IX LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1

1969

УДК–517.521.8

ОБОБЩЕНИЕ КОМПОЗИЦИОННОЙ ТЕОРЕМЫ ГУРВИЦА НА ОБЩИЕ СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ С КОМПЛЕКСНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

В. П. ПОПОВ

Если заданы две функции

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n-1} \quad \text{и} \quad g(z)=\sum_{m=0}^{\infty} b_m z^{-m-1},$$

причем каждый из рядов имеет непустую область сходимости, то теорема Гурвица указывает положение возможных особых точек функции

$$h(z)=\sum_{n,\,m=0}^{\infty} C_{m+n}^{n}\, a_n b_m z^{-n-m-1}$$

в зависимости от особых точек функций $f(z)$ и $g(z)$, а именно: функция $h(z)$ аналитически продолжается из области сходимости своего ряда вдоль всякой непрерывной кривой, точки которой не могут быть представлены в виде суммы z_0+z_1, где z_0 – некоторая особая точка функции $f(z)$, а z_1 – особая точка функции $g(z)$ (к особым точкам следует, в случае неоднозначности функций $f(z)$ и $g(z)$, отнести также точки соответствующих разрезов).

Вопросам обобщения этой теоремы на общие степенные ряды с произвольными действительными показателями посвящены работы Мандельбройта [1], [2] и Эгглестона [3].

В статье рассматривается дальнейшее обобщение теоремы Гурвица на общие степенные ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-\lambda_n-1}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} b_m z^{-\mu_m-1},$$

когда последовательности показателей $\{\lambda_n\}$, $\{\mu_m\}$ состоят из комплексных чисел

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty, \quad \lim_{m\to\infty}\mu_m=\infty, \quad |\arg\lambda_n|\leqslant\frac{\pi}{2}-\Delta, \quad |\arg\mu_m|\leqslant\frac{\pi}{2}-\Delta \ (\Delta>0).$$

При доказательстве основного результата используется метод, примененный Эгглестоном. Полученный результат содержит результат Эгглестона, но доказанная теорема содержит и некоторые сведения о римановой поверхности для композиционной функции $h(z)$.

§ 1. Основное интегральное представление

В плоскости u рассмотрим произвольную точку z вне круга $|u| \leqslant R_1 + R_2$, где R_1 и R_2 — два фиксированных числа. Тогда на прямой, соединяющей точку z с началом, существует точка $q(z)$, лежащая вне кругов $|u| \leqslant R_1$ и $|u-z| \leqslant R_2$. Пусть $L(z)$ — прямая, проходящая через точку $q(z)$ вне указанных кругов. Заметим, что в дальнейшем конечный отрезок прямой $L(z)$ мы будем деформировать, но так, чтобы полученная бесконечная кривая проходила через точку $q(z)$ вне тех же кругов и не имела самопересечений.

Лемма 1. *Для любых α и β с* $\mathrm{Re}\,\alpha < 0$, $\mathrm{Re}\,\beta < 0$ *имеет место основное интегральное представление*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L(z)} u^{\alpha-1}(z-u)^{\beta-1}\,du = \frac{\Gamma(1-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)}\, z^{\alpha+\beta-1}, \tag{1}$$

где $L(z)$ контур, описанный выше $\left(\arg u = \arg z,\ \arg(z-u) = \arg z,\right.$ *когда точка u совпадает с точкой* $\left.q(z)\right)$.

Доказательство. Из предыдущего следует, что существует окружность $S(z)$ с центром в точке $q(z)$ радиуса R, содержащая внутри себя вышеназванные круги. Пусть прямая $L(z)$ встречает окружность $S(z)$ в точках $s(z)$ и $t(z)$. Система обозначений такова, что для полукруга, содержащего точку z, диаметр ts и полуокружность составляют контур, описываемый в направлении против часовой стрелки. Пусть точка u начинает движение из точки $q(z)$ и пробегает отрезок прямой $L(z)$ до точки $s(z)$, далее описывает один раз окружность $S(z)$ против часовой стрелки, следует затем вдоль отрезка прямой $L(z)$ от точки $s(z)$ до $t(z)$, снова пробегает окружность $S(z)$ по часовой стрелке и возвращается в точку $q(z)$ вдоль отрезка прямой $L(z)$ от точки $t(z)$. Обозначим контур, описываемый точкой u через $C(z)$. Пусть $C'(z)$ — контур, описываемый точкой $t = \frac{u}{z}$, когда точка u пробегает контур $C(z)$. Тогда имеет место равенство (интеграл в левой части называется интегралом Похгаммера [4]):

$$e^{-\pi i(\alpha+\beta)} \int\limits_{C'(z)} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt = \frac{-4\pi^2}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(\alpha+\beta)}$$

