1969

УДК–517.512

КОНСТРУКТИВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ C

М. В. ВИШНЯКОВ

Рассмотрим в пространстве C непрерывных функций двух переменных, 2π – периодических по каждой переменной, дифференциальный оператор $P\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ с характеристическим многочленом

$$P(x,\ y)=x^{2m_1}+x^{2p_1}y^{2p_2}+y^{2m_2}, \tag{1}$$

где m_1, p_1, p_2, m_2 – целые положительные числа. Для таких операторов имеет место следующий аналог неравенства Бернштейна.

Теорема 1. *Пусть* $T(x, y)=\Sigma C_{mn}e^{imx}e^{iny}$ – *тригонометрический многочлен с показателями* (m, n), *лежащими в области* $P(m, n)\leqslant\lambda$. *Существуют такие постоянные* K_1 и K_2*, *что*

$$\left\|P\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)T\right\|_C\leqslant K_1\lambda\|T\|_C, \quad \text{если} \quad \frac{p_1}{m_1}+\frac{p_2}{m_2}\leqslant 1 \tag{2}$$

и

$$\left\|P\left[-i\frac{\partial}{\partial x}\right)T\right\|_C\leqslant K_2\lambda\log\lambda\|T\|_C, \quad \text{если} \quad \frac{p_1}{m_1}+\frac{p_2}{m_2}>1. \tag{3}$$

Неравенства (1) *и* (2) *неулучшаемы в смысле порядка роста по* λ.

Доказательство. Неулучшаемость неравенства (2) очевидна. В случае $\frac{p_1}{m_1}+\frac{p_2}{m_2}<1$ теорема доказана Б. С. Митягиным в [2]. Неравенство (3) следует из результатов К. И. Бабенко [1] и Б. С. Митягина [2], но без утверждения о неулучшаемости оценки. Разобьем доказательство теоремы на две части: сначала покажем, что неравенство (3) неулучшаемо в смысле порядка роста по λ, а затем рассмотрим случай

$$\frac{p_1}{m_1}+\frac{p_2}{m_2}=1.$$

1. Рассмотрим многочлены Теляковского [4]

$$T_\lambda(x,y)=\sum_{\substack{P(2m+1,\ 2n+1)\leqslant\lambda,\\ m>0,\ n>0}}\frac{a(m,\ x)\,a(n,\ y)}{mn},$$

где

$$a(m,\ x)=\frac{1}{2}\left[\cos(2m+1)x+\cos 2mx-\cos(m+1)x-\cos mx\right].$$

* Через K_i на протяжении всей заметки обозначаются различные постоянные, точное значение которых либо неизвестно, либо не представляет интереса.

Так же, как и в лемме 2 заметки [4], показывается, что

$$\| T_\lambda \|_C \leqslant K_3.$$

Поэтому для доказательства неулучшаемости неравенства (3) в случае $\frac{p_1}{m_1} + \frac{p_2}{m_2} > 1$ достаточно проверить, что

$$\left\| P\left(-i \frac{\partial}{\partial x}\right) T_\lambda \right\|_C \geqslant K_4 \lambda \log \lambda.$$

$$\left\| P\left(-i \frac{\partial}{\partial x}\right) T_\lambda \right\|_C \geqslant \left| P\left(-i \frac{\partial}{\partial x}\right) T_\lambda(0,\ 0) \right| =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{\substack{P(2m+1,\ 2n+1) \leqslant \lambda, \\ m>0,\ n>0}} \frac{[(2m+1)^{2p_1} + (2m)^{2p_1} - (m+1)^{2p_1} - m^{2p_1}]\,[(2n+1)^{2p_2} + (2n)^{2p_2} - (n+1)^{2p_2} - n^{2p_2}]}{mn} \geqslant$$

$$\geqslant K_5 \sum_{\substack{P(m,\ n) \leqslant \frac{\lambda}{K_6}, \\ m \geqslant 1,\ n \geqslant 1}} m^{2p_1-1}\, n^{2p_2-1} \geqslant K_7 \iint\limits_{\substack{P(x,\ y) \leqslant \frac{\lambda}{K_6}, \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0}} x^{2p_1-1}\, y^{2p_2-1}\, dx\, dy.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$F(\lambda) = \iint\limits_{\substack{P(x,\ y) \leqslant \lambda, \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0}} x^{2p_1-1}\, y^{2p_2-1}\, dx\, dy$$

