1969

УДК – 517.521.8

ОДНА ТЕОРЕМА О ВЛИЯНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ НА СВЕРХСХОДИМОСТЬ РЯДА ДИРИХЛЕ

Л. А. ОСКОЛКОВ

§ 1. Некоторые неравенства

Рассмотрим выражения

$$a^{(n_k)}=\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} a_n=\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k-p_k-1}(\alpha_n'+i\cdot\beta_n')+\sum_{n=n_k-p_k}^{n_k}(\alpha_n''+i\beta_n''), \tag{1.1}$$

где α_n', β_n', α_n'', β_n'' – действительные числа и выполняются следующие условия A:

a) $\{n_k\}$ – последовательность натуральных, а $\{p_k\}$ – последовательность неотрицательных целых чисел, причем $p_k\leqslant n_k-n_{k-1}-1$ ($k=1, 2, \ldots$), (в частности, если $n_k=n_{k-1}+1$, то $p_k=0$);

b) $|\arg a_n|\leqslant\frac{\pi}{4}$, если $n_k-p_k\leqslant n\leqslant n_k$;

c) при этом справедливо неравенство

$$\sum_{n=n_k-p_k}^{n_k}(\alpha_n''-|\beta_n''|)\geqslant\sum_{n_{k-1}+1\leqslant n\leqslant n_k-p_k-1}{}'(|\beta_n'|-\alpha_n'), \tag{*}$$

где Σ' означает, что суммирование ведется только по тем n, для которых $\frac{\pi}{4}<|\arg a_n|\leqslant\pi$. (Если $n_{k-1}+1\leqslant n\leqslant n_k-p_k-1$, то среди чисел a_n могут содержаться как числа, удовлетворяющие неравенству $|\arg a_n|\leqslant\frac{\pi}{4}$, так и числа, удовлетворяющие неравенству $\frac{\pi}{4}<|\arg a_n|\leqslant\pi$. В частности, если при любом n, для которого $n_{k-1}+1\leqslant n\leqslant n_k-p_k-1$, имеет место неравенство $\frac{\pi}{4}<|\arg a_n|\leqslant\leqslant\pi$, то условие (*) принимает вид

$$\sum_{n=n_k-p_k}^{n_k}(\alpha_n''-|\beta_n''|)\geqslant\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k-p_k-1}(|\beta_n'|-\alpha_n').)$$

Символом Σ'' будем в дальнейшем обозначать суммирование только по тем n из интервала $n_{k-1}+1\leqslant n\leqslant n_k-p_k-1$, для которых числа a_n удовлетворяют неравенству $|\arg a_n|\leqslant\frac{\pi}{4}$.

Очевидно, что

$$\sum_{n_{k-1}+1\leqslant n\leqslant n_k-p_k-1}{}''\alpha_n'\geqslant\sum_{n_{k-1}+1\leqslant n\leqslant n_k-p_k-1}{}''|\beta_n'|. \tag{1.2}$$

Тогда из условия c) и (1.2) следует, что

$$\operatorname{Re} a^{(n_k)} = \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k-p_k-1} \alpha_n' + \sum_{n=n_k-p_k}^{n_k} \alpha_n'' \geqslant$$

$$\geqslant \sum''_{n_{k-1}+1\leqslant n\leqslant n_k-p_k-1} |\beta_n'| + \sum'_{n_{k-1}+1\leqslant n\leqslant n_k-p_k-1} |\beta_n'| + \sum_{n=n_k-p_k}^{n_k} |\beta_n''| \geqslant$$

$$\geqslant \left| \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k-p_k-1} \beta_n' + \sum_{n=n_k-p_k}^{n_k} B_n'' \right| = |\operatorname{Im} a^{(n_k)}|,$$

то есть

$$|\arg a^{(n_k)}| \leqslant \frac{\pi}{4}. \tag{1.3}$$

Обозначим

$$b^{(l)} = \sum_{k=1}^{l} a^{(n_k)},$$

где l — натуральное число.

Легко видеть, что при выполнении указанных выше условий

$$\operatorname{Re} b^{(l)} \geqslant |\operatorname{Im} b^{(l)}|,$$

и в силу (1.3)

$$|b^{(l)}| \geqslant |a^{(n_k)}| \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ l). \tag{1.4}$$

Рассмотрим далее выражения

$$a_m^{(n_k)} = \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k-p_k-1} \lambda_n^m \cdot (\alpha_n' + i\cdot\beta_n') + \sum_{n=n_k-p_k}^{n_k} \lambda_n^m \cdot (\alpha_n'' + i\cdot\beta_n''), \tag{1.5}$$

где $\{\lambda_n\}$ — монотонно возрастающая последовательность положительных чисел, m — любое натуральное число, условия A, по-прежнему, выполнены.