для всех комплексных α и β (ветвь подынтегральной функции оговорена в условии леммы). Подставляя $zt = u$, имеем

$$e^{-\pi i(\alpha+\beta)} \int\limits_{C(z)} u^{\alpha-1}(z-u)^{\beta-1}\,du = \frac{-4\pi^2 z^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(\alpha+\beta)}. \tag{2}$$

Теперь предположим, что $\mathrm{Re}\,\alpha < 0$, $\mathrm{Re}\,\beta < 0$. Очевидно, интеграл в левой части соотношения (2) не изменится, если контур $C(z)$ с окружностью $S(z)$ радиуса R заменить контуром с окружностью большего радиуса. Этот интеграл разобьем на два соответственно по круговой части $S(z)$ радиуса R и по отрезку прямой $L(z)$. Так как $\mathrm{Re}\,\alpha < 0$, $\mathrm{Re}\,\beta < 0$, то интеграл по круговой части стремится к нулю, когда $R \to \infty$. Остается

$$[e^{\pi i(\alpha+\beta)} - e^{-\pi i(\alpha-\beta)}] \int\limits_{L(z)} u^{\alpha-1}(z-u)^{\beta-1}\,du = \frac{-4\pi^2 z^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(\alpha+\beta)},$$

где точка u описывает контур $L(z)$ так, что $\arg u$ возрастает. И наконец, используя соотношение $\Gamma(a)\,\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin \pi a}$, получим интегральное представление (1).

Замечание: легко видеть, что предыдущее справедливо и для случая, когда $\operatorname{Re}(\alpha+\beta)<0$.

§ 2. Лемма об аналитической продолжимости

Под символом $A+\varepsilon$, где A — некоторое множество точек, а ε — круг радиуса ε с центром в начале координат, будем понимать множество всевозможных сумм точек, принадлежащих рассматриваемым множествам.

Определение 1. Множество точек $A(z)$ считается непрерывным по z, если для любого $\varepsilon>0$ и всякого z' найдется такое δ, что при

$$|z-z'|<\delta \quad A(z)\subset A(z')+\varepsilon.$$

Определение 2. Пусть a — правильная точка функции $f(z)$. Построим множество A_f следующим образом: во-первых, отнесем к A_f любую точку b, для которой существует хотя бы один путь, идущий из a в b, вдоль которого $f(z)$ можно аналитически продолжить в точки сколь угодно близкие к b, но нельзя продолжить в саму точку b; во-вторых, отнесем к A_f все те точки, которые нельзя соединить с точкой a непрерывной кривой, не содержащей точек типа точек b.

Лемма 2. *Пусть $F(z, u)$ для каждого z из некоторой области D есть аналитическая функция от u и для каждого рассматриваемого ниже значения u — аналитическая функция от z в D. Пусть при фиксированном $z\in D$ множество $A_F(z)$ функции $F(z, u)$ относительно некоторой точки u_0 ограничено, а $J(z)$ — неограниченный контур, причем такой, что его часть $J(z, R)$, лежащая вне окружности $|z|=R$, фиксирована для всех z и*

$$\int\limits_{J(z,R)} F(z, u)\,du=o(1) \quad \text{при} \quad R\to\infty$$

равномерно в D. Если для каждой точки $z\in\gamma$, γ — непрерывная кривая внутри области D, контур $J(z)$ не пересекается с множеством $A_F(z)$ и оба множества $J(z)$ и $A_F(z)$ непрерывны по z, то $\int\limits_{J(z)} F(z, u)\,du$ регулярен для всех точек кривой γ.

Доказательство. Рассмотрим некоторую точку $z'\in\gamma$. Множества $A_F(z')$ и $J(z')$ по условию леммы замкнуты и не имеют общих точек. Обозначим расстояние между ними через $\rho(z')$. Из непрерывности множеств $A_F(z')$ и $J(z')$ следует существование такого $\delta(z')$, что для всех

$$|z-z'|<\delta(z') \quad A_F(z)\subset A_F(z')+\frac{1}{3}\rho(z'), \quad J(z)\subset J(z')+\frac{1}{3}\rho(z').$$

