IX LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1

1969

УДК – 517.432.1

О СХОДИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА ЛАПЛАСА – СТИЛТЬЕСА

Ш. СТРЕЛИЦ, А. МИШКЕЛЯВИЧУС

В этой статье рассматриваются вопросы сходимости интегралов типа Лапласа – Стилтьеса

$$\int\limits_0^\infty \exp[-h(t)\,e^{i\vartheta(t)}z]\,dF(t) \tag{A}$$

и

$$\int\limits_0^\infty z^{m(t)}\exp[-h(t)\,e^{i\vartheta(t)}z]\,dF(t). \tag{B}$$

В частности, изучается сходимость рядов Дирихле

$$\sum_{n=1}^\infty a_n e^{-\lambda_n z} \tag{C}$$

и рядов Тейлора – Дирихле

$$\sum_{n=1}^\infty a_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z} \tag{D}$$

с комплексными показателями λ_n.

Заметим, что если в (A) положить $\vartheta(t)\equiv 0$ и $h(t)\equiv t$, $t>0$, то получается известный интеграл Лапласа – Стилтьеса

$$\int\limits_0^\infty e^{-tz}\,dF(t),$$

который в случае, когда $F(t)$ – кусочно постоянная функция, превращается в ряд Дирихле (C) с действительными показателями λ_n.

§ 1. Теорема Абеля для интегралов (A) и (B)

1. В этом пункте будет доказана теорема Абеля для интеграла (A). Допустим для этого, что $h(t)$, $\vartheta(t)$ и $F(t)$ – функции, определенные при $t\geqslant 0$, причем $F(t)$, вообще комплекснозначная, имеет ограниченную вариацию на всяком конечном промежутке $[0, T]$, а $h(t)$ и $\vartheta(t)$ – действительные функции, непрерывные и кусочно-дифференцируемые при $t\geqslant 0$.

Пусть, кроме того, функции $\vartheta(t)$ и $h(t)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, |\vartheta(t)| = \vartheta < \frac{\pi}{2}; \tag{1.1}$$

$$\underline{\lim_{t\to\infty}}\, \frac{h(t)}{t} = a > 0; \quad \overline{\lim_{t\to\infty}}\, \frac{h(t)}{t} = b < \infty \tag{1.2}$$

и

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, \frac{\ln|h'(t)|}{t} = \sigma_1 < \infty; \tag{1.3}$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, \frac{\ln|\vartheta'(t)|}{t} = \sigma_2 < \infty. \tag{1.4}$$

Обозначим

$$\sigma = \max(\sigma_1, \sigma_2) \tag{1.5}$$

и

$$\underline{\lim_{t\to\infty}}\, |\vartheta(t)| = \alpha, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \vartheta. \tag{1.6}$$

Фиксируем теперь точку $z = z_0$ и рассмотрим функцию

$$F_1(t) = \int_0^t \exp[-h(\tau)e^{i\vartheta(\tau)} z_0]\, dF(\tau). \tag{1.7}$$

Очевидно, что эта функция определена при $t \geqslant 0$ и имеет ограниченную вариацию на любом конечном промежутке $[0, T]$. Тогда отрезок интеграла (A)

$$I(A, B, z) = \int_A^B \exp[-h(t)e^{i\vartheta(t)} z]\, dF(t) \tag{1.8}$$

можно представить в виде

$$I(A, B, z) = \int_A^B \exp[-h(t)e^{i\vartheta(t)}(z - z_0)]\, dF_1(t). \tag{1.9}$$

Допустим, что функция $F_1(t)$ удовлетворяет условию

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, \frac{\ln|F_1(t)|}{t} = r_1 < \infty, \tag{1.10}$$

и положим $\big($см. (1.5)$\big)$

$$\rho_1 = \max(r_1, \sigma + r_1). \tag{1.11}$$

Аналогично, если интеграл (A) сходится в точке $z = z_0$ то, рассматривая функцию

$$F_2(t) = \int_\infty^t \exp[-h(\tau)e^{i\vartheta(\tau)} z_0]\, dF(\tau), \tag{1.12}$$

представим $I(A,B,z)$ в виде

$$I(A, B, z) = \int_A^B \exp[-h(t)e^{i\vartheta(t)}(z - z_0)]\, dF_2(t). \tag{1.13}$$

Вычислим предел

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, \frac{\ln|F_2(t)|}{t} = r_2, \quad r_2 \leqslant 0, \tag{1.14}$$

и пусть

$$\rho_2=\max(r_3,\ \sigma+r_3). \tag{1.15}$$

Заметим, что равенства (1.9) и (1.13) следуют из непрерывности функций $h(t)$, $\vartheta(t)$ и известных свойств интеграла Стилтьеса.

Теперь можно сформулировать и доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (1.1) – (1.4). *Если интеграл* (A) *в точке* $z_0=x_0+iy_0$ *не сходится, но выполнено условие* (1.10), *то он равномерно сходится во всяком замкнутом и ограниченном множестве, содержащемся в области* $U_1(z_0)$, *точки* $z=x+iy$ *которой при любом* φ *из промежутков* $[-\vartheta,\ -\alpha]$ и $[\alpha,\ \vartheta]$ *удовлетворяют условию*

$$U_1(z_0):(x-x_0)\cos\varphi-(y-y_0)\sin\varphi>\frac{\rho_1}{a}\cdot \tag{1.16}$$

Если интеграл (A) *сходится в точке* $z_0=x_0+iy_0$, *то он равномерно сходится во всяком замкнутом и ограниченном множестве, содержащемся в области* $U_2(z_0)$, *точки* $z=x+iy$ *которой при любом* φ *из промежутков* $[-\vartheta,\ -\alpha]$ и $[\alpha,\ \vartheta]$ *удовлетворяют условию*

$$U_2(z_0):(x-x_0)\cos\varphi-(y-y_0)\sin\varphi>\begin{cases}\dfrac{\rho_2}{a}, & \rho_2\geqslant 0,\\[2mm] \dfrac{\rho_2}{b}, & \rho_2<0.\end{cases} \tag{1.17}$$

Замечание 1. Как нетрудно убедиться из геометрических соображений, в случае, когда $\rho_2\geqslant 0$, область $U_2(z_0)$ – это угол

$$U_2(z_0):\left|\arg\left(z-z_0-\frac{\rho_2}{a\cos\vartheta}\right)\right|<\frac{\pi}{2}-\vartheta. \tag{1.18}$$

Аналогично, так как всегда $\rho_1\geqslant 0$, то

$$U_1(z_0):\left|\arg\left(z-z_0-\frac{\rho_1}{a\cos\vartheta}\right)\right|<\frac{\pi}{2}-\vartheta. \tag{1.19}$$

Если $\rho_2<0$, то $U_2(z_0)$ – выпуклая область, граница которой состоит из двух дуг окружности $|\zeta-z_0|=\frac{|\rho_2|}{b}$, для которых $-\vartheta\leqslant\arg(z_0-\zeta)\leqslant-\alpha$ и $\alpha\leqslant\arg(z_0-\zeta)\leqslant\vartheta$, и касательных, проведенных из концов этих дуг. В частности, если $\alpha=0$ и $\rho_2<0$, то область $U_2(z_0)$ состоит из внутренних точек угла

$$\left|\arg\left(z-z_0-\frac{\rho_2}{b\cos\vartheta}\right)\right|<\frac{\pi}{2}-\vartheta,$$

лежащих правее дуги $|\zeta-z_0|=\frac{|\rho_2|}{b}$, $|\arg(z_0-\zeta)|\leqslant\vartheta$.

Доказательство теоремы. Пусть интеграл (A) сходится в точке $z_0=$ $=x_0+iy_0$, и G – замкнутое и ограниченное множество, принадлежащее области $U_2(z_0)$. Докажем, что отрезок интеграла (A) (1.8)

$$I(A,\ B,\ z)\xrightarrow[\substack{A\to\infty\\ B\to\infty}]{}0$$

равномерно, если $z\in G$. Для этого сначала проинтегрируем по частям интеграл (1.13), где считаем $A<B$

$$I(A,\ B,\ z)=F_2(t)\exp\left[-h(t)e^{i\vartheta(t)}(z-z_0)\right]\Big|_A^B+$$

$$+(z-z_0)\int\limits_A^B F_2(t)\exp\left[-h(t)e^{i\vartheta(t)}(z-z_0)\right]\left[h'(t)+ih(t)\vartheta'(t)\right]e^{i\vartheta(t)}\,dt.$$

Отсюда следует неравенство

$$|I(A,\ B,\ z)|\leqslant|F_2(A)|\exp\{-h(A)\operatorname{Re}[(z-z_0)e^{i\vartheta(A)}]\}+$$
$$+|F_2(B)|\exp\{-h(B)\operatorname{Re}[(z-z_0)e^{i\vartheta(B)}]\}+|z-z_0|\int_A^B|F_2(t)|\times$$
$$\times\exp\{-h(t)\operatorname{Re}[(z-z_0)e^{i\vartheta(t)}]\}\Big(|h'(t)|+h(t)|\vartheta'(t)|\Big)\,dt,\qquad(1.20)$$