Так как

$$0 < \lambda_{n_{k-1}+1} < \lambda_{n_{k-1}+2} < \cdots < \lambda_{n_k-p_k-1} < \lambda_{n_k-p_k} < \cdots < \lambda_{n_k},$$

то справедливы следующие неравенства

$$\lambda_{n_k-p_k}^m \cdot \sum_{n=n_k-p_k}^{n_k} (\alpha_n'' - |\beta_n''|) \geqslant \lambda_{n_k-p_k-1}^m \cdot \sum'_{n_{k-1}+1\leqslant n\leqslant n_k-p_k-1} (|\beta_n'| - \alpha_n'),$$

$$\sum_{n=n_k-p_k}^{n_k} \lambda_n^m \cdot (\alpha_n'' - |\beta_n''|) \geqslant \lambda_{n_k-p_k}^m \cdot \sum_{n=n_k-p_k}^{n_k} (\alpha_n'' - |\beta_n''|),$$

$$\lambda_{n_k-p_k-1}^m \cdot \sum'_{n_{k-1}+1\leqslant n\leqslant n_k-p_k-1} (|\beta_n'| - \alpha_n') \geqslant \sum'_{n_{k-1}+1\leqslant n\leqslant n_k-p_k-1} \lambda_n^m \cdot (|\beta_n'| - \alpha_n')$$

и, следовательно,

$$\sum_{n=n_k-p_k}^{n_k} \lambda_n^m \cdot (\alpha_n'' - |\beta_n''|) \geqslant \sum'_{n_{k-1}+1\leqslant n\leqslant n_k-p_k-1} \lambda_n^m \cdot (|\beta_n'| - \alpha_n'). \tag{1.6}$$

Кроме того, из неравенства (1.2) следует неравенство

$$\sum_{n_{k-1}+1\leqslant n\leqslant n_k-p_k-1}'' \lambda_n^m\cdot\alpha_n'\geqslant \sum_{n_{k-1}+1\leqslant n\leqslant n_k-p_k-1}'' \lambda_n^m\cdot|\beta_n'| \tag{1.7}$$

для любого натурального m.

Из неравенств (1.6) и (1.7) вытекает, что

$$|\arg a_m^{(n_k)}|\leqslant\frac{\pi}{4},$$

и если обозначить через

$$b_m^{(l)}=\sum_{k=1}^{l} a_m^{(n_k)}$$

(l – любое натуральное число), то выполняются условия

$$\operatorname{Re} b_m^{(l)}\geqslant|\operatorname{Im} b_m^{(l)}|$$

и

$$|b_m^{(l)}|\geqslant|a_m^{(n_k)}|\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ l)$$

для любого натурального m.

§ 2. Теорема о сверхсходимости

Рассмотрим теперь ряд Дирихле

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot e^{\lambda_n\cdot s}, \tag{2.1}$$

где $\{\lambda_n\}$ – монотонно возрастающая последовательность положительных чисел, причем $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$, последовательность $\{a_n\}$ коэффициентов которого удовлетворяет условиям A.

Пусть C – абсцисса сходимости ряда (2.1) и $0<C<\infty$.

Предположим, что функция $f(s)$ голоморфна в точке $s=C$. Тогда найдется некоторое действительное число $r>C$ такое, что в круге $|s|<r$ эта функция может быть представлена сходящимся к ней рядом Тейлора

$$f(s)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f^{(m)}(0)}{m!}\cdot s^m. \tag{2.2}$$

Так как из (2.1) следует, что

$$f^{(m)}(0)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot\lambda_n^m,$$

то формула (2.2) принимает вид

$$f(s)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{s^m}{m!}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot\lambda_n^m. \tag{2.2'}$$

Аналогично, всякая частичная сумма ряда (2.1)

$$f_k(s)=\sum_{n=1}^{n_k} a_n\cdot e^{\lambda_n\cdot s}$$

как функция целая может быть представлена рядом

$$f_k(s)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{s^m}{m!}\cdot\sum_{n=1}^{n_k} a_n\cdot\lambda_n^m, \tag{2.3}$$

сходящимся к ней во всей плоскости и, тем более, в круге $|s|<r$.