Дугу кривой γ, содержащую точку z' и принадлежащую множеству точек z из $|z-z'|<\delta(z')$, обозначим через $I(z')$. По теореме Гейне-Бореля можно найти конечную последовательность точек $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ на кривой γ таких, что $\gamma \subset \bigcup_{j=0}^{n} I(\alpha_j)$. Предполагаем, что ни одна дуга $I(\alpha_j)$ не содержится в другой, так как в противном случае можно рассматривать только большую дугу. Пусть точки последовательности $\{\alpha_j\}$ расположены в порядке возрастания индекса j на кривой γ. Для каждого j выберем точку $\beta_j \in I(\alpha_j) \cap I(\alpha_{j+1})$, $\beta_j \neq \alpha_j$, $\beta_j \neq \alpha_{j+1}$. Покажем, что функция $\int\limits_{J(z)} F(z, u)\,du$ — аналитическая для $z \in I(\alpha_j)$, где j — любое фиксированное. Интеграл от функции $F(z, u)$ по любой конечной части контура $J(z, R)$ есть функция аналитическая для всех $z \in \gamma$ (контур $J(z, R)$ фиксирован). Кроме того, $\int\limits_{J(z, R)} F(z, u)\,du = o(1)$ при $R \to \infty$ равномерно относительно $z \in \gamma$. Следовательно, $\int\limits_{J(z, R)} F(z, u)\,du$ — функция аналитическая при $z \in \gamma$, а потому и при $z \in I(\alpha_j)$. Если $\bar{J}(z)$ — часть контура $J(z)$, заключенная внутри круга $|z| \leqslant R$, то функция $\int\limits_{\bar{J}(z)} F(z, u)\,du$ аналитическая для $z \in I(\alpha_j)$, так как множества $A_F(z)$ и $J(z)$ для $z \in I(\alpha_j)$ не пересекаются. Кроме того по теореме Коши

$$\int\limits_{\bar{J}(\alpha_j)} F(z, u)\,du = \int\limits_{\bar{J}(z)} F(z, u)\,du \qquad \left(z \in I(\alpha_j)\right).$$

Окончательно,

$$\int\limits_{J(\alpha_j)} F(z, u)\,du = \int\limits_{\bar{J}(\alpha_j)} F(z, u)\,du + \int\limits_{J(z, R)} F(z, u)\,du$$

есть аналитическая функция от z, $z \in I(\alpha_j)$.

Теперь покажем, что значения функций

$$\int\limits_{J(\alpha_j)} F(z, u)\,du \quad \text{и} \quad \int\limits_{J(\alpha_{j+1})} F(z, u)\,du$$

совпадают в точке

$$\beta_j \left(\beta_j \in I(\alpha_j) \cap I(\alpha_{j-1})\right).$$

Точке β_j соответствует множество $A_F(\beta_j)$, которое не пересекается ни с $J(\alpha_j)$, ни с $J(\alpha_{j+1})$ $\left(\text{наименьшее расстояние между ними есть } \min\left[\frac{1}{3}\rho(\alpha_j); \frac{1}{3}\rho(\alpha_{j+1})\right]\right)$. Применяя к функции $F(\beta_j, u)$ и контуру, составленному из $\bar{J}(\alpha_j)$ и $\bar{J}(\alpha_{j+1})$ теорему Коши, получаем требуемое. Но точка β_j произвольная. Тем самым доказано существование аналитического продолжения функции

$$\int\limits_{J(z)} F(z, u)\,du \quad \text{из} \quad I(\alpha_j) \quad \text{в} \quad I(\alpha_{j+1}).$$

Но j — любое, это и доказывает лемму.

§ 3. Об области абсолютной сходимости общего степенного ряда с комплексными показателями

Рассмотрим функцию $\Phi(z)$, представленную суммой общего степенного ряда $\Phi(z)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{\beta_n}$. Определим однозначную ветвь функции $\Phi(z)$, обозначим ее через $\Phi(z;\ \varphi_0,\ k)$, выбрав для определения $z^{-\beta_n}$ значение $\arg z \in I(\varphi_0,\ k)$, где $I(\varphi_0,\ k)\equiv[\varphi_0+(2k-1)\pi,\ \varphi_0+(2k-1)\pi]$, φ_0 и k – фиксированы.

Покажем, как можно для суммы ряда $\Phi(z;\ \varphi_0,\ k)$ определить на соответствующем листе область абсолютной сходимости, обозначим ее через $G_\Phi(\varphi_0,\ k)$ (полагаем, что такая область не пустая).

Пусть D – область абсолютной сходимости соответствующего ряда Дирихле, т.е. ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\beta_n w}$, способ ее отыскания известен [5]. Доказано, что для случая, когда $|\arg \beta_n|\leqslant\frac{\pi}{2}-\Delta$ $(\Delta>0)$ область D (если она не пуста) содержит некоторый угол (раствора 2Δ), симметричный относительно действительной оси. Горизонтальная полоса в w – плоскости шириной 2π преобразованием $z=e^w$ отображается на z – плоскость с разрезом вдоль луча, исходящего из начала. К примеру, полоса $\operatorname{Im} w\in I(\varphi_0,\ k)$ отображается на лист $\arg z\in I(\varphi_0,\ k)$ с разрезом вдоль луча $\arg z=\varphi_0+(2k-1)\pi$. Отсюда следует, что часть границы области D, принадлежащая этой полосе, отобразится в кривую типа логарифмической спирали, обозначим ее через $L_\Phi(\varphi_0,\ k)$. Пусть ее уравнение в полярных координатах будет $\rho_\Phi=\rho_\Phi(t)$, где $t\in I(\varphi_0,\ k)$.