которое можно представить и в следующем виде

$$|I(A,\ B,\ z)|\leqslant\exp\left\{-h(A)\left[\operatorname{Re}\left((z-z_0)e^{i\vartheta(A)}\right)-\frac{\ln|F_2(A)|}{A}\,\frac{A}{h(A)}\right]\right\}+$$
$$+\exp\left\{-h(B)\left[\operatorname{Re}\left((z-z_0)e^{i\vartheta(B)}\right)-\frac{\ln|F_2(B)|}{B}\,\frac{B}{h(B)}\right]\right\}+$$
$$+|z-z_0|\int_A^B\exp\left\{-h(t)\left[\operatorname{Re}\left((z-z_0)e^{i\vartheta(t)}\right)-\left(\frac{\ln|\vartheta'(t)|}{t}+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{\ln|F_2(t)|}{t}\right)\frac{t}{h(t)}-\frac{\ln h(t)}{h(t)}\right]\right\}dt+|z-z_0|\int_A^B\exp\times$$
$$\times\left\{-h(t)\left[\operatorname{Re}\left((z-z_0)e^{i\vartheta(t)}\right)-\left(\frac{\ln|h'(t)|}{t}+\frac{\ln|F_2(t)|}{t}\right)\frac{t}{h(t)}\right]\right\}dt.\qquad(1.21)$$

Допустим, что $\rho_2\geqslant0$. Тогда для $z\in G$, где $G\subset U_2(z_0)$, выполняется неравенство

$$(x-x_0)\cos\varphi-(y-y_0)\sin\varphi>\frac{\rho_2}{a},$$

если φ принимает любое значение из промежутков $[-\vartheta,\ -\alpha]$ и $[\alpha,\ \vartheta]$. Рассмотрим функцию

$$g(\varphi)=\inf_{z\in G}\{(x-x_0)\cos\varphi-(y-y_0)\sin\varphi\},\ -\vartheta\leqslant\varphi\leqslant-\alpha;\ \alpha\leqslant\varphi\leqslant\vartheta.\ (1.22)$$

Как следует из определения $g(\varphi)$ и замкнутости G, для каждого φ из указанных промежутков найдется точка $z_\varphi=x_\varphi+iy_\varphi$ такая, что

$$g(\varphi)=(x_\varphi-x_0)\cos\varphi-(y_\varphi-y_0)\sin\varphi$$

и поэтому

$$g(\varphi)>\frac{\rho_2}{a},\quad -\vartheta\leqslant\varphi\leqslant-\alpha,\quad \alpha\leqslant\varphi\leqslant\vartheta.$$

Отсюда легко следует, что существует число $\eta>0$, для которого

$$g(\varphi)>\frac{\rho_2}{a}+3\eta.$$

Далее, как легко в этом убедиться, по числу η можно найти число $\delta>0$ такое, что неравенство

$$g(\varphi)>\frac{\rho_2}{a}+2\eta$$

будет выполняться, если φ меняется в интервалах $(-\vartheta-\delta,\ -\alpha+\delta)$ и $(\alpha-\delta,\ \vartheta+\delta)$.

Но при достаточно большом t из условий (1.1) и (1.6) следует, что

$$\alpha-\delta<\vartheta(t)<\vartheta+\delta,$$

или

$$-\vartheta-\delta<\vartheta(t)<-\alpha+\delta.$$

Поэтому для таких t $\Big($см. (1.23)$\Big)$

$$g\big(\vartheta(t)\big)=\inf_{z\in G}\{(x-x_0)\cos\vartheta(t)-(y-y_0)\sin\vartheta(t)\}>\frac{\rho_2}{a}+2\eta. \tag{1.24}$$

Кроме того, при достаточно большом t из (1.2) следует

$$\frac{h(t)}{t}>a'>0. \tag{1.25}$$

Используем последние два неравенства для оценки величины $I(A, B, z)$. Для этого заметим, что из определения чисел a, ρ_2 и неравенства (1.21) при достаточно большом A следует такое неравенство:

$$|I(A,\ B,\ z)|<\exp\left\{-h(A)\left[g\big(\vartheta(A)\big)-\frac{\rho_2}{a}-\eta\right]\right\}+$$
$$+\exp\left\{-h(B)\left[g\big(\vartheta(B)\big)-\frac{\rho_2}{b}-\eta\right]\right\}+$$
$$+2|z-z_0|\int_A^B\exp\left\{-h(t)\left[g\big(\vartheta(t)\big)-\frac{\rho_2}{a}-\eta\right]\right\}dt, \tag{1.26}$$

из которого с учетом (1.24) и (1.25) получаем

$$|I(A,\ B,\ z)|<e^{-\eta a' A}+e^{-\eta a' B}+2|z-z_0|\int_A^B e^{-\eta a' t}\,dt.$$

Поэтому при $A>A_0$

$$|I(A,\ B,\ z)|<2\left(1+\frac{|z-z_0|}{\eta a'}\right)e^{-\eta a' A},\qquad z\in G.$$

Этим доказано, что

$$I(A,\ B,\ z)\xrightarrow[\substack{A\to\infty\\ B\to\infty}]{}0$$

равномерно, если $z\in G$ и $\rho_2\geqslant 0$.

Если же $\rho_2<0$, то, как и выше, при достаточно больших t и A, $z\in G$, получаем неравенства

$$g\big(\vartheta(t)\big)=\inf_{z\in G}\{(x-x_0)\cos\vartheta(t)-(y-y_0)\sin\vartheta(t)\}>\frac{\rho_2}{b}+2\eta,\quad \eta>0,$$

и

$$|I(A,\ B,\ z)|<\exp\left\{-h(A)\left[g\big(\vartheta(A)\big)-\frac{\rho_2}{b}-\eta\right]\right\}+$$
$$+\exp\left\{-h(B)\left[g\big(\vartheta(B)\big)-\frac{\rho_2}{b}-\eta\right]\right\}+$$
$$+2|z-z_0|\int_A^B\exp\left\{-h(t)\left[g\big(\vartheta(t)\big)-\frac{\rho_2}{b}-\eta\right]\right\}dt,$$

из которых следует, что

$$I(A,\ B,\ z)\xrightarrow[\substack{A\to\infty\\ B\to\infty}]{}0$$

равномерно, если $z\in G$.

Допустим теперь, что интеграл (А) не сходится в точке $z=z_0$. В этом случае воспользуемся равенством (1.9), из которого для $I(A,B,z)$, как и выше, легко вывести неравенство вида (1.21), $A<B$,

$$|I(A, B, z)|\exp\left\{-h(A)\left[\mathrm{Re}\left((z-z_0)e^{i\vartheta(A)}\right)-\frac{\ln|F_1(A)|}{A}\frac{A}{h(A)}\right]\right\}+$$
$$+\exp\left\{-h(B)\left[\mathrm{Re}\left((z-z_0)e^{i\vartheta(B)}\right)-\frac{\ln|F_1(B)|}{B}\frac{B}{h(B)}\right]\right\}+$$
$$+|z-z_0|\int_A^B\exp\left\{-h(t)\left[\mathrm{Re}\left((z-z_0)e^{i\vartheta(t)}\right)-\left(\frac{\ln|\vartheta'(t)|}{t}+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{\ln|F_1(t)|}{t}\right)\frac{t}{h(t)}-\frac{\ln h(t)}{h(t)}\right]\right\}dt+|z-z_0|\int_A^B\exp\left\{-h(t)\times\right.$$
$$\left.\times\left[\mathrm{Re}\left((z-z_0)e^{i\vartheta(t)}\right)-\left(\frac{\ln|h'(t)|}{t}+\frac{\ln|F_1(t)|}{t}\right)\frac{t}{h(t)}\right]\right\}dt. \qquad (1.27)$$

Если функции $F_1(t)$ удовлетворяют условию (1.10), то аналогичными рассуждениями, как и при доказательстве первой части теоремы, из (1.27) выводим, что интеграл (А) сходится в области $U_1(z_0)$. И в этом случае сходимость является равномерной во всяком замкнутом и ограниченном множестве, принадлежащем области $U_1(z_0)$.

Теорема доказана. Из нее вытекают следствие 1.

Следствие 1. Пусть $\sigma<\infty$ и $r_2=-\infty$ (см. (1.5) и (1.14)). Тогда интеграл (А) сходится во всей плоскости.

Следствие 2. Рассмотрим множество функций

$$F_1(t, z_0)=\int_0^t\exp\left[-h(\tau)e^{i\vartheta(\tau)}z_0\right]dF(\tau),$$

где точки $z_0=x_0+iy_0$ лежат в угле

$$|\arg(\zeta_0-z)|<\frac{\pi}{2}-\vartheta-\delta$$

$\delta>0$ и ζ_0 — фиксированная точка.