Из результатов § 1 следует, что

$$\left|\sum_{n=1}^{n_k} a_n\right|\leqslant\left|\sum_{n=1}^{n_{k+1}} a_n\right|, \tag{2.4}$$

$$\left|\sum_{n=1}^{n_k} a_n\cdot\lambda_n^m\right|\leqslant\left|\sum_{n=1}^{n_{k+1}} a_n\cdot\lambda_n^m\right| \tag{2.4'}$$

для любых конечных натуральных k и m.

Так как точка $s=0$ лежит внутри полуплоскости $\operatorname{Re} s<C$, то ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=f(0)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot\lambda_n^m=f^{(m)}(0)$$

сходятся. Это означает, что частичные суммы этих рядов ограничены, причем из неравенств (2.4) и (2.4′) следует, что

$$\left|\sum_{n=1}^{n_k} a_n\right|\leqslant\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right|, \tag{2.5}$$

$$\left|\sum_{n=1}^{n_k} a_n\cdot\lambda_n^m\right|\leqslant\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot\lambda_n^m\right| \tag{2.5'}$$

для любых натуральных k и m.

Рассмотрим далее функцию

$$F(s)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{s^m}{m!}\cdot\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot\lambda_n^m\right|. \tag{2.6}$$

Заметим, что ряд, стоящий в правой части (2.6) сходится в круге $|s|<r$, так как его круг сходимости совпадает с кругом сходимости ряда (2.2′).

Пусть $C<r_1<r$, тогда при $|s|=r_1$ ряды (2.6) и (2.8) сходятся абсолютно, и, следовательно, имеем

$$F(r_1)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{r_1^m}{m!}\cdot\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot\lambda_n^m\right|$$

и

$$|f_k(s)| \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|s|^m}{m!} \cdot \left| \sum_{n=1}^{n_k} a_n \cdot \lambda_n^m \right| \qquad (|s|=r_1).$$

Принимая во внимание неравенства (2.5) и (2.5′), можно утверждать, что на окружности $|s|=r_1$ справедливо следующее неравенство

$$|f_k(r_1)| \leqslant F(r_1) \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots).$$

Следовательно, из принципа максимума модуля аналитической функции вытекает, что это неравенство имеет место и при

$$|s| \leqslant r_1.$$

Это означает, что последовательность функций $\{f_k(s)\}$ равномерно ограничена внутри круга $|s|<r_1$ и, так как в круге $|s|<r_2$, где $0<r_2<C$, она сходится равномерно к функции $f(s)$, то на основании теоремы Витали можно утверждать, что последовательность $\{f_k(s)\}$ равномерно сходится к функции $f(s)$ внутри круга $|s|<r_1$.

Отсюда следует, что найдется такая окрестность точки $s=C$, внутри которой ряд (2.1) является сверхсходящимся.

Итак, доказана теорема.

Теорема. *Пусть ряд*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot e^{\lambda_n \cdot s},$$

где $\{\lambda_n\}$ – монотонно возрастающая последовательность положительных чисел ($\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n=\infty$), имеет конечную положительную абсциссу сходимости C.

Пусть при некотором выборе последовательностей $\{n_k\}$ и $\{p_k\}$ последовательность коэффициентов этого ряда удовлетворяет условиям A.

Тогда, если действительная точка на оси сходимости ряда является правильной точкой функции $f(s)$, то существует такая окрестность этой точки, внутри которой последовательность функции

$$f_k(s) = \sum_{n=1}^{n_k} a_n \cdot e^{\lambda_n \cdot s} \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots)$$

равномерно сходится к функции $f(s)$.

Замечания

1. Пусть абсцисса сходимости C ряда (2.1) произвольна ($|C|<\infty$). Пусть ε – любое положительное число. Тогда для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot e^{\lambda_n \cdot (s+C-\varepsilon)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot e^{\lambda_n \cdot (C-\varepsilon)} \cdot e^{\lambda_n \cdot s} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{\lambda_n \cdot s}$$

абсцисса сходимости равна ε, и к этому ряду применима доказанная теорема, если коэффициенты A_n удовлетворяют условиям A.

