IX LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1

1969

УДК–513

О РАССЛОЕНИИ КОНГРУЭНЦИЙ ПРЯМЫХ ПРИ ПОМОЩИ НЕКОТОРЫХ РАЗВЕРТЫВАЮЩИХСЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

П. ВАШКАС

В настоящей заметке приводятся некоторые геометрические характеристики расслоения конгруэнций прямых, определенного аналитически в [3]. Полученные геометрические характеристики естественно приводят к рассмотрению более общих случаев, чем указано в [3]. Исследование ведется методами подвижного репера и внешних форм Картана [6] и инвариантным методом Г. Ф. Лаптева [4].

1. В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматривается конгруэнция прямых K; полагается, что ребро A_1A_2 координатного тетраэдра $\{A_i\}$ $(i, j, k=1, 2, 3, 4)$ совпадает с лучом конгруэнции. Инфинитезимальные проективные перемещения тетраэдра, соответствующие переходу от одного луча к другому или переходу от одного тетраэдра, присоединенного к лучу, к другому, присоединенному к тому же лучу, определяются уравнениями

$$dA_i=\omega_i^j A_j,$$

где ω_i^j – формы Пфаффа, удовлетворяющие уравнениям структуры ([7], стр. 344)

$$D\omega_i^j=[\omega_i^k,\ \omega_k^j].$$

Конгруэнция прямых задается дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned}&\omega_1^4=m\omega_1^3-n\omega_2^4,\\&\omega_2^3=-\tilde{m}\omega_1^3+\tilde{n}\omega_2^4;\\&[\nabla m,\ \omega_1^3]-[\nabla n,\ \omega_2^4]=0,\\&[\nabla\tilde{m},\ \omega_1^3]-[\nabla\tilde{n},\ \omega_2^4]=0,\end{aligned}\tag{1}$$

где

$$\begin{aligned}&\nabla m\equiv dm-m(\omega_3^3-\omega_4^4)-m^2\omega_4^3-mn\omega_2^1-m\tilde{m}\omega_1^2+(1-\tilde{m}n)\omega_3^4,\\&\nabla n\equiv dn-n(\omega_1^1-\omega_2^2)-mn\omega_4^3-n^2\omega_2^1+(1-m\tilde{n})\omega_1^2-n\tilde{n}\omega_3^4,\\&\nabla\tilde{m}\equiv d\tilde{m}+\tilde{m}(\omega_1^1-\omega_2^2)-m\tilde{m}\omega_4^3+(1-m\tilde{n})\omega_2^1-\tilde{m}^2\omega_1^2-\tilde{m}\tilde{n}\omega_3^4,\\&\nabla\tilde{n}\equiv d\tilde{n}+\tilde{n}(\omega_3^3-\omega_4^4)+(1-\tilde{m}n)\omega_4^3-n\tilde{n}\omega_2^1-\tilde{m}\tilde{n}\omega_1^2-\tilde{n}^2\omega_3^4.\end{aligned}$$

Фокусами рассматриваемой конгруэнции являются точки $F_p=A_1+t_pA_2$ $(p=1, 2)$, где t_p – корни квадратного уравнения

$$\tilde{m}t^2-(\tilde{m}n-m\tilde{n}+1)t+n=0.\tag{2}$$

В дальнейшем полагается, что корни уравнения (2) – действительны, различны, т.е. полагается, что рассматриваемая конгруэнция является гиперболической.