и найдем ее асимптотику при $\lambda \to \infty$. Для этого установим сначала следующее равенство

$$\iint\limits_{x \geqslant 0,\ y \geqslant 0} e^{-tP(x,\ y)}\, x^{2p_1-1}\, y^{2p_2-1}\, dx\, dy = \int\limits_0^\infty e^{-t\lambda}\, dF(\lambda). \qquad (4)$$

В самом деле, возьмем последовательность $\{\lambda_k\}$ такую, что $\lambda_k \to \infty$. Тогда

$$\iint\limits_{x \geqslant 0,\, y \geqslant 0} e^{-tP(x,\ y)}\, x^{2p_1-1}\, y^{2p_2-1}\, dx\, dy =$$

$$= \sum_k \iint\limits_{\lambda_k < P(x,\ y) \leqslant \lambda_{k+1}} e^{-tP(x,\ y)}\, x^{2p_1-1}\, y^{2p_2-1}\, dx\, dy \sim$$

$$\sim \sum_k e^{-t\lambda_k} \iint\limits_{\lambda_k < P(x,\ y) \leqslant \lambda_{k+1}} x^{2p_1-1}\, y^{2p_2-1}\, dx dy =$$

$$= \sum_k e^{-t\lambda_k}\, [F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k)] \sim \int\limits_0^\infty e^{-t\lambda}\, dF(\lambda).$$

Найдем асимптотику интеграла, стоящего слева в равенстве (4) при $t \searrow 0$.

$$\iint\limits_{x \geqslant 0,\ y \geqslant 0} e^{-tP(x,\ y)}\, x^{2p_1-1}\, y^{2p_2-1}\, dx dy =$$

$$= \iint\limits_{x \geqslant 0,\ y \geqslant 0} e^{-t\left(x^{2m_1} + x^{2p_1} y^{2p_1} + y^{2m_2}\right)}\, x^{2p_1-1}\, y^{2p_2-1}\, dx dy =$$

$$= \frac{1}{4 p_1 p_2} \iint\limits_{x \geqslant 0,\ y \geqslant 0} e^{-t\left(uv + u^{\frac{m_1}{p_1}} + v^{\frac{m_2}{p_2}}\right)}\, du dv \sim K_8\, \frac{1}{t} \ln \frac{1}{t}, \qquad t \searrow 0.$$

Асимптотика последнего интеграла найдена в [3]. По тауберовой теореме Караматы получаем, что

$$F(\lambda) \sim K_9 \lambda \log \lambda.$$

Неулучшаемость доказана.

2. Рассмотрим теперь случай $\frac{p_1}{m_1}+\frac{p_2}{m_2}=1$. Возьмем подпространство E_λ, натянутое на $\{e^{imx}e^{iny}\}$, где $P(m, n) \leqslant \lambda$. Продолжим оператор $P\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ с подпространства E_λ на все C, полагая

$$\tilde{P}f = \sum C_{mn} \varphi\left(\frac{P(m, n)}{\lambda}\right) P(m, n) e^{imx} e^{iny}$$

для

$$f \sim \sum C_{mn} e^{imx} e^{iny},$$

где $\varphi(t)$ – стандартная бесконечно дифференцируемая функция, обладающая следующими свойствами:

a) $0 \leqslant \varphi(t) \leqslant 1$,

в) $\varphi(t) \equiv 1, \ |t| \leqslant 1$,

c) $\varphi(t) \equiv 0, \ |t| \geqslant 2$.