Итак, область $G_\Phi(\varphi_0,\ k)$ для суммы ряда $\Phi(z;\ \varphi_0,\ k)$ есть область вне кривой $L_\Phi(\varphi_0,\ k)$ и отрезка луча $\arg z=\varphi_0+(2k-1)\pi$, соединяющего точки кривой $L_\Phi(\varphi_0,\ k)$ при $t_1=\varphi_0+(2k-1)\pi$ и $t_2=\varphi_0+(2k+1)\pi$. Легко видеть, что сумма общего степенного ряда для $\Phi(z;\ \varphi_0,\ k)$ есть однозначная аналитическая функция в области $G_\Phi(\varphi_0,\ k)$.

Замечание 1. Для $\varphi_1\neq\varphi_2$, $|\varphi_2-\varphi_1|<\pi$ кривые $L_\Phi(\varphi_1,\ k)$ и $L_\Phi(\varphi_2,\ k)$ совпадают в точках, соответствующих $\arg z=t\in I(\varphi_1,\ k)\cap I(\varphi_2,\ k)$. Тогда $\Phi(z;\varphi_1,\ k)\equiv$ $\equiv\Phi(z;\ \varphi_2,\ k)$ на пересечении областей $G_\Phi(\varphi_1,\ k)$ и $G_\Phi(\varphi_2,\ k)$.

Замечание 2. Легко видеть из предыдущего, что кривая $L_\Phi(\varphi)$, заданная полярным уравнением $\rho_\Phi=\rho_\Phi(t)$, где $-\infty<t<\infty$, расположена на логарифмической римановой поверхности.

§ 4. Основная теорема

Введем определение ассоциированного множества для однозначной ветви функции, заданной общим степенным рядом, относительно точки, принадлежащей области абсолютной сходимости.

Выберем в плоскости z точку регулярности функции $f(z;\varphi_0,\ k)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-\lambda_n-1}$, ($\varphi_0$ и k фиксированы) скажем точку $a\in G_f(\varphi_0,\ k)$ (здесь под $G_f(\varphi_0,\ k)$ понимается проекция $G_f(\varphi_0,\ k)$ на плоскость z). Пусть $CG_f(\varphi_0,\ k)$ – замкнутая область, ограниченная дугой $\rho=\rho_f(t)$, $t\in I(\varphi_0,\ k)\equiv[t_1,\ t_2]$ и прямолинейным отрезком, соединяющим точки $(t_1, \rho_f(t_1))$ и $(t_2, \rho_f(t_2))$. Пусть (A) класс кривых, начинающихся в точке a и оканчивающихся в точке $z \in CG_f(\varphi_0, k)$, причем всякая кривая после того, как она пересекла границу области $CG_f(\varphi_0, k)$ из этой области уже не выйдет.

Определение 3. Ассоциированным множеством функции $f(z; \varphi_0, k)$ относительно точки $a \in G_f(\varphi_0, k)$ будем называть множество $A_f(\varphi_0, k)$, построенное так же, как множество A_f (см. определение 2) с тем лишь различием, что кривые, о которых идет речь в определении должны 2 принадлежать классу (A).

Существенным для дальнейшего является ограниченность построенного в соответствии с этим определением ассоциированного множества $A_f(\varphi_0, k)$.

Теорема. *Пусть функции $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$ заданы соответственно рядами*

$$f(z) = \sum_k a_k z^{-\lambda_k - 1}, \quad g(z) = \sum_j b_j z^{-\mu_j - 1},$$

$$h(z) = \sum_{k,j} a_k b_j \frac{\Gamma(\lambda_k + \mu_j + 1)}{\Gamma(\lambda_k + 1)\,\Gamma(\mu_j + 1)} z^{-(\lambda_k + \mu_j + 1)},$$

где суммы первых двух $f(z; \varphi_0, k)$ и $g(z; \varphi_0, k)$ имеют непустые области абсолютной сходимости, соответственно $G_f(\varphi_0, k)$ и $G_g(\varphi_0, k)$ и где $\{\lambda_k\}$, $\{\mu_j\}$ — последовательности комплексных чисел, для которых $|\lambda_k| \uparrow \infty$ при $k \to \infty$, $|\mu_j| \uparrow \infty$ при $j \to \infty$ и

$$|\arg \lambda_k| \leqslant \frac{\pi}{2} - \Delta, \quad |\arg \mu_j| \leqslant \frac{\pi}{2} - \Delta \qquad (\Delta > 0).$$