2. Следуя [3], конгруэнцию K назовем расслояемой, если на ней вполне интегрируемо дифференциальное уравнение

$$dt+t(\omega_2^2-\omega_1^1)-t^2\omega_2^1+\omega_1^2=(a_1\omega_1^3-b_1\omega_2^4)t^2+(a_2\omega_1^3-b_2\omega_2^4)t+ \\ +(a_3\omega_1^3-b_3\omega_2^4). \tag{3}$$

Дифференцируя уравнение (3) внешним образом, исключая dt и требуя, чтобы полученное уравнение было тождеством относительно t, получаем уравнения

$$[\nabla a_1,\ \omega_1^3]-[\nabla b_1,\ \omega_2^4]+[a_2\omega_1^3-b_2\omega_2^4,\ a_1\omega_1^3-b_1\omega_2^4]=0, \tag{4}$$
$$[\nabla a_2,\ \omega_1^3]-[\nabla b_2,\ \omega_2^4]+2[a_3\omega_1^3-b_3\omega_2^4,\ a_1\omega_1^3-b_1\omega_2^4]=0,$$
$$[\nabla a_3,\ \omega_1^3]-[\nabla b_3,\ \omega_2^4]+[a_3\omega_1^3-b_3\omega_2^4,\ a_2\omega_1^3-b_2\omega_2^4]=0,$$

где

$$\nabla a_1\equiv da_1+a_1(2\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_3^3)-a_2\omega_2^1-a_1(m\omega_4^3+\tilde m\omega_1^2)- \\ -b_1(m\omega_2^1+\tilde m\omega_3^4)+\tilde m\omega_3^1,$$
$$\nabla b_1\equiv db_1+b_1(\omega_1^1-\omega_4^4)-b_2\omega_2^1+\omega_4^1-a_1(n\omega_4^3+\tilde n\omega_1^2)-b_1(n\omega_2^1+\tilde n\omega_3^4)+\tilde n\omega_3^1,$$
$$\nabla a_2\equiv da_2+a_2(\omega_1^1-\omega_3^3)-2a_3\omega_2^1-2a_1\omega_1^2-\omega_3^1-a_2(m\omega_4^3+\tilde m\omega_1^2)- \\ -b_2(m\omega_2^1+\tilde m\omega_3^4)-m\omega_4^1-\tilde m\omega_3^2,$$
$$\nabla b_2\equiv db_2+b_2(\omega_2^2-\omega_4^4)-2b_3\omega_2^1-2b_1\omega_1^2-\omega_4^2-a_2(n\omega_4^3+\tilde n\omega_1^2)- \\ -b_2(n\omega_2^1+\tilde n\omega_3^4)-n\omega_4^1-\tilde n\omega_3^2,$$
$$\nabla a_3\equiv da_3+a_3(\omega_2^2-\omega_3^3)-a_2\omega_1^2+\omega_3^2-a_3(m\omega_4^3+\tilde m\omega_1^2)- \\ -b_3(m\omega_2^1+\tilde m\omega_3^4)+m\omega_4^2,$$
$$\nabla b_3\equiv db_3+b_3(-\omega_1^1+2\omega_2^2-\omega_4^4)-b_2\omega_1^2-a_3(n\omega_4^3+\tilde n\omega_1^2)- \\ -b_3(n\omega_2^1+\tilde n\omega_3^4)+n\omega_4^2.$$

Отметим, что уравнение (3) получено аналитически, как обобщение уравнения

$$dt+t(\omega_2^2-\omega_1^1)-t^2\omega_2^1+\omega_1^2=0,$$

при помощи которого строится теория расслоения конгруэнций в [8]. Коэффициентами при главных формах ω_1^3 и ω_2^4 в правой части уравнения (3) выбраны для простоты многочлены от t, причем второй степени, так как в тех случаях, когда эти коэффициенты не зависят от t или являются линейными функциями t, из уравнений, аналогичных уравнениям (4), через главные формы выражаются некоторые формы преобразования репера, а это показывает, что уравнение с коэффициентами, не зависящими от t или зависящими линейно, получено из более общего уравнения канонизацией репера.

Рассмотрим некоторые геометрические характеристики, связанные с расслоением конгруэнции при помощи уравнений (3), (4).