2. Нетрудно видеть, что теорема верна, в частности, и в том случае, когда коэффициенты ряда (2.1) действительные числа и существуют такие после-

довательности $\{n_k\}$ и $\{p_k\}$, удовлетворяющие условию а) из A, что $a_n \geqslant 0$, если $n_k - p_k \leqslant n \leqslant n_k$, $a_n < 0$, если $n_{k-1}+1 \leqslant n \leqslant n_k - p_k - 1$, и

$$\sum_{n=n_k-p_k}^{n_k} a_n \geqslant - \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k=p_k-1} a_n.$$

Условия теоремы выполнены, в частности, если все $a_n \geqslant 0$ $(n=1, 2, \ldots)$ й тогда, в соответствии с теоремой Ландау, точка $s=C$ на оси сходимости ряда (2.1) – особая для этого ряда. Однако легко привести пример, когда при выполнении условий доказанной теоремы точка $s=C$ не является особой, и ряд (2.1) сверхсходится в некоторой окрестности этой точки.

Пример. Рассмотрим ряд

$$\begin{aligned}&-e^{-1}\cdot e^{z}+e^{-1}\cdot e^{(1+e^{-1})\cdot z}-e^{-2}\cdot e^{2z}+\\&+e^{-2}\cdot e^{(2+e^{-4})\cdot z}-\ldots-e^{-k}\cdot e^{k\cdot z}+e^{-k}\cdot e^{(k+e^{-k^2})\cdot z}-\ldots,\end{aligned} \tag{2.7}$$

где

$$a_n = -e^{-k}, \quad \lambda_n = k, \quad \text{если} \quad n = 2\cdot k - 1,$$

$$a_n = e^{-k}, \quad \lambda_n = k + e^{-k^2}, \quad \text{если} \quad n = 2\cdot k \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots).$$

Очевидно, что коэффициенты ряда (2.7) удовлетворяют всем условиям, сформулированным в замечании 2 данного параграфа. Чтобы убедиться в этом, достаточно выбрать $n_k = 2k$ $(k=1, 2, \ldots)$, $p_k = 0$ $(k=1, 2, \ldots)$.

Непосредственно легко подсчитать, что абсцисса сходимости ряда (2.7) равна 1.

Сгруппировав попарно члены ряда (2.7), образуем ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} [-e^{-k} e^{k\cdot z} + e^{-k}\cdot e^{(k+e^{-k^2})\cdot z}]. \tag{2.7'}$$

Г. Л. Лунцем было доказано [1], что если область абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot e^{\lambda_n\cdot z}$ непустая и $|\lambda_n - \mu_n| < \varepsilon_n$, причем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}_n \cdot e^{\lambda_n\cdot z}$ сходится абсолютно во всей плоскости, то функция $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot e^{\lambda_n\cdot z} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot e^{\mu_n\cdot z}$ целая.

Так как условия последнего предложения выполняются в рассматриваемом случае, то можно утверждать, что ряд (2.7′) представляет собой целую функцию. Отсюда следует, что любая точка на оси сходимости ряда (2.7), в том числе и точка $z=1$, является правильной для этого ряда, и ряд (2.7) является сверхсходящимся в окрестности точки $z=1$. (Легко непосредственно убедиться в том, что сверхсходимость имеет место в любой конечной области.)

Тамбовский институт химического машиностроения

Поступило в редакцию 8.V.1968

Литература

1. Г. Л. Лунц, О теореме Ландау—Прингсхейна, Изв. АН Азерб. ССР, серия физико-матем. и технич. наук, № 1, 1963.

VIENA TEOREMA APIE KOEFICIENTŲ ĮTAKĄ DIRICHLE EILUTĖS VIRŠKONVERGAVIMUI

L. OSKOLKOVAS

(*Reziumė*)

Tarkime, kad eilutės

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}$$

konvergavimo abscisė c yra teigiama ir funkcija $f(s)$ yra reguliari taške $s=c$. Nusakoma sąlyga koeficientams a_n, kad eilutė $f(s)$ virškonverguotų taško $s=c$ aplinkoje.

UN THÉORÈME SUR L'INFLUENCE DES COEFFICIENTS SUR L'ULTRACONVERGENCE DE LA SÉRIE DE DIRICHLET

L. OSKOLKOV

(*Résumé*)

On suppose que l'abscisse de convergence de la série

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}$$

est positive. On indique une condition sur les coefficients de la série suffisante pour l'ultraconvergence de la série dans un voisinage du point réel sur l'axe de convergence si ce point est régulier pour $f(s)$.