Тогда ряд для $h(z; \varphi_0, k)$ имеет непустую область абсолютной сходимости, а функцию $h(z; \varphi_0, k)$ можно аналитически продолжить вдоль всякой непрерывной кривой γ из класса (A), точки которой не могут быть представлены в виде $z_1 + z_2$, где $z_1 \in A_f(\varphi_0, k)$ — ассоциированному множеству функции $f(z; \varphi_0, k)$ относительно точки $a_1 \in G_f(\varphi_0, k)$, а $z_2 \in A_g(\varphi_0, k)$ — ассоциированному множеству функции $g(z; \varphi_0, k)$ относительно точки $a_2 \in G_g(\varphi_0, k)$.

Доказательство теоремы разобьем на две части.

Часть 1. Покажем, что для суммы композиционного ряда $h(z; \varphi_0, k)$ существует некоторая непустая область $\tilde{G}_h(\varphi_0, k)$, принадлежащая области абсолютной сходимости композиционного ряда $G_h(\varphi_0, k)$.

Сначала опишем построение области $\tilde{G}_h(\varphi_0, k)$.

В соответствии с принятыми обозначениями в § 3, для произвольного φ $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$ и фиксированного целого k ряды с суммами $f(u; \varphi, k)$ и $g(u; \varphi, k)$ имеют соответственно области абсолютной сходимости $G_f(\varphi, k)$ и $G_g(\varphi, k)$ соответственно с граничными кривыми $L_f(\varphi, k)$ и $L_g(\varphi, k)$, заданными соответственно уравнениями $\rho_f = \rho_f(t)$, $\rho_g = \rho_g(t)$, где $t \in I(\varphi, k)$. Отображая симметрично относительно начала область $G_g(\varphi, k)$ с переносом на вектор $z = |z|\, e^{i(\varphi + 2k\pi)}$ (z — фиксировано), получим область $G_g(z; \varphi, k)$ с граничной кривой $L_g(z; \varphi, k)$. Нетрудно видеть, что область $G_g(z; \varphi, k)$ — область абсолютной сходимости для ряда с суммой $g(z-u;\ -\varphi,\ -k)$, $\arg(z-u)\in I(-\varphi,\ -k)$. Выбор $\arg(z-u)$ таков, что разрезы по лучу $\arg u=\varphi+(2k-1)\pi$ из начала и по лучу $\arg(z-u)=-\varphi+(-2k-1)\pi$ из точки z направлены в противоположные стороны и лежат на прямой, проходящей через начало и точку z.

Пусть точка z такова, что кривые $L_f(\varphi,\ k)$ и $L_g(z;\ \varphi,\ k)$ находятся одна вне другой. Пусть r^* — точная нижняя грань $|z|$ для таких точек z и $z^*=r^*e^{i\arg z^*}$, $\arg z^*=\varphi+2k\pi$. Из предыдущего следует, что при перемещении точки z к точке z^* по лучу $\arg z=\varphi+2k\pi$, $|z|>|z^*|$, кривая $L_g(z;\ \varphi,\ k)$ не может пересечься с лучом $\arg u=\varphi+(2k-1)\pi$ (разрезом в плоскости u).

Тогда для любой точки z на том же луче расстояние между кривыми $L_f(\varphi,\ k)$ и $L_g(z;\ \varphi,\ k)$ не меньше некоторого положительного числа, зависящего от z.

Совершенно очевидно, что $|z^*|\geqslant\rho_f(t)+\rho_g(t)$ при $t=\arg z^*=\varphi+2k\pi\in I(\varphi,\ k)$. Сказанное справедливо для любого $\arg z\in I(\varphi_0,\ k)$, где φ_0 и k — фиксированы.

Итак, каждому значению $\arg z\in I(\varphi_0,\ k)$ соответствует луч $\arg z=\arg z^*$, $|z|>|z^*|$. Множество таких лучей, когда $\arg z$ пробегает интервал $I(\varphi_0,\ k)$ образует звездообразную относительно начала искомую область $\tilde{G}_h(\varphi_0,\ k)$ с границей $\tilde{L}_h(\varphi_0,\ k)$. В частности, для случая положительных последовательностей $\{\lambda_k\}$ и $\{\mu_j\}$ в качестве границ $L_f(\varphi_0,\ k)$ и $L_g(z;\varphi_0,\ k)$ служат окружности определенных радиусов с центрами в начале и в точке z, а область $\tilde{G}_h(\varphi_0,\ k)$ есть внешность круга с центром в начале и радиусом, равным сумме радиусов окружностей $L_f(\varphi_0,\ k)$ и $L_g(z;\ \varphi_0,\ k)$.