Очевидно,

$$\left\| P\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) \right\|_{E_\lambda} \leqslant \| \tilde{P} \|_C.$$

Оператор $\tilde{P}$ является мультипликатором в пространстве C с $\lambda_{mn} = \varphi\left(\frac{P(m, n)}{\lambda}\right) P(m, n)$. Для оценки его нормы воспользуемся предложением 2 (см. [2]).

1) $\sup\limits_{x, y} P(x, y)\varphi\left(\frac{P(x, y)}{\lambda}\right) \leqslant \frac{2}{\lambda}$, в силу свойства c). Для оценки выражения

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int |xy| \left| \frac{\partial^4 \lambda}{\partial x^2 \partial y^2} \right| dx dy$$

отметим предварительно, что для $a>0$, $b>0$

$$\iint\limits_{x \geqslant 0,\ y \geqslant 0} e^{-t\left(x^{2m_1}+x^{2p_1} y^{2p_2}+y^{2m_2}\right)} x^{a-1} y^{b-1} dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{ab} \iint\limits_{u \geqslant 0,\ v \geqslant 0} e^{-t\left(u^{\frac{2m_1}{a}}+u^{\frac{2p_1}{a}} v^{\frac{2p_2}{b}}+v^{\frac{2m_2}{b}}\right)} du\, dv \sim K_9 t^{-\left(\frac{a}{2m_1}+\frac{b}{2m_2}\right)}.$$

Асимптотика последнего интеграла найдена в [3]. Отсюда, так же как и при доказательстве неулучшаемости, из тауберовой теоремы Караматы следует, что функция

$$\Phi(\lambda) = \iint\limits_{\substack{P(x, y) \leqslant \lambda, \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0}} x^{a-1} y^{b-1} dx\, dy$$

допускает оценку

$$\Phi(\lambda) \leqslant K_{10} \lambda^{\frac{a}{2m_1}+\frac{b}{2m_2}}.$$

Из последнего неравенства вытекает оценка

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} |xy| \left\| \frac{\partial^4 \lambda}{\partial x^2 \partial y^2} \right\| dxdy \leqslant K_{11} \lambda.$$

Для получения этой оценки нужно произвести дифференцирование, выделить слагаемые вида

$$Ax^{a-1} y^{b-1} D^{(K)} P(x, y) \varphi^{(r)} \left(\frac{P}{\lambda}\right)$$

и воспользоваться тем, что функция $\varphi(t)$ и все ее производные равны нулю для $|t| \geqslant 2$.

Покажем теперь, что

$$\sup_y \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x| \left| \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} \right| dx \leqslant K_{12} \lambda.$$

Мы проведем подробно оценку одного из слагаемых, так как остальные оцениваются аналогично.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |xP''_{xx}| \varphi\left(\frac{P}{\lambda}\right) dx \leqslant K_{13} \left\{ \int\limits_{P(x,y) \leqslant 2\lambda} x^{2m_1 - 1} dx + y^{2p_2} \int\limits_{P(x,y) \leqslant 2\lambda} x^{2p_1 - 1} dx \right\} \leqslant$$

$$\leqslant K_{14} \left\{ \int\limits_0^{(2\lambda)^{\frac{1}{2m_1}}} x^{2m_1 - 1} dx + (2\lambda)^{\frac{p_2}{m_2}} \int\limits_0^{(2\lambda)^{\frac{1}{2m_1}}} x^{2p_1 - 1} dx \right\} \leqslant K_{15} \lambda.$$

Точно так же показывается, что

$$\sup_y \int\limits_{-\infty}^{\infty} |y| \left| \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} \right| dy \leqslant K_{16} \lambda.$$

Доказательство теоремы 1 закончено.