Если $\sigma<\infty$ и существует число $r<\infty$ такое, что

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln|F_1(t, z_0)|}{t}\leqslant r$$

для некоторой последовательности точек $\{z_0^{(n)}\}$, где $\mathrm{Re}\,z_0^{(n)}\xrightarrow[n\to\infty]{}-\infty$, то интеграл (А) сходится во всей плоскости.

В самом деле, по доказанному интеграл (А) сходится в областях $U_1(z_0^{(n)})$ (см. (1.16)), $n=1, 2, \ldots$ Если ζ — произвольная фиксированная точка, то $\zeta\in U_1(z_0^{(n)})$ при достаточно большом n.

Следствие 3. Если $\sigma<\infty$ и

$$\lim_{t\to\infty}\frac{h(t)}{t}=\infty,$$

то области $U_1(z_0)$ и $U_2(z_0)$ сводятся к углу

$$|\arg(z-z_0)|<\frac{\pi}{2}-\vartheta.$$

Следствие 4. Если условие (1.1) не выполнено, то есть,

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\vartheta(t)-\underline{\lim_{t\to\infty}}\vartheta(t)\geqslant\pi,$$

и интеграл (A) сходится в точке $z=z_0$, то в случае $\rho_2<0$ он сходится в круге $|z-z_0|<\frac{|\rho_2|}{b}$. Если $\rho_2\geqslant 0$, то область $U_2(z_0)$ — пустая.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (1.1)–(1.4). *Если интеграл* (A) *не сходится в точке* $z=z_0$, *но выполняется условие* (1.10), *то он равномерно сходится в области*

$$V_1(z_0):\left|\arg\left(z-z_0-\frac{\rho_1}{a\cos\vartheta}\right)\right|<\frac{\pi}{2}-\vartheta-\delta;\ \left|z-z_0-\frac{\rho_1}{a\cos\vartheta}\right|\geqslant\eta. \quad (1.28)$$

Если интеграл (A) *сходится в точке* $z=z_0$, *то он равномерно сходится в области*

$$V_2^{(+)}(z_0):\left|\arg\left(z-z_0-\frac{\rho_2}{a\cos\vartheta}\right)\right|<\frac{\pi}{2}-\vartheta-\delta;\ \left|z-z_0-\frac{\rho_2}{a\cos\vartheta}\right|\geqslant\eta \quad (1.29)$$

в случае, когда $\rho_2\geqslant 0$. *Если* $\rho_2<0$, *то интеграл* (A) *равномерно сходится в области* (см. (1.6))

$$V_2^{(-)}(z_0):\left|\arg\left(z-z_0-\frac{\rho_2}{b\cos\alpha}\right)\right|<\frac{\pi}{2}-\vartheta-\delta;\ \left|z-z_0-\frac{\rho_2}{b\cos\alpha}\right|\geqslant\eta, \quad (1.30)$$

где η *и* δ — *произвольные положительные числа,* $\left[\delta<\frac{\pi}{2}-\vartheta\right.$.

Доказательство. Пусть выполнено условие (1.10) и $z\in V_1(z_0)$, $z=x+iy$. Рассмотрим функцию

$$g_1(\varphi)=(x-x_0)\cos\varphi-(y-y_0)\sin\varphi.$$

Фиксируем произвольное сколь угодно малое число $\varepsilon>0$. Тогда при достаточно большом t выполняется неравенство (см. (1.1))

$$g_1(\vartheta(t))-\frac{\rho_1}{a}=\left(x-x_0-\frac{\rho_1}{a\cos\vartheta(t)}\right)\cos\vartheta(t)-(y-y_0)\sin\vartheta(t)>$$

$$>\left(x-x_0-\frac{\rho_1}{a\cos\vartheta}\right)\cos\vartheta(t)-(y-y_0)\sin\vartheta(t)-\varepsilon=$$

$$=\left|z-z_0-\frac{\rho_1}{a\cos\vartheta}\right|\cos\left[\vartheta(t)+\arg\left(z-z_0-\frac{\rho_1}{a\cos\vartheta}\right)\right]-\varepsilon. \quad (1.31)$$

Значения t в (1.31) считаем настолько большими, чтобы (см. (1.28)) было

$$-\vartheta-\frac{\delta}{2}<\vartheta(t)<\vartheta+\frac{\delta}{2}$$

и

$$\frac{h(t)}{t}>a'>0,\ a'<a. \quad (1.32)$$

Тогда для $z\in V_1(z_0)$ получаем

$$\cos\left[\vartheta(t)+\arg\left(z-z_0-\frac{\rho_1}{a\cos\vartheta}\right)\right]>\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\delta}{2}\right)=\sin\frac{\delta}{2}$$

и (см. (1.31))

$$g_1(\vartheta(t))-\frac{\rho_1}{a}>\left|z-z_0-\frac{\rho_1}{a\cos\vartheta}\right|\sin\frac{\delta}{2}-\varepsilon.$$

Но, как следует из неравенства (1.27), по числу $\varepsilon>0$ можно найти такое A_0, что при $A>A_0$ будет

$$|I(A,\ B,\ z)|<\exp\left\{-h(A)\left[g_1\left(\vartheta(A)\right)-\frac{\rho_1}{a}-\varepsilon\right]\right\}+$$

$$+\exp\left\{-h(B)\left[g_1\left(\vartheta(B)\right)-\frac{\rho_1}{a}-\varepsilon\right]\right\}+2|z-z_0|\int_A^B\exp\times$$

$$\times\left\{-h(t)\left[g_1\left(\vartheta(t)\right)-\frac{\rho_1}{a}-\varepsilon\right]\right\}dt.$$

Поэтому из последних двух неравенств с учетом (1.32) при $A>A_1(\varepsilon,\ \delta)$ получаем

$$|I(A,\ B,\ z)|<\exp\left[-h(A)\left(\left|z-z_0-\frac{\rho_1}{a\cos\vartheta}\right|\sin\frac{\delta}{2}-2\varepsilon\right)\right]+$$

$$+\exp\left[-h(B)\left(\left|z-z_0-\frac{\rho_1}{a\cos\vartheta}\right|\sin\frac{\delta}{2}-2\varepsilon\right)\right]+$$

$$+2|z-z_0|\int_A^B\exp\left[-h(t)\left(\left|z-z_0-\frac{\rho_1}{a\sin\vartheta}\right|\sin\frac{\delta}{2}-2\varepsilon\right)\right]dt.$$

Следовательно, если считать $\varepsilon<\frac{\eta}{4}\sin\frac{\delta}{2}$, мы находим

$$|I(A,\ B,\ z)|<e^{-\frac{a'\eta A}{2}\sin\frac{\delta}{2}}+e^{-\frac{a'\eta B}{2}\sin\frac{\delta}{2}}+$$

$$+\frac{2|z-z_0|}{\left|z-z_0-\frac{\rho_1}{a\cos\vartheta}\right|\sin\frac{\delta}{2}-2\varepsilon}e^{-\frac{a'\eta A}{2}\sin\frac{\delta}{2}}.$$

Отсюда следует, что существует постоянная $C>0$, независящая от A и z, такая, что при $A>A_1$, $B>A$,

$$|I(A,\ B,\ z)|<Ce^{-\frac{a'\eta A}{2}\sin\frac{\delta}{2}},\quad z\in V_1(z_0).$$

Этим доказана равномерная сходимость интеграла (A) в области $V_1(z_0)$.

Если интеграл (A) сходится в точке $z=z_0$, то такими же рассуждениями, как и выше, доказывается равномерная сходимость этого интеграла в области $V_2^{(+)}(z_0)$ в случае, когда $\rho_2\geqslant 0$, а также равномерная сходимость в области $V_2^{(-)}(z_0)$, когда $\rho_2<0$.

Теорема доказана.