Легко понять, что чисто геометрическое построение областей типа $\tilde{G}_h(\varphi_0,\ k)$ можно проводить и для любых интервалов изменения $\arg z$. Полученная область будет связной и расположена на логарифмической римановой поверхности.

Теперь покажем, что область $\tilde{G}_h(\varphi_0,\ k)$ принадлежит области абсолютной сходимости композиционного ряда $G_h(\varphi_0,\ k)$.

Выберем произвольную точку $z=|z|e^{i\psi}\in\tilde{G}_h(\varphi_0,\ k)$, где $\psi=\varphi+2k\pi\in I(\varphi_0,\ k)$. Из способа построения области $\tilde{G}_h(\varphi_0,\ k)$ следует, что существует замкнутая окрестность U точки z, принадлежащая $\tilde{G}_h(\varphi_0,\ k)$ и такая, что для всех точек этой окрестности расстояние между кривыми $L_f(\varphi_0,\ k)$ и $L_g(z;\varphi_0,\ k)$ не меньше некоторого $\delta>0$, зависящего только от U. Если бы такой окрестности не существовало, тогда для выбранного φ кривые $L_f(\varphi,\ k)$ и $L_g(z;\ \varphi,\ k)$ пересекались бы и точка z не принадлежала бы области $\tilde{G}_h(\varphi,\ k)$, а потому и $\tilde{G}_h(\varphi_0,\ k)$.

Следовательно, существует непрерывная спрямляемая кривая $\bar{L}$, которая принадлежит как области равномерной сходимости ряда с суммой $f(u;\ \varphi_0,\ k)$ $(u\in\bar{L})$, так и области равномерной сходимости ряда с суммой $g(z-u;\ -\varphi_0,\ -k)$ для всех $z\in U$, $u\in\bar{L}$. Составим контур из кривой $\bar{L}$ и контура $L(z;\ R)=J(z;\ R)$, о котором говорится в условии леммы 2 и обозначим его через L.

Итак, с одной стороны контур L, по которому перемещается точка u принадлежит областям равномерной сходимости рядов с суммами $f(u;\ \varphi_0,\ k)$ и $g(z-u;\ -\varphi_0,\ -k)$ для всех $z\in U$; с другой стороны, из представления функции $f(u;\ \varphi_0,\ k)$ и $g(z-u;\ -\varphi_0,\ -k)$ общими степенными рядами с показателями $\{\lambda_k+1\}$ и $\{\mu_j+1\}$ следует, что

$$f(u;\ \varphi_0,\ k)\,g(z-u;\ -\varphi_0,-k)|=O(|u|^{-2})$$

равномерно в U, когда $|u|\to\infty$. Для функции $f(u)\ g(z-u)$ выполняется одно из условий леммы 2, а именно, для $z\in U$

$$\int\limits_{J(z;\,R)=L(z;\,R)} f(u)\,g(z-u)\,du=o(1) \quad \text{при} \quad R\to\infty.$$

В силу предыдущего ряд, полученный после умножения рядов с суммами, соответственно равными $f(u;\ \varphi_0,\ k)$ и $p\,(z-u;\ -\varphi_0-k)$, можно почленно интегрировать вдоль контура L, т.е.

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L} f(u)\,g(z-u)\,du=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\sum_{k} a_k\,u^{-\lambda_k-1}\cdot\sum_{j} b_j(z-u)^{-\mu_j-1}\,du=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\sum_{k,j} a_k\,b_j\,u^{-\lambda_k-1}\,(z-u)^{-\mu_j-1}\,du=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k,j} a_k b_j\int\limits_{L} u^{-\lambda_k-1}\,(z-u)^{-\mu_j-1}\,du=$$

$$=\sum_{k,j} a_k b_j\,\frac{\Gamma(\lambda_k+\mu_j+1)}{\Gamma(\lambda_k+1)\,\Gamma(\mu_j+1)}\,z^{-(\lambda_k+\mu_j+1)}=h(z),$$

так как применима формула (1), ввиду того, что $Re\,\lambda_k>0$ $(k=1,2,\ \ldots)$ и $\mathrm{Re}\,\mu_j>0$ $(j=1,2,\ldots)$.

Итак, функция $h\,(z);\ \varphi_0,\ k)$ для всех $z\in U$ представима суммой композиционного ряда. Так как точка z выбрана произвольно в области $\tilde{G}_h\,(\varphi_0,\ k)$, то в этой области ряд для $h\,(z;\ \varphi_0,\ k)$ сходится абсолютно, а внутри и равномерно.