Перейдем теперь к доказательству аналога теоремы Джексона для функций, лежащих в области определения операторов вида (1) с $\frac{p_1}{m_1} + \frac{p_2}{m_2} \leqslant 1$.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x, y)$ лежит в области определения оператора $P\left(-i \frac{\partial}{\partial x}\right)$ с $\frac{p_1}{m_1} + \frac{p_2}{m_2} \leqslant 1$ (оператор понимается в смысле Вейля). Пусть $\left\|P\left(-i \frac{\partial}{\partial x}\right) f\right\|_C \leqslant 1$. Тогда для нее найдется такой тригонометрический многочлен $T_\lambda(x, y) = \sum\limits_{P(m,n) \leqslant \lambda} C_{mn} e^{imx} e^{iny}$, что $\|f - T_\lambda\|_C \leqslant \frac{K_{17}}{\lambda}$, где константа K_{17} не зависит ни от f, ни от λ.*

Доказательство. В случае $\frac{p_1}{m_1} + \frac{p_2}{m_2} < 1$ теорема доказана Б. С. Митягиным в [2]. Пусть $\frac{p_1}{m_1} + \frac{p_2}{m_2} = 1$. Разложим функцию $f(x, y)$ в ряд Фурье

$$f(x, y) \sim \sum f_{mn} e^{imx} e^{iny}$$

и построим многочлен

$$T_\lambda(f) = \sum f_{mn}\,\varphi\left(\frac{P(m,\,n)}{\lambda}\right) e^{imx}\,e^{iny},$$

где $\varphi(t)$ — та же стандартная функция, что и в доказательстве неравенства Бернштейна. Так как $\|Pf\|_C \leqslant 1$, то

$$\|f - T_\lambda(f)\|_C \leqslant \|L\|_C,$$

где L — оператор мультипликатор с последовательностью

$$u_{mn} = \frac{1-\varphi\left(\frac{P(m,\,n)}{\lambda}\right)}{P(m,\,n)}.$$

Для оценки нормы этого мультипликатора снова применим предложение 2 (см. [2])

$$\sup_{x,\,y} \frac{1-\varphi\left(\frac{P(x,\,y)}{\lambda}\right)}{P(x,\,y)} \leqslant \frac{1}{\lambda}, \quad \text{так как} \quad \varphi(t)=1,\ |t|\leqslant 1.$$

Покажем теперь, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int |xy| \left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2}\right| dx\,dy \leqslant \frac{K_{18}}{\lambda}.$$

Отметим, что если под знаком интеграла стоит модуль производной функции $\varphi\left(\frac{P}{\lambda}\right)$, то $\lambda \leqslant P \leqslant 2\lambda$ и после вынесения из знаменателя за знак интеграла λ в соответствующей степени можно распространить интегрирование на область $P(x,\,y) \leqslant 2\lambda$. Получающиеся при этом интегралы в точности совпадают с теми, которые приходилось оценивать при доказательстве теоремы Бернштейна и остается воспользоваться имеющимися там оценками.

Проведем теперь оценку интегралов с множителем $1-\varphi\left(\frac{P}{\lambda}\right)$. Для этого покажем предварительно, что для $a>0$, $b>0$, $n>\frac{a}{2m_1}+\frac{b}{2m_2}$

$$\Psi(\lambda) = \iint\limits_{\substack{P(x,\,y)\geqslant\lambda,\\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0}} \frac{x^{a-1}\,y^{b-1}\,dx\,dy}{(x^{2m_1}+x^{2p_1}\,y^{2p_2}+y^{2m_2})^n} \leqslant \frac{K_{19}}{\lambda^{n-\frac{a}{2m_1}-\frac{b}{2m_2}}}. \tag{5}$$

Сделаем в этом интеграле замену переменных $x^a=u$, $y^b=v$. Тогда

$$\Psi(\lambda) = \frac{1}{ab} \iint\limits_{\substack{P(u,\,v)\geqslant\lambda,\\ u\geqslant 0,\ v\geqslant 0}} \frac{du\,dv}{\left(u^{\frac{2m_1}{a}} + u^{\frac{2p_1}{a}}\,v^{\frac{2p_1}{b}} + v^{\frac{2m_2}{b}}\right)^n}.$$

