^k+C^i(DC^j) C^k+C^i C^j DC^k=-\beta D^i D^j D^k, \tag{156}$$

$$(DD^i) D^j D^k+D^i(DD^j) D^k+D^i D^j(DD^k)=-\alpha D^i D^j D^k. \tag{157}$$

Предполагая C^i и D^i линейно независимыми, умножим (156) на $K_j K_k$, где ковектор K_i удовлетворяет условиям $C^iK_i=1$ и $D^i K_i=0$. Получим

$$DC^i+C^i(DC^j) K_j+C^i(DC^k) K_k=0$$

или

$$DC^i=\mu C^i.$$

Подставив это выражение в (156) находим, что $\mu=0$, $\beta=0$, вследствие чего последнее уравнение становится

$$DC^i=0. \tag{158}$$

Из (157) имеем

$$DD^i=-\frac{\alpha}{3} D^i. \tag{159}$$

В координатной системе (103) уравнения (158) и (159) дают

$$v_h^j C^h\equiv 0 \pmod{v^k,\ v_k^{\alpha_1}}, \tag{160}$$

$$(j=\alpha_3,\ \alpha_4,\ \ldots,\ \alpha_n),$$

$$v_h^j D^h\equiv 0 \pmod{v^k,\ v_k^{\alpha_1},\ v_{\alpha_1}^{\alpha_2}}, \tag{161}$$

$$(j=\alpha_3,\ \alpha_4,\ \ldots,\ \alpha_n).$$

Если C^i и D^i линейно независимы, то (107), (160) и (161) вместе дают $3n-6$ независимых уравнений. Поэтому

$$D^i=hC^i\ (h\neq 0). \tag{162}$$

Теорема доказана.

Теорема 8. *Если $A^i\neq 0$, то D^i и A^i являются линейно зависимыми.*

Доказательство. Если D^i и A^i линейно независимы, то (107), (128) и (161) вместе образуют систему $3n-6$ независимых уравнений, что противоречит условию $r>n^2-n+2$, $n\geqslant 7$. Поэтому

$$D^i=\gamma A^i \quad (\gamma\neq 0). \tag{163}$$

Теорема доказана.

Теперь (130) и (155) становятся

$$D^{ijk}=pA^i A^j A^k, \tag{195}$$

$$C^{ijk}=qA^i A^j A^k. \tag{165}$$

Подставляя (108), (109), (110), (123), (124), (164) и (165) в (93), получим

$$C_l^{ijk}=\varepsilon_1 \delta_l^i A^j A^k+\varepsilon_1 \delta_l^j A^i A^k b^2+\varepsilon_3 a^2 A^i A^j \delta_l^k+(pA_l+qu_l) A^i A^j A^k. \tag{166}$$

Умножим последнее на u_i, u_j, u_k:

$$pA_l(A^i u_i)^3 + u_l(\varepsilon_1 + b^2\varepsilon_2 + a^2\varepsilon_3 + qA^i u_i)(A^i u_i)^2 = 0. \qquad (167)$$

Если $p=0$, то (164) дает $D^{ijk}=0$ и цель достигнута. Допустим $p\neq 0$, тогда, в силу, линейной независимости A_l и u_l из (167), имеем

$$A^i u_i = 0. \qquad (168)$$

Умножим (166) на u_k и, благодаря однородности C_l^{ij}, получим

$$C_l^{ij} = \varepsilon_3 a^2 u_l A^i A^j. \qquad (169)$$

Продифференцируем (169) по u_k частно

$$C_l^{ij\cdot k} = \varepsilon_3 \delta_l^k a^2 A^i A^j - u_l(\varepsilon_3 a^2 A^{i\cdot k} A^j + \varepsilon_3 a^2 A^i A^{j\cdot k} + 2\varepsilon_3 aa^{\cdot k} A^i A^j). \qquad (170)$$

(170) выражение C_l^{ijk} не содержит члена $A_l D^{ijk}$, следовательно, $D^{ijk}=0$.

Получили, что $D^{ijk}=0$, для $r>n^2-n+2$, $n\geqslant 7$ в предположении, что хотя бы один из трех тензоров A^{ij}, B^{ij}, N^{ij} отличен от нуля.

Рассмотрим случай $A^{ij}=B^{ij}=N^{ij}=0$.

Остаются в силе теоремы 5, 6, 7. Они нам дают

$$C_l^{ijk} = (A_l h^3 + u_l) C^i C^j C^k. \qquad (171)$$

Умножим (105) на u_i, u_j, u_k:

$$(A_l h^3 + u_l)(C^i u_i)^3 = 0. \qquad (172)$$

Из линейной независимости A_l и u_l, следует

$$C^i u_i = 0. \qquad (173)$$

Умножим (171) на u_k:

$$C_l^{ij\cdot k} u_k = -C_l^{ij} = 0,$$

сил у (173).