Часть 2. Докажем вторую часть теоремы, т.е. что функцию $h\,(z;\ \varphi_0,\ k)$ можно продолжить вдоль кривой γ. Возможность аналитического продолжения вдоль той части кривой γ, которая принадлежит области $\tilde{G}_n\,(\varphi_0,\ k)$ следует из представимости функции $h\,(z;\ \varphi_0,\ k)$ в этой области суммой общего степенного ряда. Обозначим через $A_g\,(z;\ \varphi_0,\ k)$ ассоциированное множество функций $g\,(z-u;\ -\varphi_0,\ -k)$ относительно точки, для которой $(z-u)\in G_g\,(z;\ \varphi_0,\ k)$, где $z\in\gamma$. Для доказательства теоремы каждой точке $z\in\gamma$ поставим определенным образом в соответствие контур, который отвечал бы условиям леммы 2, а именно, не пересекался бы с объединением множеств $A_f\,(\varphi_0,\ k)$ и $A_g\,(z;\ \varphi_0,\ k)$. Так как кривая γ выбрана вне точек вида z_1+z_2, где $z_1\in A_f\,(\varphi_0,\ k)$, $z_2\in A_g\,(\varphi_0,\ k)$, то когда z пробегает по кривой γ, множества $A_f\,(\varphi_0,\ k)$ и $A_g\,(z;\ \varphi_0,\ k)$ не пересекаются, так как в противном случае нашлась бы точка $z\in\gamma$, для которой $z=\alpha+\beta$, где $\alpha\in A_f\,(\varphi_0,\ k)$, $\beta\in A_g\,(\varphi_0,\ k)$.

Пусть расстояние между точками множеств $A_f\,(\varphi_0,\ k)$ и $A_g\,(z;\ \varphi_0,\ k)$, когда точка z пробегает кривую γ, не меньше $\varepsilon>0$ — некоторого фиксированного числа. Обозначим через $A_g\left(z;\ \frac{1}{3}\,\varepsilon;\ \varphi_0,\ k\right)$ сумму множеств точек $A_g(z;\ \varphi_0,\ k)$ и точек круга $|u|\leqslant\frac{1}{3}\,\varepsilon$, т. е. $A_g\left(z;\ \frac{1}{3}\,\varepsilon;\ \varphi_0,\ k\right)=A_g(z;\ \varphi_0,\ k)+\frac{1}{3}\,\varepsilon$. Это множество состоит из конечного числа компонент, границы которых — спрямляемые кривые. Пусть $Cu(z)$ неограниченная связная компонента дополнения множества $A_g\left(z; \frac{1}{3}\varepsilon; \varphi_0, k\right)$ и $A'_g\left(z; \frac{1}{3}\varepsilon; \varphi_0, k\right)$ – дополнение $Cu(z)$.

Сначала изменим контур $L(z_0)$. Та его часть, которая лежит вне круга $S(z_0)$, остается неизменной. Контур $L(z_0)$ делит круг $S(z_0)$ на две части, одна из которых содержит множество $A_g(z_0; \varphi_0, k)$, а при достаточно малом ε и $A'_g\left(z; \frac{1}{3}\varepsilon; \varphi_0, k\right)$. Обозначим связные компоненты множества $A'_g\left(z; \frac{1}{3}\varepsilon; \varphi_0, k\right)$ через I_i $(i=1, 2, \ldots n)$. На границе T_i рассмотрим точку p_i и через Θ_i обозначим спрямляемую кривую, соединяющую точку p_i с точкой q_i на окружности $S(z_0)$, причем кривая Θ_i не пересекается с другими кривыми Θ_j. Рассмотрим точки на дуге $S(z_0)$ в порядке следования от $s(z_0)$ к $t(z_0)$ в направлении часовой стрелки, т.е. $q_1, q_2, \ldots q_n$.

Ту часть контура $L(z_0)$, которая принадлежит кругу $S(z_0)$, заменим следующим контуром: часть дуги $S(z_0)$ от $s(z_0)$ до q_1 в направлении часовой стрелки, кривая Θ_1 от q_1 до p_1, граница T_1 в направлении часовой стрелки от p_1 до p_1, снова кривая Θ_1 от p_1 до q_1; часть дуги $S(z_0)$ от q_1 до $q_2, \ldots$ часть дуги $S(z_0)$ от q_{i-1} до q_i в направлении часовой стрелки, кривая Θ_i от q_i до p_i, граница T_i по часовой стрелке от p_i до p_i, кривая Θ_i от p_i до q_i; часть дуги $S(z_0)$ от q_i до q_{i+1} по часовой стрелке, ... часть дуги $S(z_0)$ от q_n до $t(z_0)$ по часовой стрелке.

Обозначим этот контур через $N(z_0)$. Если объединение внешней части $L(z_0)$ и контура $N(z_0)$ обозначить через $M(z_0)$, то по теореме Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L(z_0)} f(u)\, g(z-u)\, du = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{M(z_0)} f(u)\, g(z-u)\, du,$$

(причем новый контур $M(z_0)$ не пересекает ассоциированное множество подынтегральной функции).