Положим

$$u = \rho^{\frac{a}{2m_1}} \cos^{\frac{a}{m_1}} \varphi,$$

$$v = \rho^{\frac{b}{2m_2}} \sin^{\frac{b}{m_2}} \varphi.$$

Значит, $P(\rho,\,\varphi) = \rho + \rho\cos^s\varphi\,\sin^t\varphi \geqslant \lambda \Rightarrow \rho \geqslant \frac{\lambda}{2}$.

$$\Psi(\lambda) \leqslant K_{20} \int_{\frac{\lambda}{2}}^{\infty} \frac{\rho^{\frac{a}{2m_1}+\frac{b}{2m_2}-1}}{\rho^n}\,d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\cos^\gamma\varphi\,\sin^\delta\varphi\,d\varphi}{(1+\cos^s\varphi\,\sin^t\varphi)^n} \leqslant \frac{K_{21}}{\lambda^{n-\frac{a}{2m_1}-\frac{b}{2m_2}}}.$$

Покажем, например, как из (5) получаются оценки интересующих нас интегралов.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \frac{|xy|\,|P'_x|\left[1-\varphi\left(\frac{P}{\lambda}\right)\right]|P''_{xyy}|}{P^3}\,dxdy \leqslant 4 \iint\limits_{\substack{P\geqslant\lambda,\\ x\geqslant y,\ y\geqslant 0}} \frac{|xyP'_xP''_{xyy}|}{P^3}\,dxdy=$$

$$=8p_1p_2m_1 \iint\limits_{\substack{P\geqslant\lambda,\\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0}} \frac{x^{2m_1+2p_1-1}\,y^{2p_2-1}}{P^3}\,dxdy+$$

$$+8p_1^2p_2 \iint\limits_{\substack{P\geqslant\lambda,\\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0}} \frac{x^{4p_1-1}\,y^{4p_2-1}}{P^3}\,dxdy.$$

В первом интеграле $a=2m_1+2p_1$, $b=2p_2$, $n=3$. Значит, с учетом соотношения $\frac{p_1}{m_1}+\frac{p_2}{m_2}=1$ из неравенства (5) получается требуемая оценка.

Оценим теперь $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x|\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|dx$. Как и выше, интегралы, содержащие производные от функции $\varphi\left(\frac{P}{\lambda}\right)$, после вынесения $(\lambda\leqslant P\leqslant 2\lambda)$ λ из знаменателя в соответствующей степени за знак интеграла сводятся к интегралам, которые мы уже оценили при доказательстве неравенства Бернштейна. Приведем теперь для примера оценку одного из встречающихся интегралов с множителем $1-\varphi\left(\frac{P}{\lambda}\right)$.

$$I=y^{2p_2}\int\limits_{P\geqslant\lambda}\frac{x^{2p_1+2m_1-1}}{P^3}\,dx=\frac{y^{2p_2}}{2p_1+2m_1}\int\limits_{P(u,\,y)\geqslant\lambda}\frac{du}{\left(u^{\frac{m_1}{m_1+p_1}}+u^{\frac{p_1}{m_1+p_1}}y^{2p_2}+y^{2m_2}\right)^3}\,.$$

Положим $u=t^{\frac{p_1+m_1}{m_1}}y^{4m_2-2p_2}$. Тогда

$$I=\frac{1}{2m_1\,y^{2m_2}}\int\frac{t^{\frac{p_1}{m_1}}\,dt}{\left(t+t^{\frac{p_1}{m_1}}+1\right)^3},$$