2. Докажем теперь теорему типа Абеля для интеграла

$$\int_0^\infty z^{m(t)}\exp\left[-h(t)e^{i\vartheta(t)}z\right]dF(t),\tag{B}$$

где $h(t)$, $\vartheta(t)$ и $F(t)$ удовлетворяют прежним условиям, а $m(t)$ — неотрицательная непрерывная и кусочно-дифференцируемая функция при $t\geqslant 0$. Мы полагаем

$$z^{m(t)}=e^{m(t)\ln z}.$$

Пусть выполнены условия (1.1)—(1.4) и, кроме того,

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln|m'(t)|}{t}=\sigma_3<\infty,\tag{1.33}$$

$$\underline{\lim_{t\to\infty}}\frac{m(t)}{t}=m\leqslant\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{m(t)}{t}=M<\infty.\tag{1.34}$$

Определяем величину σ равенством

$$\sigma=\max(\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3). \tag{1.35}$$

Фиксируем точку $z_0=x_0+iy_0\neq 0$. Тогда функция

$$\Psi_1(t)=\int_0^t z_0^{m(\tau)}\exp[-h(\tau)e^{i\vartheta(\tau)}z_0]\,dF(\tau) \tag{1.36}$$

имеет ограниченную вариацию на любом промежутке $[0,\ T]$, и отрезок интеграла (B)

$$I(A,\ B,\ z)=\int_A^B z^{m(t)}\exp[-h(t)e^{i\vartheta(t)}z]\,dF(t),\qquad A<B, \tag{1.37}$$

можно представить в виде

$$I(A,\ B,\ z)=\int_A^B\left(\frac{z}{z_0}\right)^{m(t)}\exp[-h(t)e^{i\vartheta(t)}(z-z_0)]\,d\Psi_1(t). \tag{1.38}$$

Пусть $\Psi_1(t)$ удовлетворяет условию

$$\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\ln|\Psi_1(t)|}{t}=r_1<\infty. \tag{1.39}$$

Положим

$$\rho_1=\max(r_1,\ \sigma+r_1). \tag{1.40}$$

Если интеграл (B) сходится в точке $z_0\neq 0$, то $I(A,B,z)$ представим в виде

$$I(A,\ B,\ z)=\int_A^B\left(\frac{z}{z_0}\right)^{m(t)}\exp[-h(t)e^{i\vartheta(t)}(z-z_0)]\,d\Psi_2(t), \tag{1.41}$$

где

$$\Psi_2(t)=\int_\infty^t z_0^{m(\tau)}\exp[-h(\tau)e^{i\vartheta(\tau)}z_0]\,dF(\tau). \tag{1.42}$$

Вычислим

$$\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\ln|\Psi_2(t)|}{t}=r_2,\quad r_2\leqslant 0, \tag{1.43}$$

и положим

$$\rho_2=\max(r_2,\ \sigma+r_2). \tag{1.44}$$

Тогда имеет место теорема.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (1.1)—(1.4), (1.33) *и* (1.34). *Если интеграл* (B) *в точке* $z_0=x_0+iy_0\neq 0$ *не сходится, но выполнено условие* (1.39), *то он равномерно сходится во всяком замкнутом и ограниченном множестве, содержащемся в области* $U_1(z_0)$, *точки* $z=x+iy$ *которой при любом* φ *из промежутков* $[-\vartheta,\ -\alpha]$ и $[\alpha,\ \vartheta]$ *удовлетворяют неравенству*

$$U_1(z_0):(x-x_0)\cos\varphi-(y-y_0)\sin\varphi>\begin{cases}\dfrac{\rho_1}{a}+\dfrac{M}{a}\ln\left|\dfrac{z}{z_0}\right|, & |z|>|z_0|,\\[2mm] \dfrac{\rho_1}{a}+\dfrac{m}{b}\ln\left|\dfrac{z}{z_0}\right|, & |z|<|z_0|.\end{cases} \tag{1.45}$$

Если интеграл (B) *сходится в точке* $z_0=x_0+iy_0\neq 0$, *то он равномерно сходится во всяком замкнутом и ограниченном множестве, содержащемся в области* $U_2^{(+)}(z_0)$ *в случае, когда* $\rho_2\geqslant 0$, *и в области* $U_2^{(-)}(z_0)$ *в случае, когда*

$\rho_2<0$, *точки* $z=x+iy$ *которых при любом* φ *из промежутков* $[-\vartheta, -\alpha]$ *и* $[\alpha, \vartheta]$ *удовлетворяют неравенствам*

$$U_2^{(+)}(z_0):(x-x_0)\cos\varphi-(y-y_0)\sin\varphi>\begin{cases}\frac{\rho_2}{a}+\frac{M}{a}\ln\left|\frac{z}{z_0}\right|, & |z|>|z_0|,\\ \frac{\rho_2}{a}+\frac{m}{b}\ln\left|\frac{z}{z_0}\right|, & |z|<|z_0|;\end{cases} \tag{1.46}$$

$$U_2^{(-)}(z_0):(x-x_0)\cos\varphi-(y-y_0)\sin\varphi>\begin{cases}\frac{\rho_2}{b}+\frac{M}{a}\ln\left|\frac{z}{z_0}\right|, & |z|>|z_0|,\\ \frac{\rho_2}{b}+\frac{m}{b}\ln\left|\frac{z}{z_0}\right|, & |z|<|z_0|.\end{cases} \tag{1.47}$$

Доказательство. Для определенности рассмотрим случай, когда интеграл (B) не сходится в точке z_0, но выполнено условие (1.39). Пусть G — замкнутое и ограниченное множество, принадлежащее области $U_1(z_0)$, $z\in G$ и $|z|>|z_0|$. Тогда

$$(x-x_0)\cos\varphi-(y-y_0)\sin\varphi>\frac{\rho_1}{a}+\frac{M}{a}\ln\left|\frac{z}{z_0}\right|,$$

где φ пробегает все значения из промежутков $[-\vartheta, -\alpha]$ и $[\alpha, \vartheta]$.

Рассмотрим функцию

$$H_1(\varphi)=\inf_{z\in G}\left\{(x-x_0)\cos\varphi-(y-y_0)\sin\varphi-\frac{M}{a}\ln\left|\frac{z}{z_0}\right|\right\}, \tag{1.48}$$

$$\varphi\in[-\vartheta, -\alpha],\quad \varphi\in[\alpha, \vartheta].$$

Применяя те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 1 (см. (1.22), (1.23)), мы убеждаемся, что существует такое число $\eta>0$, для которого

$$H_1(\varphi)>\frac{\rho_1}{a}+3\eta.$$

Аналогично (см. (1.23)) получаем неравенство

$$H_1(\varphi)>\frac{\rho_1}{a}+2\eta,$$

если $\varphi\in(-\vartheta-\delta, -\alpha+\delta)$ и $\varphi\in(\alpha-\delta, \vartheta+\delta)$, где $\delta>0$ зависит от η. Но при достаточно большом t

$$\alpha-\delta<\vartheta(t)<\vartheta+\delta$$

или

$$-\vartheta-\delta<\vartheta(t)<-\alpha+\delta.$$

Поэтому для таких t

$$H_1\big(\vartheta(t)\big)=\inf_{z\in G}\Big\{(x-x_0)\cos\vartheta(t)-(y-y_0)\sin\vartheta(t)-$$
$$-\frac{M}{a}\ln\left|\frac{z}{z_0}\right|\Big\}>\frac{\rho_1}{a}+2\eta. \tag{1.49}$$

Проинтегрируем по частям отрезок интеграла (B), представленный равенством (1.38). Получаем

$$I(A, B, z)=\Psi_1(t)\left(\frac{z}{z_0}\right)^{m(t)}\exp[-h(t)e^{i\vartheta(t)}(z-z_0)]\Big|_A^B-$$
$$-\int_A^B\Psi_1(t)\exp[-h(t)e^{i\vartheta(t)}(z-z_0)]\left(\frac{z}{z_0}\right)^{m(t)}\Big[m'(t)\ln\frac{z}{z_0}-$$
$$-(z-z_0)\big(h'(t)+ih(t)\vartheta'(t)\big)e^{i\vartheta(t)}\Big]\,dt.$$

Отсюда следует неравенство

$$|I(A,\ B,\ z)|\leqslant \exp\left\{-h(A)\left[\operatorname{Re}\left((z-z_0)e^{i\vartheta(A)}\right)-\left(\frac{m(A)}{A}\ln\left|\frac{z}{z_0}\right|+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{\ln|\Psi_1(A)|}{A}\right)\frac{A}{h(A)}\right]\right\}+\exp\left\{-h(B)\left[\operatorname{Re}\left((z-z_0)e^{i\vartheta(B)}\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left(\frac{m(B)}{B}\ln\left|\frac{z}{z_0}\right|+\frac{\ln|\Psi_1(B)|}{B}\right)\frac{B}{h(B)}\right]\right\}+$$
$$+\int_A^B\exp\left\{-h(t)\left[\operatorname{Re}\left((z-z_0)e^{i\vartheta(t)}\right)-\left(\frac{m(t)}{t}\ln\left|\frac{z}{z_0}\right|+\frac{\ln|\Psi_1(t)|}{t}+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{\ln|m'(t)|}{t}+\frac{\ln\left|\ln\frac{z}{z_0}\right|}{t}\right)\frac{t}{h(t)}\right]\right\}dt+|z-z_0|\int_A^B\exp\left\{-h(t)\times\right.$$
$$\times\left[\operatorname{Re}\left((z-z_0)e^{i\vartheta(t)}\right)-\left(\frac{m(t)}{t}\ln\left|\frac{z}{z_0}\right|+\frac{\ln|\Psi_1(t)|}{t}\right)+\frac{\ln|\vartheta'(t)|}{t}\right)\frac{t}{h(t)}-$$
$$\left.\left.-\frac{\ln h(t)}{h(t)}\right]\right\}dt+|z-z_0|\int_A^B\exp\left\{-h(t)\left[\operatorname{Re}\left((z-z_0)e^{i\vartheta(t)}\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left(\frac{m(t)}{t}\ln\left|\frac{z}{z_0}\right|+\frac{\ln|\Psi_1(t)|}{t}+\frac{\ln|h'(t)|}{t}\right)\frac{t}{h(t)}\right]\right\}dt. \tag{1.50}$$

Из этого неравенства при достаточно большом A, $A>A_0(\eta)$ выводим (число η — то же самое, что и в (1.49))

$$|I(A,\ B,\ z)|<\exp\left\{-h(A)\left[H_1\left(\vartheta(A)\right)-\frac{\rho_1}{a}-\eta\right]\right\}+$$
$$+\exp\left\{-h(B)\left[H_1\left(\vartheta(B)\right)-\frac{\rho_1}{a}-\eta\right]\right\}+$$
$$+(1+2|z-z_0|)\int_A^B\exp\left\{-h(t)\left[H_1\left(\vartheta(t)\right)-\frac{\rho_1}{a}-\eta\right]\right\}dt.$$

Аналогично, из (1.2)

$$\frac{h(t)}{t}>a'>0,\qquad t>A_0.$$

Сопоставляя эти неравенства с (1.49), заключаем, что $I(A,\ B,\ z)\xrightarrow[B\to\infty]{A\to\infty}0$ равномерно, если $z\in G$.