3. Так как

$$d(A_1+tA_2)=(\omega_1^1+t\omega_2^1)(A_1+tA_2)+\{dt+t(\omega_2^2-\omega_1^1)- \\ -t^2\omega_2^1+\omega_1^2\}A_2+(\omega_1^3+t\omega_2^3)A_3+(\omega_1^4+t\omega_2^4)A_4,$$

уравнение (3) точке A_1+tA_2 ставит в соответствие плоскость, заданную уравнением

$$\{-\tilde m t^2+(\tilde m n-m\tilde n+1)t-n\}(tx^1-x^2)+\{(a_1t^2+a_2t+a_3)(t-n)+ \\ +(b_1t^2+b_2t+b_3)m\}x^3-\{(a_1t^2+a_2t+a_3)\tilde n t+ \\ +(b_1t^2+b_2t+b_3)(1-\tilde m t)\}x^4=0, \tag{5}$$

проходящую через эту точку; из этой плоскости не выходят и все инфинитезимальные проективные смещения $d(A_1+tA_2)$.

Совместив вершины A_1 и A_2 с фокусами луча, а плоскости $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$ с фокальными плоскостями конгруэнции, коэффициенты m, n, $\tilde{m}$, $\tilde{n}$ приведем к нулю; уравнение (5) примет вид

$$t^2x^1-tx^2+(a_1t^3+a_2t^2+a_3t)x^3-(b_1t^2+b_2t+b_3)x^4=0. \tag{5'}$$

Однопараметрическое семейство плоскостей, присоединенных к точкам прямой A_1A_2, огибает некоторую развертывающуюся поверхность. Так как для характеристической точки плоскости семейства имеем

$$x^1:x^2:x^3:x^4=(a_1b_1t^3-3a_1b_3t-a_2b_3):(-a_1b_2t^3-$$
$$-3a_1b_3t^2+a_3b_3):b_3:(-a_1t^3),$$

то имеют место следующие случаи:

1) при $a_1\neq 0$, $b_3\neq 0$ ребром возврата указанной развертывающейся поверхности является пространственная кривая третьего порядка [1];

2) при $a_1=0$, $b_3\neq 0$ или $a_1\neq 0$, $b_3=0$ координаты характеристических точек не зависят от t, следовательно, все плоскости (5′) проходят через одну точку и огибают конус;

3) при $a_1=0$, $b_3=0$ плоскости (5′) образуют пучок плоскостей с осью

$$\begin{cases} x^1+a_2x^3-b_1x^4=0, \\ x^2-a_3x^3+b_2x^4=0. \end{cases} \tag{6}$$

Случай 3) рассмотрен в [8], поэтому рассмотрим подробнее первые два случая.

4. При $a_1\neq 0$, $b_3\neq 0$ плоскости, соответствующие фокусам конгруэнции в соответствии (5′), проходят через прямую A_1A_2 и совпадают с фокальными плоскостями; характеристическими точками этих плоскостей являются точки $\tilde{A}_3\,(-a_2:a_3:1:0)$ и $\tilde{A}_4\,(b_1:-b_2:0:-1)$. Эти точки, очевидно, инвариантны относительно изменения вторичных параметров. Проходящая через эти точки прямая

$$\begin{cases} x^1+a_2x^3-b_1x^4=0, \\ x^2-a_3x^3+b_2x^4=0 \end{cases} \tag{6'}$$

тоже инвариантна относительно изменения вторичных параметров.

Совмещая вершины A_3 и A_4 координатного тетраэдра с точками $\tilde{A}_3$ и $\tilde{A}_4$ соответственно, получим:

$$a_2=a_3=0,\ \ b_1=b_2=0.$$

Система дифференциальных уравнений, характеризующая расслояемую конгруэнцию, в этом случае принимает вид:

$$\omega_1^4=0,\quad \omega_2^3=0,$$
$$[\omega_3^4,\ \omega_1^3]-[\omega_1^2,\ \omega_2^4]=0;\quad [\omega_2^1,\ \omega_1^3]-[\omega_4^3,\ \omega_2^4]=0;$$
$$[da_1+a_1(2\,\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_3^3),\ \omega_1^3]-[\omega_4^1,\ \omega_2^4]=0,$$
$$[2a_1\,\omega_1^2+\omega_3^1,\ \omega_1^3]-[2b_3\,\omega_2^1+\omega_4^2,\ \omega_2^4]+2a_1b_3\,[\omega_2^4,\ \omega_1^3]=0,$$
$$[\omega_3^2,\ \omega_1^3]-[db_3+b_3(-\omega_1^1+2\,\omega_2^2-\omega_4^4),\ \omega_2^4]=0.$$

Характеры этой системы — $s_0=2$, $s_1=5$, $s_2=5$, следовательно, число Картана $Q=15$. Разлагая внешние квадратичные уравнения системы по лемме Картана, получаем, что наиболее общий двухмерный интегральный элемент зависит от $N=15$ параметров, следовательно, система в инволюции с наибольшим произволом решения — пять функций двух аргументов [6].

5. При $a_1=0$, $b_3 \neq 0$ все плоскости семейства (5′) проходят через точку $\tilde{A}_3\,(-a_2\colon a_3 : 1 : 0)$ и огибают конус второго порядка, уравнение которого

$$(x^2-a_3x^3+b_2x^4)^2+4b_3(x^1+a_2x^3-b_1x^4)\,x^4=0. \tag{7}$$

Плоскость, соответствующая фокусу A_1 в соответствии (5′), совпадает с фокальной плоскостью $A_1A_2A_3$; прямая A_1A_2 является касательной к конусу (7) в фокусе A_1. Плоскость

$$x^1+a_2x^3-b_1x^4=0,$$

соответствующая второму фокусу A_2 в соответствии (5′), касается конуса (7) вдоль образующей

$$\begin{cases} x^1+a_2x^3-b_1x^4=0, \\ x^2-a_3x^3+b_2x^4=0, \end{cases} \tag{6″}$$

которая инвариантна относительно изменения вторичных параметров. Совмещая вершину A_3 тетраэдра с вершиной конуса $\tilde{A}_3$, а ребро A_3A_4 — с образующей (6″) конуса, получим:

$$a_2=a_3=0, \quad b_1=b_2=0.$$

Система дифференциальных уравнений, характеризующая расслояемую конгруэнцию, в этом случае принимает вид:

$$\begin{aligned}
&\omega_1^4=0, \quad \omega_2^3=0,\\
&[\omega_3^4,\ \omega_1^3]-[\omega_1^2,\ \omega_2^4]=0; \quad [\omega_2^1,\ \omega_1^3]-[\omega_4^3,\ \omega_2^4]=0;\\
&[\omega_4^1,\ \omega_2^4]=0,\\
&[\omega_3^1,\ \omega_1^3]-[2b_3\,\omega_2^1+\omega_4^2,\ \omega_2^4]=0,\\
&[\omega_3^2,\ \omega_1^3]-[db_3+b_3(-\omega_1^1+2\omega_2^2-\omega_4^4),\ \omega_2^4]=0.
\end{aligned}$$

Эта система — в инволюции с характерами $s_0=2$, $s_1=5$, $s_2=4$ и определяет расслояемую конгруэнцию и связанные с ней геометрические конструкции с произволом четырех функций двух аргументов.

Отметим, что случай $a_1 \neq 0$, $b_3=0$ сводится к рассмотренному здесь заменой местами вершин A_1 и A_2, а также A_3 и A_4.

6. Уравнения (3), (4) на каждой линейчатой поверхности конгруэнции определяют однопараметрическое семейство кривых. Эти кривые, пересекаясь с прямолинейными образующими указанной поверхности, устанавливают отображение каждой образующей на каждую другую образующую. Из приведенных в п. 3—5 геометрических характеристик, в силу теоремы, доказанной в [5], следует, что эти отображения являются проективными отображениями.