Так как мы рассматриваем только неусеченную связность, то полученное противоречие и в этом случае дает $D^{ijk}=0$.

Итак, суммируя результаты § 4 и § 5, имеем теорему.

Теорема 9. *Для того, чтобы пространство U_n общей аффинной связности допускало группу движений G_r порядка $r>n^2-n+2$, $n\geqslant 7$ необходимо*

$$C_l^{ijk} = \delta_l^i A^{jk} + \delta_l^j B^{ik} + \delta_l^k N^{ij} + u_l C^{ijk}. \qquad (174)$$

Так как формула (174) имеет тот же вид, что и (23), то тем же путем, как и в § 2, получим

$$C_l^{ij} = = \delta_l^i C^{pj} u_p - \delta_l^j C^{ip} u_p + u_l C^{ij}, \qquad (175)$$

где

$$C^{ij} = \frac{1}{n-2}\left[C_l^{ijl} + \frac{1}{n(n-2)}\left(C_l^{ijl} + C_l^{ilj} - (n-1)C_l^{lji} - (n-1)C_l^{ilj}\right)\right]. \qquad (176)$$

Теорема 10. *Для того, чтобы пространство U_n общей аффинной связности допускало группу движений G_r порядка $r>n^2-n+2$, $n\geqslant 7$ необходимо имеет место* (175) и (176).

§ 6. Существование групп движений G_r, порядка $r > n^2 - n + 2$, $n \geqslant 7$

Из $DC_l^{ijk} = 0$, пользуясь выражением (175), получим

$$DC^{ij} = 0, \tag{177}$$

$$DC^{ij \cdot k} = 0. \tag{178}$$

Пусть $C^{[ij]} = S^{ij} \neq 0$, тогда

$$DS^{ij} = 0. \tag{179}$$

Выберем в данной точке $(x^i,\ u_k)$ систему координат, в которой

$$u_k = \delta_k^{\alpha_1}. \tag{180}$$

Рассмотрим следующие случаи:

1. $S^{\alpha_1 \alpha_2} \neq 0$;
2. $S^{\alpha_2 \alpha_3} \neq 0$, $S^{\alpha_1 \alpha_2} = 0$.

В первом случае имеем $2n-2$ независимых уравнения в (179). Действительно, минор, составленный из коэффициентов при функциях $v_{\alpha_1}^{\alpha_k}$, $v_{\alpha_2}^{\alpha_i}$, $v_{\alpha_1}^{\alpha_2}$ в уравнениях $(\alpha_2 \alpha_l)$, $(\alpha_1 \alpha_j)$, $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_2)$ системы (179) и $DS^{ij.k} = 0$, отличен от нуля ($k,\ l = 3, 4, \ldots, n$; $i, j = 2, 3, \ldots, n$). Здесь отметим, что $S^{\alpha_1 \alpha_2 \cdot \alpha_1} = -2S^{\alpha_1 \alpha_2}$.

Во втором случае минор порядка $3n-8$, составленный из коэффициентов при функциях $v_{\alpha_3}^{\alpha_l}$, $v_{\alpha_2}^{\alpha_l}$, $v_{\alpha_1}^{\alpha_j}$ в уравнениях $(a_3 a_k)$, $(a_2 a_i)$, $(a_2 a_3 a_j)$ отличен от нуля.

Таким образом, для того, чтобы пространство U_n допускало группу движений G_r, порядка $r > n^2 - n + 2$, $n \geqslant 7$ необходимо

$$C^{[ij]} = 0. \tag{181}$$

Если C^{ij} – симметрический, то его можно представить в виде

$$C^{ij} = \sum_{\alpha=1}^{m} \varepsilon^\alpha C_\alpha^i C_\alpha^j, \tag{182}$$

где $\varepsilon^\alpha = \pm 1$, $C_\alpha^i - m$ линейно независимых векторов, m – ранг тензора C^{ij}.