Аналогично рассматривается и случай, когда $|z|<|z_0|$, $z\in G$. Только теперь вместо $H_1(\varphi)$ определяем функцию

$$H_2(\varphi)=\inf_{z\in G}\left\{(x-x_0)\cos\varphi-(y-y_0)\sin\varphi-\frac{m}{b}\ln\left|\frac{z}{z_0}\right|\right\},$$
$$\varphi\in[-\vartheta,\ -\alpha],\ \varphi\in[\alpha,\ \vartheta].$$

Очевидно, что случай, когда интеграл (B) сходится в точке $z_0=x_0+iy_0\neq 0$, рассматривается аналогично.

Теорема доказана.

Следствие 5. Если $M=0$ или

$$\lim_{t\to\infty}\frac{m(t)}{h(t)}=0,$$

то области $U_1(z_0)$, $U_2^{(+)}(z_0)$ и $U_2^{(-)}(z_0)$ совпадают с областями $U_1(z_0)$ и $U_2(z_0)$, о которых говорилось в теореме 1 (ρ_1 и ρ_2 вычисляются по формулам (1.40) и (1.44)).

§ 2. Теорема Абеля для рядов Дирихле и рядов Тейлора—Дирихле

Рассмотрим теперь ряды (C) и (D). Как известно [1], область абсолютной сходимости рядов Дирихле (C) исследована полностью. В [2] были получены результаты об условной сходимости рядов (C) в предположении, что показатели λ_n удовлетворяют условию

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, |\arg(\lambda_{n+1}-\lambda_n)| = \gamma < \frac{\pi}{2}\,.$$

В настоящем параграфе последнее условие будет заменено более общим, при котором имеет место теорема типа Абеля об условной сходимости рядов (C).

Заметим, что условная сходимость рядов Тейлора—Дирихле до сих пор совершенно не исследована, за исключением частных случаев, когда области абсолютной условной сходимости этих рядов совпадают. В этом параграфе будет доказана и теорема типа Абеля об условной сходимости рядов Тейлора—Дирихле.

1. Рассмотрим ряд Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}, \qquad \lambda_n = \alpha_n + i\beta_n = |\lambda_n|\, e^{i\vartheta_n}, \tag{C}$$

в котором

$$0<\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n\to\infty. \tag{2.1}$$

Определяем функции $\beta(t)$, $\vartheta(t)$ и $F(t)$, $0\leqslant t<\infty$, следующими равенствами:

$$\beta(t)=\begin{cases}\beta_1, & 0\leqslant t<\alpha_1,\\ \beta_n+\dfrac{\beta_{n+1}-\beta_n}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}(t-\alpha_n), & \alpha_n\leqslant t<\alpha_{n+1}, \qquad n=1,\ 2,\ \ldots;\end{cases} \tag{2.2}$$

$$\vartheta(t)=\begin{cases}\vartheta_1, & 0\leqslant t<\alpha_1,\\ \vartheta_n+\dfrac{\vartheta_{n+1}-\vartheta_n}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}(t-\alpha_n), & \alpha_n\leqslant t<\alpha_{n+1}, \qquad n=1,\ 2,\ \ldots;\end{cases} \tag{2.3}$$

и

$$F(t)=\begin{cases}0, & t=0,\\ \sum\limits_{\alpha_n\leqslant t} a_n, & t>0.\end{cases} \tag{2.4}$$

Очевидно, что

$$\beta(\alpha_n)=\beta_n,\quad \vartheta(\alpha_n)=\vartheta_n, \qquad n=1,\ 2,\ \ldots$$

и на любом конечном промежутке $[0,\ T]$ $F(t)$ имеет ограниченную вариацию

$$\overset{T}{\underset{0}{V}} F(t)=\sum_{\alpha_n\leqslant T} |a_n|.$$

Так как $F(t)$ постоянна в интервалах $[\alpha_n,\ \alpha_{n+1})$, $n=1,2,\ldots$, то выполняется равенство

$$\int_0^T \exp\left[-\sqrt{t^2+\beta^2(t)}\, e^{i\vartheta(t)} z\right] dF(t)=\sum_{\alpha_n\leqslant T} a_n e^{-\lambda_n z}. \tag{2.5}$$

Отсюда следует, что ряд (C) сходится или расходится одновременно с интегралом типа Лапласа—Стилтьеса

$$\int_0^\infty \exp\left[-\sqrt{t^2+\beta^2(t)}\,e^{i\vartheta(t)}z\right]dF(t) \tag{2.6}$$

и в случае сходимости сумма ряда (C) равна значению последнего интеграла.

Если вместо (2.1) выполнено условие

$$0<|\lambda_1|<|\lambda_2|<\ldots<|\lambda_n|\to\infty, \tag{2.7}$$

то, определяя функции $\vartheta(t)$ и $F(t)$, $0\leqslant t<\infty$, равенствами

$$\vartheta(t)=\begin{cases}\vartheta_1, & 0\leqslant t<|\lambda_1|,\\ \vartheta_n+\dfrac{\vartheta_{n+1}-\vartheta_n}{|\lambda_{n+1}|-|\lambda_n|}(t-|\lambda_n|), & |\lambda_n|\leqslant t<|\lambda_{n+1}|, \quad n=1,\ 2,\ldots\end{cases} \tag{2.8}$$

и

$$F(t)=\begin{cases}0, & t=0,\\ \sum\limits_{|\lambda_n|\leqslant t} a_n, & t>0,\end{cases} \tag{2.9}$$

убеждаемся, что ряд (C) сходится или расходится одновременно с интегралом

$$\int_0^\infty \exp\left[-te^{i\vartheta(t)}z\right]dF(t), \tag{2.10}$$

и в случае сходимости их значения совпадают.

Наконец, если ни одно из условий (2.1) и (2.7) не выполнено, а лишь только

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty,\quad \lambda_n\neq 0,\qquad n=1,\ 2,\ \ldots, \tag{2.11}$$

то определяем величину

$$\Delta_n=\sum_{k=1}^n|\lambda_k|,\qquad \Delta_1<\Delta_2<\ldots<\Delta_n\to\infty, \tag{2.12}$$

и функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\vartheta(t)$ и $F(t)$, $0\leqslant t<\infty$, равенствами:

$$\alpha(t)=\begin{cases}\alpha_1, & 0\leqslant t<\Delta_1\\ \alpha_n+\dfrac{\alpha_{n+1}-\alpha_n}{|\lambda_{n+1}|}(t-\Delta_n), & \Delta_n\leqslant t<\Delta_{n+1}, \qquad n=1,\ 2,\ \ldots;\end{cases} \tag{2.13}$$

$$\beta(t)=\begin{cases}\beta_1, & 0\leqslant t<\Delta_1,\\ \beta_n+\dfrac{\beta_{n+1}-\beta_n}{|\lambda_{n+1}|}(t-\Delta_n), & \Delta_n\leqslant t<\Delta_{n+1}, \qquad n=1,\ 2,\ \ldots;\end{cases} \tag{2.14}$$

$$\vartheta(t)=\begin{cases}\vartheta_1, & 0\leqslant t<\Delta_1,\\ \vartheta_n+\dfrac{\vartheta_{n+1}-\vartheta_n}{|\lambda_{n+1}|}(t-\Delta_n), & \Delta_n\leqslant t<\Delta_{n+1}, \qquad n=1,\ 2,\ \ldots;\end{cases} \tag{2.15}$$

и

$$F(t)=\begin{cases}0, & t=0,\\ \sum\limits_{\Delta_n\leqslant t} a_n, & t>0.\end{cases} \tag{2.16}$$

Отсюда следует, что если ряд (C) сходится в точке z, то его сумма равна значению интеграла

$$\int_0^\infty \exp\left[-\sqrt{\alpha^2(t)+\beta^2(t)}\,e^{i\vartheta(t)}z\right]dF(t). \tag{2.17}$$

Очевидно, что аналогичный переход от ряда к некоторому интегралу типа Лапласа – Стилтьеса можно осуществить и для рядов Тейлора – Дирихле. Но для таких интегралов вида (A) или (B) мы уже имеем теоремы Абеля, которые, таким образом, могут быть перенесены и на случай рядов (C) и (D).