С другой стороны, для того, чтобы вполне интегрируемое уравнение

$$dt+t\,(\omega_2^2-\omega_1^1)-t^2\,\omega_2^1+\omega_1^2=A\,\omega_1^3+B\,\omega_2^4$$

устанавливало проективное отображение каждой образующей линейчатой поверхности конгруэнции на каждую другую образующую той же поверхности, нужно, чтобы общее решение уравнения являлось дробно-линейной функцией трех частных решений этого уравнения; но в таком случае, как известно из теории дифференциальных уравнений, соответствующее уравнение является уравнением Риккати, т.е. A и B являются квадратными трехчленами от t. Это рассуждение, дополненное результатами п. 3–5, дает новое доказательство теоремы, доказанной в [5].

7. Рассмотренное выше показывает, что расслоение при помощи уравнений (3), (4) является обобщением расслоения, рассмотренного в [8]. Геометрически это обобщение сводится к следующему. Как в [8], так и в предлагаемой заметке, к лучу конгруэнции присоединяется однопараметрическое семейство плоскостей. Однопараметрическое семейство плоскостей или образует пучок плоскостей, или огибает некоторую развертывающуюся поверхность. В [8] требуется, чтобы плоскости, присоединенные к точкам луча, образовали пучок плоскостей, в настоящей заметке – чтобы эти плоскости огибали развертывающуюся поверхность – конус второго порядка или развертывающуюся поверхность, у которой ребром возврата является пространственная кривая третьего порядка, как наиболее простые из развертывающихся поверхностей.

Отметим также, что во всех из рассмотренных случаев лучу A_1A_2 конгруэнции K ставится в соответствие прямая (заданная уравнениями (6), (6′) или (6″)), которая не пересекает A_1A_2 и в общем случае описывает другую конгруэнцию прямых K'. Таким образом, имеем расслоение конгруэнции K в направлении конгруэнции K'. Может ставиться также вопрос о расслоении конгруэнции K' в направлении конгруэнции K.

При рассмотрении одностороннего расслоения конгруэнции K, ограничиваясь конусами второго порядка или развертывающимися поверхностями, у которых ребром возврата является кривая третьего порядка, возникают следующие вопросы:

1) обязательно ли точка, в которой луч A_1A_2 касается конуса (п. 5), должна совпадать с фокусом луча?

2) обязательно ли точки, в которых плоскости, поставленные в соответствие точкам луча A_1A_2, проходят через луч A_1A_2 конгруэнции (п. 4), должны совпадать с фокусами луча?

8. Каждой точке A_1+tA_2 луча A_1A_2 конгруэнции, заданной уравнениями (1), ставим в соответствие плоскость, заданную уравнением

$$(\alpha_1 t^2+\beta_1 t+\gamma_1)\, x^1+(\alpha_2 t^2+\beta_2 t+\gamma_2)\, x^2+(\alpha_3 t^2+\beta_3 t+\gamma_3)\, x^3+ \\ +(\alpha_4 t^2+\beta_4 t+\gamma_4)\, x^4=0; \tag{8}$$

эти плоскости при переменном t в общем случае огибают конус второго порядка, уравнение которого

$$4\,(\alpha_1 x^1+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3+\alpha_4 x^4)\,(\gamma_1 x^1+\gamma_2 x^2+\gamma_3 x^3+\gamma_4 x^4)- \\ -(\beta_1 x^1+\beta_2 x^2+\beta_3 x^3+\beta_4 x^4)^2=0. \tag{9}$$