Из (177) и (182), получим

$$\sum_{\alpha=1}^{m} \varepsilon^\alpha [(DC_\alpha^i) C_\alpha^j + C_\alpha^i DC_\alpha^j] = 0. \tag{183}$$

Умножив (183) на ковектор t_j^α, удовлетворяющий условию $C_\alpha^i t_i^\beta = \delta_\alpha^\beta$, имеем

$$DC_\alpha^i = \sum_{\beta=1}^{m} u_\alpha^\beta C_\beta^i, \quad (\alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{184}$$

Подставляя (184) в (183), получим

$$\sum_{\alpha=1}^{m} \varepsilon^\alpha \Big[\sum_{\beta=1}^{m} u_\alpha^\beta (C_\beta^i C_\alpha^j + C_\alpha^i C_\beta^j) \Big] = 0.$$

Умножение последнего равенства на $t_i^\gamma t_j^\delta$, дает

$$\varepsilon^\delta u_\delta^\gamma + \varepsilon^\gamma u_\gamma^\delta = 0 \quad \text{(нет суммирования!)}. \tag{185}$$

Теперь (184) запишем в виде

$$DC^i_\alpha = \sum_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\alpha}}^{m} u^\beta_\alpha C^i_\beta. \tag{186}$$

Выберем систему координат, в которой

$$\begin{cases} u_k = \delta^i_k \\ C^i_\alpha = \delta^i_{\alpha+1}, \quad i\neq 1. \end{cases} \tag{187}$$

Здесь считаем $m+1\leqslant n$.

Уравнения (186) дают

$$v^i_{\alpha+1} \equiv \sum_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\alpha}}^{m} u^\beta_\alpha \delta^i_{\beta+1} \,(\mathrm{mod}\, v^k,\ v^i_k), \quad \text{для} \quad i\neq 1. \tag{188}$$

Среди (188) уравнений имеется по крайней мере $m(n-1)-\frac{m(m+1)}{2}$ независимых (см. [6]). При условии $r>n^2-n+2$, $n\geqslant 7$, нам подходят только случай $m=1$ и $m=2$.

Пусть ранг тензора C^{ij}, $m=2$.

Тогда (182) дают

$$C^{ij} = \varepsilon' C^i_1 C^j_1 + \varepsilon^2 C^i_2 C^j_2. \tag{189}$$

Как и выше, выберем систему координат, в которой

$$u_k = \delta^i_k$$
$$C^i_1 = \delta^i_2, \ (i\neq 1)$$
$$C^i_2 = \delta^i_3, \ (i\neq 1).$$

Рассмотрим следующие возможные случаи:

1. $C^1_1\neq 0$;
2. $C^1_2=0$;
3. $C^1_1=C^1_2=0$.

(177) и (178) уравнения запишем в виде

$$v^s_k T^k_s({}^{ij}) \equiv 0\,(\mathrm{mod}\, v^k,\ v^1_k), \tag{190}$$

$$v^s_k T^k_s({}^{ijl}) \equiv 0\,(\mathrm{mod}\, v^k,\ v^1_k), \tag{191}$$

где

$$T^k_s({}^{ij}) = \delta^i_s C^{kj} + \delta^j_s C^{ik},$$

$$T^k_s({}^{ijl}) = \delta^i_s C^{kjl} + \delta^j_s C^{ilk} + \delta^l_s C^{ijk}.$$

В первом случае ($C^1\neq 0$) ранг матрицы $\| T^k_s({}^{ij}) \|$ не ниже $2n-2$. Действительно, минор порядка $2n-2$, составленный из коэффициентов этой матрицы при функциях v^2_2, v^3_2, ..., v^n_2, v^2_3, v^3_3, ..., v^n_3 в уравнениях (22), (31), (42), ..., (n2), (23), (33), ... (n3) отличен от нуля.

Во втором случае ($C^1_2\neq 0$) не равен нулю минор порядка $2n-2$, составленный из коэффициентов при функциях v^2_2, v^3_2, ..., v^n_2, v^2_3, v^3_3, ..., v^n_3 в уравнениях (22), (32), ..., (n2), (21), (33), ..., (n3).

В третьем случае мы можем выделить не равный нулю минор порядка $3n-6$. За указанный минор можно взять минор составленный из коэффициентов при функциях $v_2^3, v_2^4, \ldots, v_2^n, v_3^3, v_3^4, \ldots, v_3^n, v_1^3, v_1^4, \ldots, v_1^n$ в уравнениях (32), (42), ..., (n2), (33), (43), ..., (n3), (223), (224), ..., (22n).

Таким образом, если $m=2$, пространство не может допускать G_r порядка $r>n^2-n+2$, $n\geqslant 7$.

