IX LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

1969

УДК – 517.55

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОБРАЗУЮЩИХ В АЛГЕБРЕ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

А. А. ПРЕОБРАЖЕНСКИЙ

Пусть на некотором компакте M, лежащем на комплексной плоскости C заданы n функций $f_1, \ldots, f_n$ $f_i \in C^\infty$. Обозначим $[f_1, \ldots, f_n]_{C^k}$ банахову алгебру с нормой пространства C^k образующими которой являются функции $f_1, \ldots$ $\ldots, f_n$. В дальнейшем всюду предполагается, что $[f_1, \ldots, f_n]_{C^k} = C^k(M)$. Нас интересуют достаточные условия того, чтобы система образующих $f_1, \ldots, f_n$ была устойчива, т.е. того, чтобы функции достаточно близкие к f_i (в смысле, определяемом отдельно в каждом случае), также были образующими соответствующей алгебры.

Для конкретных образующих на круге утверждение такого рода доказано Вермером [1].

Мы воспользуемся усиленной теоремой Вермера [2]

Теорема 1. *Пусть на круге D заданы функции*

$$f_1 = z + R_1(z) \quad q_1 |z-a| \geqslant |R_1(z) - R_1(a)| \quad z,\ a \in D,\ z \neq a,$$

$$f_2 = \bar{z} + R_1(z) \quad q_2 |z-a| \geqslant |R_2(z) - R_2(a)| \quad q_1 + q_2 < 1,\ q_1 q_2 \geqslant 0.$$

Тогда $[f_1, f_2]_C = C(D)$.

Теорема 2. *Пусть на круге D заданы функции $f_1, \ldots, f_n$, причем $[f_1, \ldots$ $\ldots, f_n]_{C^1} = C_1(D)$. Тогда найдется $\varepsilon > 0$, такое, что если $\|\varphi_1 - f_i\|_{C^1} < \varepsilon$ $i = 1, 2, \ldots, n$, то $[\varphi_1, \ldots, \varphi_n]_C = C(D)$.*

Доказательство. Поскольку замыкание в C^1 многочленов от $f_1, \ldots, f_n$ есть все C^1, найдутся многочлены Q_1 и Q_2 такие, что $\| Q_1(f_1 \ldots f_n) - z \|_{C^1} < \frac{1}{4}$ и $\| Q_2 | f_1 \ldots f_n] - \bar{z} \|_{C^1} < \frac{1}{4}$. Затем, найдутся такие окрестности функций f_1 в C^1 что, если $\varphi_1 \in u_i$

$$\| Q_1(f) - Q_1(\varphi) \|_{C^1} < \frac{1}{4} \qquad \| Q_2(f) - Q_2(\varphi) \|_{C^1} < \frac{1}{4}.$$

Тогда $\| Q_1(\varphi) - z \|_{C^1} < \frac{1}{2}$ $\| Q_2(\varphi) - \bar{z} \| < \frac{1}{2}$ и из теоремы 1 следует, что $[Q_1(\varphi), Q_2(\varphi)]_C = C(D)$ и, тем более $[\varphi_1 \ldots \varphi_n]_C = C(D)$.

Следствие. *Пусть на окружности L заданы функции $f_1 \ldots f_n$, причем $f_1 \ldots f_n]_{C^1} = C^1(L)$. Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что если $\|\varphi_i - f_i\|_{C^1} < \varepsilon$ $i = 1, 2, \ldots, n$,* то $[\varphi_i, \ldots \varphi_n]_C = C(L)$.

Доказательство. Действительно, рассуждения теоремы 2 показывают, что найдутся ε, Q_1, Q_2, такие, что

$$\| Q_1(\varphi) - z \|_{C^1} < \frac{1}{2} \qquad \| Q_2(\varphi) - \bar{z} \|_{C^1} < \frac{1}{2}, \text{ если } \| \varphi_i - f_i \|_{C^1} < \varepsilon.$$

Рассмотрим функции $\tilde{Q}_1$ и $\tilde{Q}_2$ на круге, которые в 0 равны 0 и получены из функций $Q_1(\varphi)$ и $Q_2(\varphi)$ линейным продолжением по радиусам.

Легко видеть, что, несмотря на то, что $\tilde{Q}_1$ и $\tilde{Q}_2$, возможно, недифференцируемы в 0, они удовлетворяют условиям теоремы 1. Отсюда получается требуемое утверждение.

Теорема 3. *Пусть на окружности L заданы функции f_1, f_2, причем $[f_1, f_2]_C = C(L)$ и f_1 разделяют L. Тогда найдется $\varepsilon>0$ такое, что если $\|f_2-\varphi_2\|_C<\varepsilon$, то $[f_1\varphi_2]_C=C(L)$.*

Доказательство. Отобразим окружность L с помощью функции f_1 в плоскость C. Это отображение есть гомеоморфизм и индуцирует изоморфизм алгебр $C(L)$ и $C\left(f_1(L)\right)$, при котором функции f_1 соответствует z^*. Фукции f_2 соответствует функция f_2^*, не являющаяся граничным значением функции, аналитической внутри области, ограниченной $f_1(L)$. Следовательно, она разлагается в сумму функций $\tilde{f}_2^*$ и $\tilde{\tilde{f}}_2^*$, где $\tilde{f}_2^*\in H_2$, $\tilde{\tilde{f}}_2^*\in \bar{H}_2$ по мере ds. Выберем $\varepsilon<\frac{\|\tilde{\tilde{f}}_2^*\|_{L_2}}{\mu(s)}$, где $\mu(s)$ мера кривой $f_1(L)$. Тогда $\|f_2^*-\varphi_2^*\|_{L_2}<\|f_2^*\|_{L_2}$ и φ_2^* не может быть граничным значением функции, аналитической внутри $f_1(L)$.