Плоскость, соответствующая точке A_1+tA_2, содержит эту точку, если

$$\alpha_2=0,\ \beta_2+\alpha_1=0,\ \gamma_2+\beta_1=0,\ \gamma_1=0.$$

Прямая A_1A_2 в этом случае касается конуса (9) в точке A_1+tA_2, где

$$\alpha_1 t+\beta_1=0.$$

Совмещая с этой точкой вершину A_2, получим

$$\alpha_1=0,\ \beta_1\neq 0.$$

Помещаем вершину A_1 в фокус луча (тогда $n=0$), а плоскость $A_1A_2A_3$ полагаем совпадающей с касательной плоскостью фокальной поверхности, описываемой фокусом A_1 (тогда $m=0$). Уравнения (1) принимают теперь вид

$$\begin{aligned} &\omega_1^4=0,\\ &\omega_2^3=-\tilde m\omega_1^3+\tilde n\omega_2^4;\\ &[\omega_3^4,\ \omega_1^3]-[\omega_1^2,\ \omega_2^4]=0,\\ &[\nabla\tilde m,\ \omega_1^3]-[\nabla\tilde n,\ \omega_2^4]=0. \end{aligned}\tag{1'}$$

Точке A_1 уравнение (8) ставит в соответствие плоскость

$$-\beta_1x^2+\gamma_3x^3+\gamma_4x^4=0,$$

которая касается конуса (9) вдоль прямой

$$\begin{cases} -\beta_1x^2+\gamma_3x^3+\gamma_4x^4=0,\\ \beta_1x^1+\beta_3x^3+\beta_4x^4=0. \end{cases}$$

Эту прямую выбираем за ребро A_3A_4, тем самым получаем

$$\beta_3=\beta_4=0,\ \gamma_3=\gamma_4=0,$$

и уравнение (8) принимает вид:

$$tx^1-x^2+at^2x^3+\tilde at^2x^4=0.\tag{8'}$$

Требуем, чтобы точка $d\,(A_1+tA_2)$ не выходила из плоскости (8′). Это приводит к дифференциальному уравнению

$$(a\omega_2^3+\tilde a\omega_2^4)t^3+(a\omega_1^3+\tilde a\omega_1^4)t^2-\{dt+t\,(\omega_2^2-\omega_1^1)-t^2\,\omega_2^1+\omega_1^2\}=0,\tag{10}$$

которое должно быть вполне интегрируемым. Дифференцируя уравнение (10) внешним образом, исключая dt и приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях t, получаем уравнения:

$$\begin{aligned} &[\omega_2^1+a\omega_1^3,\ -a\tilde m\omega_1^3+(a\tilde n+\tilde a)\,\omega_2^4]=0,\\ &[a\omega_2^1-\tilde m\nabla a,\ \omega_1^3]+[\tilde n\nabla a+\nabla\tilde a,\ \omega_2^4]=0,\\ &[\nabla a+\tilde m\,(2a\omega_1^2+\omega_3^1),\ \omega_1^3]+[-(2\tilde a\omega_1^2+\omega_4^1)-\tilde n\,(2a\omega_1^2+\omega_3^1),\ \omega_2^4]=0,\\ &[-(2a\omega_1^2+\omega_3^1)-\tilde m\omega_3^2,\ \omega_1^3]+[\tilde n\omega_3^2+\omega_4^2,\ \omega_2^4]=0,\\ &[\omega_3^2,\ \omega_1^3]=0, \end{aligned}\tag{11}$$

где

$$\begin{aligned} &\nabla a\equiv da+a\,(2\,\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_3^3)-\tilde a\omega_3^4,\\ &\nabla\tilde a\equiv d\tilde a+\tilde a\,(2\,\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_4^4)-a\omega_4^3. \end{aligned}$$

Система (1′), (11) — в инволюции с характерами $s_0=2$, $s_1=7$, $s_2=4$ и определяет расслояемую конгруэнцию и связанные с ней геометрические конструкции с произволом четырех функций двух аргументов, где, в отличие от п. 5, точка касания луча A_1A_2 конгруэнции с конусом не обязательно совпадает с фокусом луча.