Рассмотрим случай $m=1$. Тогда имеет место

$$C^{ij}=\varepsilon C^i C^j. \tag{192}$$

Из $C^{ij}u_i u_j=0$ (см. (44)), получим

$$C^i u_i=0. \tag{193}$$

(192) и (177) дают

$$DC^i=0. \tag{194}$$

Выберем систему координат, в которой

$$u_k=\delta_k^1,$$

$$C^i=\delta_2^i.$$

Тогда (194) уравнения дают $n-1$ независимое уравнение:

$$v_2^i\equiv 0 (\operatorname{mod} v^k,\ v_k^1) \quad (i=2,\ 3,\ \ldots,\ n). \tag{195}$$

Из $DC^i=0$, дальнейшие условия интегрируемости получим частным дифференцированием по u_j под знаком D:

$$D(C^{i\cdot j})=0. \tag{196}$$

Повторив все то же относительно $C^{i\cdot j}$, что мы делали для C^{ij}, придем к выводу, что $C^{i\cdot j}$ имеет вид

$$C^{i\cdot j}=\varepsilon' B^i B^j. \tag{197}$$

Так как $C^{i\cdot j}u_j=-C^i$, а $C^i u_i=0$, то

$$C^{i\cdot j}u_i u_j=0. \tag{198}$$

(197) и (198) дают

$$B^i u_i=0. \tag{199}$$

Теперь из однородности C^i и формул (197), (199), получим

$$C^i=-C^{i\cdot j}u_j=-\varepsilon' B^i B^j u_j=0,$$

что ведет к усеченной связности.

На основе доказанного сформулируем теорему.

Теорема 11. *Не существует пространств U_n общей аффинной связности* (Г, C), *допускающих группы движений порядка $r>n^2-n+2$, $n\geqslant 7$.*

Для установления точности указанной границы в порядках групп, приведем пример.

Пример. Пространство U_n, в котором задана аффинная связность:

$$\begin{cases} \Gamma^i_{jk}=0, \\ C^{1p}_p=-C^{p1}_p=-\frac{u_2}{(u_1)^2} \quad (p\neq 1,\ 2;\ \text{нет суммирования!}), \\ C^{2p}_p=-C^{p2}_p=\frac{1}{u_1} \quad (p\neq 1,\ 2;\ \text{нет суммирования!}), \\ C^{12}_p=-C^{21}_p=\frac{u_p}{(u_1)^2} \quad (p\neq 1,\ 2), \\ \text{остальные } C^{ij}_k=0 \end{cases}$$

допускает группу движений порядка n^2-n+2.

Теорема 12. *Максимальный порядок групп движений G_r, допускаемых пространством U_n общей аффинной связности равен точно n^2-n+2, $n\geqslant 7$.*

Вильнюсский Государственный педагогический институт

Поступило в редакцию 30.VIII.1968

Литература

1. А. Т. Кондратьев, Движения в общих пространствах путей $A_3(x,\dot{x})$, Диссертация, Казанский Гос, университет, 1967.
2. Б. Л. Лаптев, Производная Ли в пространстве опорых элементов, Труды семинара по вект. и тенз. анализу, МГУ, вып. 10, 1956.
3. Б. Л. Лаптев, Ковариантный дифференциал и теория дифференциальных инвариантов в пространстве тензорных опорных элементов, Учен. записки Казанского университета, т. 118, кн. 4, 76—147, 1958.
4. А. П. Урбонас, Автоморфизмы пространства тензорных опорных элементов, Аспирантский сборник Казанского ун-та, точные науки, 1968.
5. Y. Muto, On a curved affinely connected space admitting a group of affine motions of maximum order, Sci. Repr. Yokohama Nat. Univ., 1954, Sect. 1, N 3, 1–12.
6. T. Okubo, On the order of the groups of affine collineations in the generalized spaces of path I, II, III, Tensor, 1956, 6, N 3, 141–158, 1957, 7, N 1, 1–17, 18–33.

MAKSIMALIAI JUDRIOS HIPERPLOKŠTUMINIŲ ELEMENTŲ ERDVĖS SU BENDRU AFININIU SĄRYŠIU

A. URBONAS

(*Reziumė*)

Darbe nagrinėjami judesiai hiperplokštuminių elementų erdvėje su bendru afininiu sąryšiu (Γ, C). Įrodyta teorema. *Nėra hiperplokštuminių elementų erdvių (su bendru afininiu sąryšiu), kurios leistų judesių (automorfizmų) grupę G_r su parametrų skaičium $r>n^2-n+2$.*

Darbe taip pat parodyta, kad ši riba tiksli.

MAXIMAL BEWEGLICHE HYPERFLÄCHENELEMENTENRÄUME MIT EINEM ALLGEMEINEN AFFINEN ZUSAMMENHANG

A. URBONAS

(*Zusammenfassung*)

In der Arbeit werden die Bewegungen im Hyperflächenelementenräum mit einem allgemeinen affinen Zusammenhang untersucht. Es wird das Theorem bewiesen: „Es gibt keine Hyperflächenelementenräume (mit allgemeinem affinen Zusammenhang), die eine Gruppe G_r von Bewegungen (Automorphismen) mit der Parameterzahl

$r>n^2-n+2$

gestatten". Es wird gezeigt, dass die genannte Grenze eine exakte ist.