Замечание 2. Функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\vartheta(t)$, которые были построены выше, являются кусочно-линейными. Но для равенства, например, суммы ряда (C) значению интеграла (2.6) ($\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n\to\infty$) достаточно, очевидно, чтобы $\beta(t)$ и $\vartheta(t)$ были непрерывными при $0\leqslant t<\infty$ и чтобы $\beta(\alpha_n)=\beta_n$ и $\vartheta(\alpha_n)=\vartheta_n$, $F(t)$ – определялось равенством (2.4).

Сформулируем теперь теорему Абеля для ряда Дирихле (C), который удовлетворяет условиям (2.7) и

$$\varlimsup_{n\to\infty}|\arg\lambda_n|=\varlimsup_{n\to\infty}|\vartheta_n|=\vartheta<\frac{\pi}{2}. \tag{2.18}$$

Если ряд (C) сходится в точке z, то выполняется равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\lambda_n z}=\int_0^{\infty}\exp\left[-te^{i\vartheta(t)}z\right]dF(t),$$

где $\vartheta(t)$ и $F(t)$ – функции, определенные равенствами (2.8) и (2.9). Таким образом, нам остается перенести теорему 1, доказанную для интеграла (2.10), где $h(t)\equiv t$, на случай ряда (C). Для этого сначала надо перефразировать условия (1.1) – (1.4).

Очевидно, условие (1.1) в случае ряда (C) означает условие (2.18). Так как $h(t)\equiv t$, то $\left(\text{см. } (1.2)\right)$

$$a=b=1.$$

Условие (1.4) теперь означает, что

$$\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\ln|\vartheta'(t)|}{t}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln\left|\dfrac{\vartheta_{n+1}-\vartheta_n}{|\lambda_{n+1}|-|\lambda_n|}\right|}{|\lambda_n|}=\sigma_2<\infty. \tag{2.19}$$

Поэтому в нашем случае $\left(\text{см. } (1.5)\right)$

$$\sigma=\sigma_2.$$

Если ряд (C) не сходится в фиксированной точке $z=z_0$, то допустим, что $\left(\text{см. } (1.10)\right)$

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k e^{-\lambda_k z_0}\right|}{|\lambda_n|}=r_1<\infty \tag{2.20}$$

и положим

$$\rho_1=\max(r_1,\ \sigma_2+r_1). \tag{2.21}$$

Если же ряд (C) сходится в точке $z=z_0$, то вычислим $\left(\text{см. } (1.14)\right)$

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln\left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}a_k e^{-\lambda_k z_0}\right|}{|\lambda_n|}=r_2,\ r_2\leqslant 0, \tag{2.22}$$

и

$$\rho_2=\max(r_2,\ \sigma_2+r_2). \tag{2.23}$$

Пусть наконец

$$\alpha = \varliminf_{n\to\infty} |\vartheta_n|, \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant \vartheta. \tag{2.24}$$

Тогда теорема 1, перенесенная на случай ряда Дирихле (С), формулируется следующим образом.

Теорема 4. *Пусть ряд* (С) *удовлетворяет условиям* (2.7), (2.18) *и* (2.19). *Если этот ряд не сходится в точке* $z_0 = x_0 + iy_0$, *но удовлетворяет условию* (2.20), *то он сходится в области* $U_1(z_0)$, *точки* $z = x + iy$ *которой удовлетворяют неравенству*

$$U_1(z_0) : (x - x_0)\cos\varphi - (y - y_0)\sin\varphi > \rho_1,$$

где φ *принимает любое значение из промежутков* $[-\vartheta, -\alpha]$ и $[\alpha, \vartheta]$.

Если же ряд (С) *сходится в точке* z_0, *то он сходится в области* $U_2(z_0)$, *точки* $z = x + iy$ *которой при любом* φ *из* $[-\vartheta, -\alpha]$ *и* $[\alpha, \vartheta]$ *уродвлетворяют неравенству*

$$U_2(z_0) : (x - x_0)\cos\varphi - (y - y_0)\sin\varphi > \rho_2.$$

Сходимость является равномерной во всяком замкнутом и ограниченном множестве $G \subset U_1(z_0)$ $\left(G \subset U_2(z_0)\right.$, *если ряд сходится в точке* $\left.z_0\right)$.

Замечание 3. Так как $\rho_1 \geqslant 0$, то, как легко убедиться,

$$U_1(z_0) : \left| \arg\left(z - z_0 - \frac{\rho_1}{\cos\vartheta}\right) \right| < \frac{\pi}{2} - \vartheta.$$

Теорема 2 в этом случае формулируется так.

Теорема 5. *Если выполнены условия теоремы* 4 *и ряд* (С) *сходится в точке* z_0, *то он равномерно сходится в области*

$$V_2^{(+)}(z_0) : \left| \arg\left(z - z_0 - \frac{\rho_2}{\cos\vartheta}\right) \right| < \frac{\pi}{2} - \vartheta - \delta; \quad \left| z - z_0 - \frac{\rho_2}{\cos\vartheta} \right| \geqslant \eta$$

в случае, когда $\rho_2 \geqslant 0$, *и равномерно сходится в области*

$$V_2^{(-)}(z_0) : \left| \arg\left(z - z_0 - \frac{\rho_2}{\cos\alpha}\right) \right| < \frac{\pi}{2} - \vartheta - \delta; \quad \left| z - z_0 - \frac{\rho_2}{\cos\alpha} \right| \geqslant \eta$$

в случае, когда $\rho_2 < 0$.

Если ряд (С) *не сходится в точке* $z = z_0$, *но выполнено условие* (2.20), *то этот ряд равномерно сходится в области*

$$V_1(z_0) : \left| \arg\left(z - z_0 - \frac{\rho_1}{\cos\vartheta}\right) \right| < \frac{\pi}{2} - \vartheta - \delta; \left| z - z_0 - \frac{\rho_1}{\cos\vartheta} \right| \geqslant \eta,$$

где η *и* δ – *произвольные положительные числа,* $\delta < \frac{\pi}{2} - \vartheta$.

Рассмотрим теперь ряд (С), который удовлетворяет условиям (2.1) и (2.18). Тогда выполняется равенство (2.5), где $\beta(t)$, $\vartheta(t)$ и $F(t)$ определены формулами (2.2), (2.3) и (2.4). В этом случае

$$h(t) = \sqrt{t^2 + \beta^2(t)}$$

и

$$a = \varliminf_{t\to\infty} \frac{h(t)}{t} = \varliminf_{t\to\infty} \sqrt{1 + \frac{\beta^2(t)}{t^2}} = \varliminf_{n\to\infty} \sqrt{1 + \left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}\right)^2} = \frac{1}{\cos\alpha}; \tag{2.25}$$

Аналогично,

$$b = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{h(t)}{t} = \frac{1}{\cos\vartheta}. \tag{2.26}$$

Условия (1.3) и (1.4) в этом случае означают, что

$$\sigma_1=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln|h'(t)|}{t}=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln|t+\beta(t)\beta'(t)|-\ln\sqrt{t^2+\beta^2(t)}}{t}=$$

$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{\ln\left|1+\frac{\beta_n}{\alpha_n}\,\frac{\beta_{n+1}-\beta_n}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}\right|}{\alpha_n}-\frac{\ln\left(1+\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\right)}{\alpha_n}\right)<\infty \tag{2.27}$$

и

$$\sigma_2=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln|\vartheta'(t)|}{t}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\left|\frac{\vartheta_{n+1}-\vartheta_n}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}\right|}{\alpha_n}<\infty. \tag{2.28}$$

Но из (2.18) следует

$$\left|\frac{\beta_n}{\alpha_n}\right|=|\operatorname{tg}\vartheta_n|\leqslant C<\infty,\quad n>n_0,$$

поэтому

$$\sigma_1=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\left|1+\frac{\beta_n}{\alpha_n}\,\frac{\beta_{n+1}-\beta_n}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}\right|}{\alpha_n}<\infty. \tag{2.29}$$

Легко получить некоторую связь между числами σ_1 и σ_2. В самом деле, рассмотрим простые преобразования

$$\frac{\beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}}-\frac{\beta_n}{\alpha_n}=\frac{\beta_{n+1}-\beta_n}{\alpha_n}-\frac{\beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}}\,\frac{\alpha_{n+1}-\alpha_n}{\alpha_n}=\frac{\alpha_{n+1}-\alpha_n}{\alpha_n}\left(\frac{\beta_{n+1}-\beta_n}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}-\frac{\beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}}\right),$$