9. Каждой точке A_1+tA_2 луча A_1A_2 конгруэнции, заданной уравнениями (1), ставим в соответствие плоскость, заданную уравнением

$$\begin{aligned} &(\alpha_1t^3+\beta_1t^2+\gamma_1t+\delta_1)x^1+(\alpha_2t^3+\beta_2t^2+\gamma_2t+\delta_2)x^2+\\ &+(\alpha_3t^3+\beta_3t^2+\gamma_3t+\delta_3)x^3+(\alpha_4t^3+\beta_4t^2+\gamma_4t+\delta_4)x^4=0; \end{aligned}\tag{12}$$

эти плоскости при переменном t в общем являются соприкасающимися плоскостями пространственной кривой третьего порядка [1]. Плоскость, соответствующая точке A_1+tA_2, проходит через эту точку, если

$$\alpha_2=0,\ \beta_2+\alpha_1=0,\ \gamma_2+\beta_1=0,\ \delta_2+\gamma_1=0,\ \delta_1=0.$$

Плоскость, заданная уравнением (12), проходит через прямую A_1A_2, если

$$\alpha_1 t^2+\beta_1 t+\gamma_1=0.$$

Положим, что это уравнение имеет два действительных различных корня. Совмещая вершины A_1 и A_2 с точками, для которых плоскости (12) проходят через луч A_1A_2, получим:

$$\alpha_1=\gamma_1=0,\ \beta_1\neq 0.$$

Вершины A_3 и A_4 совмещаем с характеристическими точками плоскостей, соответствующих точкам A_1 и A_2, и получаем:

$$\beta_3=\gamma_3=\delta_3=0,\ \delta_4\neq 0;\ \alpha_4=\beta_4=\gamma_4=0,\ \alpha_3\neq 0.$$

Уравнение (12) в выбранном таким образом репере принимает вид

$$t^2 x^1-tx^2+at^3 x^3+\tilde{a}x^4=0. \tag{12'}$$

Требование, чтобы точка $d(A_1+tA_2)$ оставалась в плоскости (12′), приводит к дифференциальному уравнению

$$at^3\omega_2^3+at^2\omega_1^3+\tilde{a}\omega_2^4+\frac{\tilde{a}}{t}\omega_1^4-\{dt+t(\omega_2^2-\omega_1^1)-t^2\omega_2^1+\omega_1^2\}=0, \tag{13}$$

которое должно быть вполне интегрируемым, т.е. должны выполняться уравнения:

$$\begin{aligned}
&[\omega_2^1+a\omega_1^3,\ -\tilde{m}\omega_1^3+\tilde{n}\omega_2^4]=0,\\
&[-\tilde{m}\nabla a+a\omega_2^1,\ \omega_1^3]+[\tilde{n}\nabla a-a\omega_4^3,\ \omega_2^4]=0,\\
&[\nabla a+2a\tilde{m}\omega_1^2-am\omega_4^3+\tilde{m}\omega_3^1,\ \omega_1^3]+[-2a\tilde{n}\omega_1^2+an\omega_4^3-\tilde{n}\omega_3^1-\omega_4^1,\ \omega_2^4]-\\
&-3a\tilde{a}\tilde{m}[\omega_2^4,\ \omega_1^3]=0,\\
&[-2a\omega_1^2-\omega_3^1-\tilde{m}\omega_3^2-m\omega_4^1,\ \omega_1^3]+[-2\tilde{a}\omega_2^1+\omega_4^2+\tilde{n}\omega_3^2+n\omega_4^1,\ \omega_2^4]+\\
&+\{2a\tilde{a}+4a\tilde{a}(\tilde{m}n-m\tilde{n})\}[\omega_2^4,\ \omega_1^3]=0,\\
&[-2\tilde{a}m\omega_2^1+\tilde{a}\tilde{m}\omega_3^4+\omega_3^2+m\omega_4^2,\ \omega_1^3]+[\nabla\tilde{a}+2\tilde{a}n\omega_2^1-\tilde{a}\tilde{n}\omega_3^4-\\
&-n\omega_4^2,\ \omega_2^4]-3a\tilde{a}n[\omega_2^4,\ \omega_1^3]=0,\\
&[m\nabla\tilde{a}-\tilde{a}\omega_3^4,\ \omega_1^3]+[-n\nabla\tilde{a}+\tilde{a}\omega_1^2,\ \omega_2^4]=0,\\
&[\omega_1^2-\tilde{a}\omega_2^4,\ m\omega_1^3-n\omega_2^4]=0,
\end{aligned} \tag{14}$$