где интегрирование идет по области

$$y^{2m_2}\left(t+t^{\frac{p_1}{m_1}}+1\right)\geqslant\lambda,\quad t\geqslant 0.$$

$$I\leqslant\frac{K_{22}}{y^{2m_2}}\int\frac{t\,t^{\frac{p_1}{m_1}}\left(1+t^{\frac{p_1}{m_1}-1}\right)dt}{\left(t+t^{\frac{p_1}{m_1}}+1\right)^3}=$$

$$=\frac{K_{23}}{2y^{2m_2}\left(t+t^{\frac{p_1}{m_1}}+1\right)}\,\frac{t}{t+t^{\frac{p_1}{m_1}}+1}\Bigg|_{t_0}^{\infty}+\frac{K_{22}}{2y^{2m_2}}\int\frac{dt}{t^{\frac{p_2}{m_2}}\left(t+t^{\frac{p_1}{m_1}}+1\right)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{K_{23}}{\lambda}+\frac{K_{23}}{2y^{2m_2}\left(t_0+t_0^{\frac{p_1}{m_1}}+1\right)}\int\limits_0^{\infty}\frac{dt}{t^{\frac{p_2}{m_2}}\left(t+t^{\frac{p_1}{m_1}}+1\right)}\leqslant\frac{K_{24}}{\lambda}\,.$$

Оценка интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |y| \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| dy$ производится аналогично. Доказательство теоремы 2 закончено.

Из теорем 1 и 2 по обычной схеме Бернштейна получается следующая

Теорема 3. *Пусть E_λ — подпространство, натянутое на*

$$\{ e^{imx} e^{iny} \}, \quad \text{где} \quad P(m, n) \leqslant \lambda, \ \frac{p_1}{m_1} + \frac{p_2}{m_2} \leqslant 1.$$

Тогда, если функция $f(x, y)$ принадлежит области определения оператора $P\left(-i \frac{\partial}{\partial x}\right)$ в C, то

$$\overline{\lim_{\lambda \to \infty}} \lambda \rho(f, E_\lambda) < \infty.$$

Если же при некотором $\varepsilon > 0$ для $f(x, y) \in C$

$$\overline{\lim_{\lambda \to \infty}} \lambda^{1+\varepsilon} \rho(b, E_\lambda) < \infty,$$

то функция $f(x, y)$ лежит в области определения оператора

$$P\left(-i \frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Отметим еще, что из теорем 1 и 2 следует оценка n-поперечников компакта $U = \{ f \in C : \| Pf \|_C \leqslant 1 \}$ (по поводу получения этой оценки см. [2])

$$d_n(U) \asymp n^{-\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}}.$$

Автор глубоко благодарен Б. С. Митягину за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Воронеж

Поступило в редакцию 11.IV.1968

Литература

1. К. И. Бабенко, О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами, ДАН СССР, т. 132, № 5, 1960, 982—985.
2. Б. С. Митягин, Приближение функций в пространствах L^p и C на торе. Матем. сб., т. 58, вып. 4, 1962, 397—414.
3. В. Н. Горчаков, Асимптотическое поведение спектральной функции гипоэллиптических операторов, канд. дисс., Киев, 1965.
4. С. А. Теляковский, Об оценках производных тригонометрических полиномов многих переменных, СМЖ, т. 4, № 6, 1963.

KAI KURIŲ KLASIŲ GLOTNIŲ DVIEJŲ KINTAMŲJŲ FUNKCIJŲ, PRIKLAUSANČIŲ ERDVEI C, KONSTRUKTYVINĖS CHARAKTERISTIKOS

M. VIŠNIAKOVAS

(*Reziumė*)

Nagrinėjamos dviejų kintamųjų funkcijų iš C, priklausančios tam tikros klasės diferencialinio operatoriaus su pastoviais koeficientais apibrėžimo sričiai. Tokioms funkcijoms įrodomi Bernšteino — Džeksono teoremų analogai.

CONSTRUCTIVE CHARACTERISTICS OF SOME CLASSES OF SMOOTH FUNCTIONS IN TWO VARIABLES IN THE SPACE C

M. VISHNJAKOV

(*Summary*)

The functions in two variables laying in the domain of a function in the space C of some class of differentiable operators with constant coefficients are under consideration. The analogs of the theorem of Bernshtein — Jakson are set up for such functions.