или

$$\frac{\operatorname{tg}\vartheta_{n+1}-\operatorname{tg}\vartheta_n}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}=\frac{1}{\alpha_n}\left(\frac{\beta_{n+1}-\beta_n}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}-\operatorname{tg}\vartheta_{n+1}\right).$$

Отсюда следует

$$\frac{\vartheta_{n+1}-\vartheta_n}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}=\left(\frac{\beta_{n+1}-\beta_n}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}-\operatorname{tg}\vartheta_{n+1}\right)\frac{\cos\vartheta_n\cos\vartheta_{n+1}}{\alpha_n}\cdot\frac{\vartheta_{n+1}-\vartheta_n}{\sin(\vartheta_{n+1}-\vartheta_n)}. \tag{2.30}$$

Как следует из (2.18), при достаточно большом n

$$|\vartheta_{n+1}-\vartheta_n|<\pi-\eta,\quad \eta>0.$$

Поэтому для таких n

$$\left|\frac{\vartheta_{n+1}-\vartheta_n}{\sin(\vartheta_{n+1}-\vartheta_n)}\right|\leqslant C_1<\infty,$$

и из (2.30) вытекают два неравенства

$$\left|\frac{\vartheta_{n+1}-\vartheta_n}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}\right|\leqslant\frac{C_1}{\alpha_n}\left(\left|\frac{\beta_{n+1}-\beta_n}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}\right|+|\operatorname{tg}\vartheta_{n+1}|\right), \tag{2.31}$$

$$\left|\frac{\beta_{n+1}-\beta_n}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}\right|\leqslant C_2\,\alpha_n\left|\frac{\vartheta_{n+1}-\vartheta_n}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}\right|+|\operatorname{tg}\vartheta_{n+1}|. \tag{2.32}$$

Отсюда получаем, что

$$\sigma_1=\sigma_2,$$

если

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{\beta_{n+1}-\beta_n}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}\right|=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{\vartheta_{n+1}-\vartheta_n}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}\right|=\infty.$$

Аналогично, если

$$\left|\frac{\beta_{n+1}-\beta_n}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}\right|\leqslant C_3<\infty,$$

то есть, если

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|\arg(\lambda_{n+1}-\lambda_n)|=\gamma<\frac{\pi}{2}, \tag{2.33}$$

то тогда из (2.28), (2.29) и неравенства (2.31) следует, что

$$\sigma_1 \leqslant 0, \quad \sigma_2 \leqslant 0$$

и поэтому

$$\sigma = \max(\sigma_1, \sigma_2) \leqslant 0.$$

Пусть теперь

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{\beta_{n+1}-\beta_n}{\alpha_{n+1}-\alpha_n} \right| = \infty, \tag{2.34}$$

но

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \left| \dfrac{\beta_{n+1}-\beta_n}{\alpha_{n+1}-\alpha_n} \right|}{\alpha_n} = \sigma_1' < \infty. \tag{2.35}$$

Тогда из (2.31) и (2.35) следуют наравенства

$$\sigma_1 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \left| 1 + \dfrac{\beta_n}{\alpha_n} \dfrac{\beta_{n+1}-\beta_n}{\alpha_{n+1}-\alpha_n} \right|}{\alpha_n} \leqslant \sigma_1' < \infty$$

и

$$\sigma_2 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \left| \dfrac{\vartheta_{n+1}-\vartheta_n}{\alpha_{n+1}-\alpha_n} \right|}{\alpha_n} \leqslant \sigma_1' < \infty.$$

Итак, в этом случае условия (1.3) и (1.4) можно заменить условием (2.35).

Положим, как и выше,

$$\sigma = \max(\sigma_1, \sigma_2). \tag{2.36}$$

Тогда

$$\sigma \leqslant \sigma_1',$$

если выполнены условия (2.34) и (2.35), и

$$\sigma \leqslant 0,$$

если выполнено условие (2.33).

Фиксируем точку $z = z_0$. Если ряд (C) не сходится в этой точке, то допустим, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \left| \sum\limits_{k=1}^{n} a_k e^{-\lambda_k z_0} \right|}{\alpha_n} = r_1 < \infty \tag{2.37}$$

и положим $\left(\text{см. (2.36)}\right)$

$$\rho_1 = \max(r_1, \sigma + r_1). \tag{2.38}$$

Если же ряд (C) сходится в точке $z = z_0$, то вычислим

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \left| \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z_0} \right|}{\alpha_n} = r_2, \quad r_2 \leqslant 0, \tag{2.39}$$

и

$$\rho_2 = \max(r_2, \sigma + r_2). \tag{2.40}$$

Очевидно,

$$\rho_2 \leqslant 0,$$

если выполняется условие (2.33).

Теперь можем сформулировать теорему (см. (2.25) и (2.26)), которая является более общей, чем теорема, полученная в статье [2].

Теорема 6. *Если выполнено условие* (2.33) *и ряд* (C) *сходится в точке* $z=z_0$ *то он сходится в области*

$$U_2(z_0):(x-x_0)\cos\varphi-(y-y_0)\sin\varphi>\rho_2\cos\vartheta,$$
$$\varphi\in[-\vartheta,\ -\alpha],\ \varphi\in[\alpha,\ \vartheta].$$

Сходимость является равномерной в области

$$V_2(z_0):\left|\arg\left(z-z_0-\frac{\rho_2\cos\vartheta}{\cos\alpha}\right)\right|<\frac{\pi}{2}-\vartheta-\delta;\quad\left|z-z_0-\frac{\rho_2\cos\vartheta}{\cos\alpha}\right|\geqslant\eta,$$

где $\eta>0$ *и* $\delta>0$ *— произвольные числа,* $\delta<\frac{\pi}{2}-\vartheta$.

Если ряд (C) *не сходится в точке* $z=z_0$, *но выполнено условие* (2.37), *то он сходится в области* (см. (2.38))

$$U_1(z_0):(x-x_0)\cos\varphi-(y-y_0)\sin\varphi>\rho_1\cos\alpha,$$
$$\varphi\in[-\vartheta,\ -\alpha],\ \varphi\in[\alpha,\ \vartheta]$$

и равномерно сходится в области

$$V_1(z_0):\left|\arg\left(z-z_0-\frac{\rho_1\cos\alpha}{\cos\vartheta}\right)\right|<\frac{\pi}{2}-\vartheta-\delta;\quad\left|z-z_0-\frac{\rho_1\cos\alpha}{\cos\vartheta}\right|\geqslant\eta.$$

Теорема 7. *Пусть показатели ряда* (C) *удовлетворяют условиям* (2.18), (2.34) *и* (2.35). *Тогда из сходимости ряда* (C) *в точке* z_0 *следует его сходимость в области*

$$U_2(z_0):(x-x_0)\cos\varphi-(y-y_0)\sin\varphi>\begin{cases}\rho_2\cos\alpha, & \rho_2\geqslant0,\\ \rho_2\cos\vartheta, & \rho_2<0,\end{cases}$$
$$\varphi\in[-\vartheta,\ -\alpha],\ \varphi\in[\alpha,\ \vartheta],$$

и равномерная сходимость в области

$$V_2^{(+)}(z_0):\left|\arg\left(z-z_0-\frac{\rho_2\cos\alpha}{\cos\vartheta}\right)\right|<\frac{\pi}{2}-\vartheta-\delta;\quad\left|z-z_0-\frac{\rho_2\cos\alpha}{\cos\vartheta}\right|\geqslant\eta,$$

если $\rho_2\geqslant0$, *и в области*

$$V_2^{(-)}(z_0):\left|\arg\left(z-z_0-\frac{\rho_2\cos\vartheta}{\cos\alpha}\right)\right|<\frac{\pi}{2}-\vartheta-\delta;\quad\left|z-z_0-\frac{\rho_2\cos\vartheta}{\cos\alpha}\right|\geqslant\eta,$$

где $\eta>0$ *и* $\delta>0$ *— произвольные числа,* $\delta<\frac{\pi}{2}-\vartheta$.

Аналогичное утверждение можно сформулировать и для случая, когда ряд (C) не сходится в точке $z=z_0$, но выполнено условие (2.37). В этом случае $\rho_1\geqslant0$.

Заметим, что следствия 1, 2 и 4 остаются верными и для рядов Дирихле (C).

2. Рассмотрим ряд Тейлора—Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^{m_n}e^{-\lambda_nz},\quad\lambda_n=|\lambda_n|e^{i\vartheta_n}=\alpha_n+i\beta_n,\tag{D}$$

где m_n — некоторая подпоследовательность натуральных чисел. Если выполнено условие (2.7)

$$|\lambda_1|<|\lambda_2|<\ldots<|\lambda_n|\to\infty,\tag{2.7}$$

то определяем функции $\vartheta(t)$ и $F(t)$ равенствами (2.8), (2,9) и

$$m(t)=\begin{cases} m_1, & 0\leqslant t<|\lambda_1|,\\ m_n+\dfrac{m_{n+1}-m_n}{|\lambda_{n+1}|-|\lambda_n|}(t-|\lambda_n|), & |\lambda_n|\leqslant t<|\lambda_{n+1}|.\end{cases} \tag{2.41}$$

Пусть $z^{m(t)}=e^{m(t)\ln z}$ и ряд (D) сходится в точке $z\neq 0$.