Из теоремы Вермера [3] о максимальности алгебры A граничных значений аналитических функций следует утверждение теоремы.

Можно также доказать, что если f_1 разделяет окружность L и $\frac{\partial f_1}{\partial \Theta}\neq 0$, $[f_1, f_2]_{C^1}=C'(L)$, то для достаточно малого $\varepsilon>0$ $[\varphi_1, \varphi_2]_C=C(L)$, если $\|\varphi_1-f_1\|_{C_1}<\varepsilon$, $\|\varphi_2-f_2\|_C<\varepsilon$.

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия того, что некоторые функции $f_1, \ldots, f_n\in C^\infty$ являются образующими алгебры C^1 на окружности.

Теорема 4. *Пусть функции $f_1, \ldots, f_n\in C^\infty$ осуществляют дифференцируемое вложение окружности L в пространство C_n и образ окружности L полиномиально выпукл. Тогда $[f_1 \ldots f_n]_{C^1}=C^1(L)$.*

Доказательство. Мы используем метод доказательства, изложенный в статье Уэлша [4], приспособив его для наших целей.

Во-первых, можно доказать, что найдется сильно плюрисубгармоническая функция φ, определенная в окрестности U образа окружности $f(L)$, такая, что $f(L)=[\varphi=0]$ и grad $\varphi\neq 0$ [5].

Затем, можно доказать, что если $g\in C^\infty(L)$, то найдется $u\in C^\infty(U)$, такая, что $u|_{f(L)}=g$ и $\alpha=\bar{\partial}u$ обращается в 0 со всеми производными на $f(L)$. При достаточно малом $\varepsilon>0$ окрестность $f(L)$, заданная неравенством $E_\varepsilon=[\varphi<\varepsilon]$ является строго псевдовыпуклым множеством в C_n и из решения $\bar{\partial}$ — проблемы Неймана [6] следует, что найдется функция v_ε, такая, что $\bar{\partial}v_\varepsilon=\alpha$ и $\|v_\varepsilon\|_s\leqslant C_{s\varepsilon}\|\alpha\|_{s+1}$, где $\|\ \|_s$ означает норму Соболева на E_ε, а константы $C_{s\varepsilon}$ зависят от s и ε.

Можно показать, что для фиксированного s

$$C_{s\varepsilon}=0(\varepsilon^{-\nu})$$

для некоторого положительного ν. Функция $h_\varepsilon=u-v_\varepsilon$ является голоморфной в E_ε так, как $\bar{\partial}u=\bar{\partial}v_\varepsilon=\alpha$.

Итак, мы имеем, что $h_\varepsilon-f=-v_\varepsilon$ на $f(L)$, поэтому для доказательства теоремы необходимо доказать, что $\|v_\varepsilon\|_{C^1}$ как угодно мала, при достаточно малом ε.

Поскольку grad $\varphi \neq 0$ и многообразие компактно, для достаточно малого ε_0 найдется постоянная m такая, что шар радиусом $\frac{\varepsilon}{m}$ и центром на многообразии лежит внутри E_ε.

Пусть s – длина кривой. Тогда ее можно покрыть $\frac{2sm}{\varepsilon}$ шариками. Для каждого шара верно неравенство:

$$\| v_\varepsilon \|_{C_1} \leqslant C\varepsilon^{-k} \| v_\varepsilon \|_s \qquad (k > 0,\ C \text{ не зависит от } \varepsilon),$$

которое можно получить из соображений подобия.

Поэтому:

$$\| u \|_{C^1} \leqslant 2Cs\varepsilon^{-k-1} \| u \|_{s\,(E_\varepsilon)},$$

константа в этом неравенстве растет не более чем степенным образом. Отсюда следует, что функции аналитические в некоторой окрестности нашей кривой плотны в пространстве $C^1\big(f(L)\big)$. А, поскольку $f(L)$ полиномиально выпукло, $[f_1, \ldots, f_n]_{C^1} = C^1(L)$.

Из теоремы 4 и следствия теоремы 2 вытекает устойчивость образующих на окружности.

Воронеж

Поступило в редакцию
4.IX.1968

Литература

1. I. Wermer, Math. Annalen, **155**, 331 (1964).
2. А. Преображенский, О некоторых образующих алгебры непрерывных функций на круге (в печати).
3. К. Гофман, Банаховы пространства аналитических функций.
4. R. Nirenberg, R. O. Wells, Holomorfic approximation on real submanifold (в печати).
5. R. O. Wells, Holomorfic approximation on real-analytic submanifolds of a complex manifold, Proc. A. M. S., 4 (1967).
6. J. Kohn, Harmonic integrals on strongly pseudo-complex manifolds, Ann. of Math., **78**, 79 (1963).

APIE SUDAROMŲJŲ STABILUMĄ GLODŽIŲ FUNKCIJŲ ALGEBROJE

A. PREOBRAŽENSKIS

(*Reziumė*)

Straipsnyje nagrinėjamos tam tikrų algebros C sudaromųjų sistemų stabilumas, apibrėžtų ant klasės C^∞ daugdaros be pasienio.

ON STABILITY OF GENERATING IN ALGEBRA SMOOTH FUNCTIONS

A. PREOBRAGENSKY

(*Summary*)

This paper is devoted to investigation of stability of some generating systems in algebra C on C^∞ – manifold without a boundary.