где

$$\nabla a\equiv da+a(2\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_3^3),$$
$$\nabla\tilde{a}\equiv d\tilde{a}+\tilde{a}(-\omega_1^1+2\omega_2^2-\omega_4^4).$$

Система уравнений (1), (14) – в инволюции с характерами $s_0=2$, $s_1=9$, $s_2=5$ (при $mn\tilde{m}\tilde{n}\neq 0$) и определяет конгруэнцию, расслояемую при помощи развертывающихся поверхностей, у которых ребрами возврата являются пространственные кривые третьего порядка, и связанные с этим геометрические конструкции с произволом пяти функций двух аргументов, причем, в отличие от п. 4, точки, в которых соответствующие им плоскости проходят через луч A_1A_2 конгруэнции, не совпадают с фокусами луча.

Отметим, наконец, что уравнения (10), (13), полученные геометрически, аналогичны уравнению, полученному в [2] аналитически.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
28.VI.1968

Литература

1. В. Бляшке, Введение в геометрию тканей, Москва, 1959.
2. К. И. Гринцевичюс, О семействах секущих гиперповерхностей пространства коррелятивных элементов, Лит. матем. сб., V, № 2 (1965), 332—333.
3. А. Дрейманас, О расслояемой конгруэнции, Лит. матем сб., II, № 1 (1962), 231.
4. Г. Ф. Лаптев, Геометрия погруженных многообразий, Труды Моск. мат. общ., 2 (1953), 275—382.
5. Ю. Лумисте, Общие проективные оснащения конгруэнций прямых, Лит. матем. сб., IX, № 1 (1969), 101—107.
6. С. П. Фиников, Метод внешних форм Картана, Москва—Ленинград, 1948.
7. С. П. Фиников, Теория конгруэнций, Москва—Ленинград, 1950.
8. С. П. Фиников, Теория пар конгруэнций, Москва, 1956.

APIE TIESIŲ KONGRUENCIJŲ IŠSLUOKSNIAVIMĄ IŠKLOJAMŲJŲ PAVIRŠIŲ PAGALBA

P. VAŠKAS

(*Reziumė*)

Darbe pateikiamas tiesių kongruencijų išsluoksniavimo, nagrinėto [8] darbe, apibendrinimas. [8] darbe reikėjo parodyti, kad kongruencijos tiesės taškams priskirta vienparametrinė plokštumų šeima sudarytų plokštumų pluoštą; šiame darbe reikia parodyti, kad minėta vienparametrinė plokštumų šeima gaubtų antros eilės kūgį arba išklojamąjį paviršių, kurio grįžimo briauna — erdvinė trečios eilės kreivė, t.y. paprasčiausius išklojamuosius paviršius.

SUR LA STRATIFICATION DES CONGRUENCES DE DROITES A L'AIDE DES SURFACES DÉVELOPPABLES

P. VAŠKAS

(*Résumé*)

Dans cet article on expose une généralisation de la stratification des congruences de droites qui a été considéré dans le travail [8]. Dans cet article on exige que la famille monoparamétrique des plans, associés aux points de droite de congruence, contournerait le cône de deuxième ordre ou la surface développable dont l'arête de renvoi serait la courbe spatiale de troisième ordre, c'est à dire, que la famille monoparamétrique des plans contournerait les plus simples surfaces développables tandis que dans le travail [8] on a exigé que la famille dite monoparamétrique des plans formerait le faisceau des plans.