Тогда выполняется равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z}=\int_0^{\infty} z^{m(t)}\exp\left[-te^{i\vartheta(t)}z\right]dF(t). \tag{2.42}$$

Аналогично, если показатели $\lambda_n=\alpha_n+i\beta_n$ удовлетворяют условию (2.1)

$$\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n\to\infty, \tag{2.1}$$

то, определив функции $\beta(t)$, $\vartheta(t)$ и $F(t)$ равенствами (2.2), (2.3), (2.4) и

$$m(t)=\begin{cases} m_1 & 0\leqslant t<\alpha_1\\ m_n+\dfrac{m_{n+1}-m_n}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}(t-\alpha_n), & \alpha_n\leqslant t<\alpha_{n+1},\end{cases} \tag{2.43}$$

получаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z}=\int_0^{\infty} z^{m(t)}\exp\left[-\sqrt{t^2+\beta^2(t)}\,e^{i\vartheta(t)}z\right]dF(t),$$

если ряд (D) сходится в точке $z\neq 0$.

Допустим теперь, что показатели λ_n удовлетворяют условиям (2.1) и (2.18)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|\vartheta_n|=\vartheta<\frac{\pi}{2};\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}|\vartheta_n|=\alpha. \tag{2.18}$$

Условия (1.33) и (1.34) для $m(t)$ $\Big($см. (2.41)$\Big)$ в этом случае будут такими

$$\sigma_3=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln|m'(t)|}{t}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\left|\dfrac{m_{n+1}-m_n}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}\right|}{\alpha_n}<\infty \tag{2.44}$$

и

$$M=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{m(t)}{t}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{m_n}{\alpha_n}<\infty, \tag{2.45}$$

$$\mathrm{m}=\underline{\lim_{t\to\infty}}\frac{m(t)}{t}=\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{m_n}{\alpha_n}.$$

Положим $\Big($см. (2.28), (2.29) и (2.44)$\Big)$

$$\sigma=\max(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3). \tag{2.46}$$

Если ряд (D) расходится в фиксированной точке $z_0=x_0+iy_0\neq 0$, то допустим, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k z_0^{m_k}e^{-\lambda_k z_0}\right|}{\alpha_n}=r_1<\infty \tag{2.47}$$

и вычислим

$$\rho_1=\max(r_1,\sigma+r_1). \tag{2.48}$$

Если же ряд (D) сходится в точке z_0, то вычислим

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z_0^{m_k} e^{-\lambda_k z_0}\right|}{\alpha_n} = r_2,\ r_2 \leqslant 0, \tag{2.49}$$

и положим

$$\rho_2 = \max(r_2,\ \sigma + r_2).$$

Очевидно, и в этом случае $\left(\text{см. } (1.2)\right)$

$$a = \frac{1}{\cos\alpha};\ b = \frac{1}{\cos\vartheta}.$$

Теперь можем сформулировать, как следствие теоремы 3, теорему.

Теорема 8. *Пусть выполнены условия* (2.1), (2.18), (2.28), (2.44) *и* (2.45). *Если ряд* (D) *не сходится в точке* $z_0 = x_0 + iy_0 \neq 0$, *но выполнено условие* (2.47), *то этот ряд сходится в области* $U_1(z_0)$, *точки* $z = x + iy$ *которой при любом* φ *из промежутков* $[-\vartheta, -\alpha]$ *и* $[\alpha, \vartheta]$ *удовлетворяют неравенству*

$$U_1(z_0): (x-x_0)\cos\varphi - (y-y_0)\sin\varphi > \begin{cases} \left(\rho_1 + M\ln\left|\frac{z}{z_0}\right|\right)\cos\alpha, & |z| > |z_0|, \\ \rho_1\cos\alpha + m\cos\vartheta\ln\left|\frac{z}{z_0}\right|, & |z| < |z_0|. \end{cases}$$

Если ряд (D) *сходится в точке* $z_0 = x_0 + iy_0 \neq 0$, *то он сходится в области* $U_2^{(+)}(z_0)$ *в случае, когда* $\rho_2 \geqslant 0$, *и в области* $U_2^{(-)}(z_0)$ *в случае, когда* $\rho_2 < 0$, *точки* $z = x + iy$ *которых при любом* φ *из* $[-\vartheta, -\alpha]$ *и* $[\alpha, \vartheta]$ *удовлетворяют неравенству*

$$U_2^{(+)}(z_0): (x-x_0)\cos\varphi - (y-y_0)\sin\varphi > \begin{cases} \left(\rho_2 + M\ln\left|\frac{z}{z_0}\right|\right)\cos\alpha, & |z| > |z_0|, \\ \rho_2\cos\alpha + m\cos\vartheta\ln\left|\frac{z}{z_0}\right|, & |z| < |z_0|; \end{cases}$$

$$U_2^{(-)}(z_0): (x-x_0)\cos\varphi - (y-y_0)\sin\varphi > \begin{cases} \rho_2\cos\vartheta + M\cos\alpha\cdot\ln\left|\frac{z}{z_0}\right|, & |z| > |z_0|, \\ \left(\rho_2 + m\ln\left|\frac{z}{z_0}\right|\right)\cos\vartheta, & |z| < |z_0|. \end{cases}$$

Сходимость является равномерной во всяком замкнутом и ограниченном множестве, содержащемся в $U_1(z_0)$ $(U_2^{(+)}(z_0)$, *если* $\rho_2 \geqslant 0$, *и* $U_2^{(-)}(z_0)$, *если* $\rho_2 < 0)$.

Пусть теперь показатели λ_n ряда (D) удовлетворяют условию (2.7). Тогда выполняется равенство (2.42), если ряд (D) сходится в точке $z \neq 0$. Пусть далее функция $m(t)$, определенная равенством (2.41), удовлетворяет условиям

$$\sigma_3 = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln|m'(t)|}{t} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\left|\frac{m_{n+1}-m_n}{|\lambda_{n+1}|-|\lambda_n|}\right|}{|\lambda_n|} < \infty, \tag{2.50}$$

$$M = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{m(t)}{t} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{m_n}{|\lambda_n|} < \infty,$$

$$m = \underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{m(t)}{t} = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{m_n}{|\lambda_n|}. \tag{2.51}$$

Если выполнены условия (2.19) и (2.50), тогда положим

$$\sigma = \max(\sigma_2, \sigma_3).$$

Далее, если ряд (D) расходится в точке $z_0=x_0+iy\neq 0$, то допустим, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\left|\sum_{k=1}^{n} a_k z_0^{m_k} e^{-\lambda_k z_0}\right|}{|\lambda_n|}=r_1<\infty$$

и положим

$$\rho_1=\max(r_1,\ \sigma+r_1).$$

Если ряд (D) сходится в точке $z_0=x_0+iy_0$, то вычислим

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z_0^{m_k} e^{-\lambda_k z_0}\right|}{|\lambda_n|}=r_2,\ r_2\leqslant 0, \tag{2.52}$$

и положим

$$\rho_2=\max(r_2,\ \sigma+r_2). \tag{2.53}$$

Теперь нетрудно убедиться, что для ряда (D) верна теорема типа Абеля, которая формулируется как и теорема 8 $(a=b=1)$.

Следствие 6. Если

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{m_n}{|\lambda_n|}=0,$$

то есть, если ряд Тейлора – Дирихле „близок" к ряду Дирихле, то структура областей $U_1(z_0)$ и $U_2(z_0)$ будет такой же, как и в случае ряда Дирихле.

Вильнюсский Государственный университет им. В. Капсукаса

Псотулио в редакцию 15.III.1968

Литература

1. Г. Л. Лунц, О некоторых обобщениях рядов Дирихле, Мат. сб., т. 10(52), № 1—2, 1942, 33—49.
2. А. А. Мишкелявичус, Об области сходимости ряда Дирихле, Лит. матем. сб., т. V, № 1 (1965), 117—126.

KAI KURIŲ LAPLASO – STILTIESO TIPO INTEGRALŲ KONVERGAVIMO KLAUSIMU

Š. STRELICAS, A. MIŠKELEVIČIUS

(*Reziumė*)

Šiame straipsnyje įrodomos Abelio teoremos Laplaso – Stiltieso tipo integralams (A) ir (B). Atskiru atveju tokios teoremos gaunamos Dirichle ir Teiloro – Dirichle eilutėms (C) ir (D).

SUR LA CONVERGENCE DES QUELQUES INTÉGRALES DU TYPE LAPLACE – STILTJES

CH. STRELITS, A. MIŠKELEVIČIUS

(*Résumé*)

On démontre dans cet article les théorèmes d'Abel pour les intégrales du type Laplace – Stiltjes (A) et (B). Dans un cas particulier on obtient tels théorèmes pour les séries Dirichlet (C) et Taylor – Dirichlet (D).