Теперь определим контур $M(z)$ для любой точки $z\in\gamma$. Рассмотрим произвольную точку p_i, когда точка z пробегает часть кривой γ, пусть точка p_i описывает на плоскости z точно такую же часть и конечное положение этой точки обозначим через $p_i(z)$. Кривую, состоящую из описанной и кривой Θ_i обозначим через $\Theta_i(z)$, а смещенную компоненту T_i через $T_i(z)$.

Тогда контур $N(z)$ определяется, как часть дуги $S(z_0)$ от точки $s(z_0)$ до q_1 по часовой стрелке, дуга $\Theta_1(z)$ от q_1 до $p_1(z)$, граница $T_1(z)$ по часовой стрелке от $p_1(z)$ до $p_1(z)$, дуга $\Theta_1(z)$ от $p_1(z)$ до q_1; часть дуги $S(z_0)$ от точки q_1 до q_2 по часовой стрелке, ... и т.д.

Контур $M(z)$ определяется, как объединение внешней части контура $L(z_0)$ и контура $N(z)$. Обход точки u контура $M(z)$ – в прежнем смысле. Теперь ясно, что все условия леммы выполнены, а следовательно, и доказана теорема.

Замечание. В теореме содержится достаточное условие аналитичности функции $h(z)$ хотя бы на одном листе римановой поверхности, а именно, если при каких-либо φ и k можно $h(z)$ аналитически продолжить, то соответствующая точка является аналитической хотя бы на одном из листов (лист соответствует пути в эту точку). Варьируя φ к k можно построить множество точек, в которых $h(z)$ аналитична хотя бы на одном листе. В частности, если показатели –

положительные числа, этот результат является более общим, чем результат Эгглестона (в этом случае ассоциированное множество содержится в соответствующем множестве, определенном Эгглестоном).

Тамбовский институт
химического машиностроения

Поступило в редакцию
8.V.1968

Литература

1. S. Mandelbrojt, Contribution à la théorie du prolongement analjtiqu des séries de Dirichlet, „Acta math.", 55 (1930), 1–32.
2. S. Mandelbrojt, Dirichlet séries, „Rice Inst. Pamphlet", 31 (1944).
3. H. G. Eggleston, A generaliration of the Hurwitz composition theorem to irregular power series, „Proc. Cambridge Philos. Soc.", 47, 477–482 (1951).
4. Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, Курс современного анализа, М., 1963, ч. II, 44—46.
5. Г. Л. Лунц, О некоторых обобщениях рядов Дирихле, Матем. сб., т. 10(52), № 1—2 (1942), 33—50.

HURVICO KOMPOZICIJOS TEOREMOS APIBENDRINIMAS EILUČIŲ SU KOMPLEKSINIAIS RODIKLIAIS ATVEJU

V. POPOVAS

(*Reziumė*)

Hurvico teorema yra apibendrinama eilutėms

$$f(z)=\sum_k a_k z^{-\lambda_k-1},\quad g(z)=\sum_j b_j z^{-\mu_j-1},$$

$$h(z)=\sum_{k,j} a_k b_j \frac{\Gamma(\lambda_k+\mu_j+1)}{\Gamma(\lambda_k+1)\,\Gamma(\mu_j+1)}\, z^{(\lambda_k+\mu_j+1)}.$$

Tariame, kad

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\lim_{n\to\infty}\mu_n=\infty,\quad |\arg\lambda_n|\leqslant\frac{\pi}{2}-\Delta,\quad |\arg\mu_n|\leqslant\frac{\pi}{2}-\Delta,\quad \Delta>0.$$

UNE EXTENSION DU THÉORÈME DE COMPOSITION DE HURWITZ SUR LES SÉRIES DE PUISSANCES AVEC DES EXPOSANTS COMPLEXES

V. POPOV

(*Résumé*)

Le théorème de Hurwitz est généralisé pour les séries

$$f(z)=\sum_k a_k z^{-\lambda_k-1},\quad g(z)=\sum_j b_j z^{-\mu_j-1}.$$

$$h(z)=\sum_{k,j} a_k b_j \frac{\Gamma(\lambda_k+\mu_j+1)}{\Gamma(\lambda_k+1)\,\Gamma(\mu_j+1)}\, z^{-(\lambda_k+\mu_j+1)},$$

On suppose que

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\lim_{n\to\infty}\mu_n=\infty,\quad |\arg\lambda_n|\leqslant\frac{\pi}{2}-\Delta,\quad |\arg\mu_n|\leqslant\frac{\pi}{2}-\Delta,\quad \Delta>0.$$