IX LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1

1969

УДК–512.25+519.3:30.115

ДИХОТОМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ СТРОГО ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ. III

В. Б. БИСТРИЦКАС

Дихотомический выбор

Находим области решения для дихотомического процесса $f(x, y)$, определенного в [1], когда функции $A(x)$ и $B(y)$ – строго выпуклые.

Определения и обозначения, которые здесь приводятся, даны в [1] и [2]. Формулы и леммы из [1] и [2] обозначаются соответственно через $(N)_{\mathrm{I}}$, лемма N_{I} и $(N)_{\mathrm{II}}$, лемма N_{II}.

Лемма 1. *Пусть* $\alpha(x_1) \geqslant \beta(y_1)$. *Тогда:*

1) *если* $\varphi^*(x_2) \leqslant r_2\bar{\varphi}^*(x_2)$, *то*

$$f(x, y)=\left\{\begin{array}{ll} f_A(x, y) \text{ для } c \leqslant y \leqslant y^*(x), \\ f_B(x, y) \text{ для } y^*(x) < y \leqslant \overline{Y}, \end{array}\right\}, \quad x_2 \leqslant x \leqslant \overline{X}; \tag{1}$$

2) *если* $\varphi^*(x_2) > r_2\bar{\varphi}^*(x_2)$, *то*

$$f(x, y)=\left\{\begin{array}{ll} f_A(x, y) \text{ для } c \leqslant y \leqslant N^*(x), \\ f_B(x, y) \text{ для } N^*(x) < y \leqslant \overline{Y}, \end{array}\right\}, \quad x_2 \leqslant x \leqslant \overline{X}; \tag{2}$$

где $N^*(x)$ – *непрерывная функция, определенная соотношением*

$$N^*(x)=\left\{\begin{array}{ll} \bar{q}^*(x) \text{ для } x_2 \leqslant x \leqslant x_3, \\ y^*(x) \text{ для } x_3 < x \leqslant \overline{X}, \end{array}\right\}, \tag{3}$$

$$x_3=\max\{x : x_2 < x \leqslant \overline{X},\ q^*(x) \geqslant r_2\bar{q}^*(x)\}. \tag{4}$$

Доказательство. Утверждение 1) достаточно доказать для $x_2 < x \leqslant \overline{X}$, ибо при $x=x_2$ соотношение (1) является частным случаем леммы 7_{II}. Пусть x^0 – фиксированная точка интервала $(x_2, \overline{X}]$. Из допущения $\varphi^*(x_2) \leqslant r_2\bar{q}^*(x_2)$ согласно леммам 1_{I} и 2_{I} следует, что

$$\varphi^*(x^0) < r_2\bar{\varphi}^*(x^0),$$

так как $\bar{\varphi}^*(x^0) > y_1 \geqslant 0$. Таким образом, $(24)_{\mathrm{II}}$ дает, что

$$f(x^0, y) \neq f_{B^\infty}(x^0, y) \text{ для } c \leqslant y \leqslant \overline{Y}. \tag{5}$$

На основании $(45)_{\mathrm{I}}$

$$f_{AB}(x^0, y) \geqslant f_{BA}(x^0, y) \text{ для всех } y_0 < y \leqslant y^*(x^0).$$

Так как

$$f_{B^kA}(x^0,\ y)=p_2B(y)+\ \dots\ +p_2^{k-1}f_{BA}(x^0,\ r_2^{k-1}y),\qquad k\geqslant 1,$$

то

$$f_{B^kA}(x^0,\ y)\leqslant f_{B^{k-1}AB}(x^0,\ y)\ \text{при}\ y_0<r_2^{k-1}y\leqslant y^*(x^0).$$

Кроме того, ввиду $(11)_{\text{II}}$

$$f_{B^kA}(x^0,\ y)\leqslant \max\left[f_{B^\infty}(x^0,\ y),\ f_{B^{k-1}A}(x^0,\ y)\right],\qquad 0\leqslant r_2^{k-1}y\leqslant y_0.$$

Из (5) и последних двух неравенств заключаем, что

$$f(x^0,y)=f_A(x^0,y)\ \text{для}\ c\leqslant y\leqslant y^*(x^0). \tag{6}$$

Если функция $y(x)$ в точке x^0 не существует, то доказательство соотношения (1) закончено, ибо по $(48)_{\text{I}}$ и $(49)_{\text{I}}$ $y^*(x^0)=\bar{Y}$.

Остается рассмотреть случай, когда $\exists y(x^0)$. Тогда из утверждения 1) леммы 6_{I} следует существование функции $y(x)$ на интервале $[x_2,\ x^0]$, ибо $x_y<x_2$. Покажем, что

$$f_B(x^0,y)>f_A(x^0,y)\ \text{при}\ y(x^0)<y\leqslant \bar{Y}. \tag{7}$$

Допустим противное, т. е. пусть для некоторого $y^0\in(y(x^0),\ \bar{Y}]$

$$f_B(x^0,y^0)\leqslant f_A(x^0,y^0)=p_1A(x^0)+p_1f(r_1x^0,y^0). \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что тогда должно быть

$$f_B(r_1x^0,y^0)\leqslant f_A(r_1x^0,y^0)\ \text{при}\ r_1x^0\in(x_2,\ \bar{X}],$$

так как в противном случае из допущения (8) получили бы неравенство

$$f_{BA}(x^0,y^0)\leqslant f_{AB}(x^0,y^0)\ \text{при}\ y^0>y^*(x^0),$$

что противоречит соотношению $(46)_{\text{II}}$. Повторяя это рассуждение, получаем, что

$$f_B(r_1^{s-1}x^0,\ y^0)\leqslant f_A(r_1^{s-1}x^0,\ y^0)=p_1A(r_1^{s-1}x^0)+p_1f(r_1^sx^0,\ y^0) \tag{9}$$

для $r_1^sx^0\leqslant x_2<r_1^{s-1}x^0$, причем $s\geqslant 1$ при $x_2\neq 0$. В силу $(37)_{\text{I}}$, $(50)_{\text{I}}$ и монотонного убывания функции $y(x)$

$$y^0>y(r_1^{s-1}x^0)\geqslant\psi^*(r_1^{s-1}x^0)\geqslant\psi^*(r_1^sx^0),$$

ибо $r_1^sx^0\leqslant x_2<r_1^{s-1}x^0$. Так как ввиду $(26)_{\text{II}}$ и $(30)_{\text{II}}$

$$y^0>\psi^*(r_1^sx^0)\geqslant\bar{\varphi}^*(r_1^sx^0)\ \text{при}\ r_1^sx^0\in[\bar{x}_1,\ \bar{x}_2],$$

то на основании леммы 7_{II}

$$f(r_1^sx^0,\ y^0)=f_B(r_1^sx^0,\ y^0).$$

Подставляя выражение $f(r_1^sx^0,y^0)$ в (9), имеем

$$f_{BA}(r_1^{s-1}x^0,\ y^0)\leqslant f_B(r_1^{s-1}x^0,\ y^0)\leqslant f_{AB}(r_1^{s-1}x^0,\ y^0),$$

что противоречит $(46)_{\text{I}}$, ибо $y^0>y(r_1^{s-1}x^0)$. Полученное противоречие доказывает, что справедливо соотношение (7) при $x_2\neq 0$.

Рассмотрим случай, когда $x_2=0$. В силу $(29)_{\text{I}}^{\prime}$ и $(27)_{\text{II}}$ имеем

$$f(0,y)=f_B(0,y)>f_A(0,y)\ \text{при}\ \psi^*(x_2)<y\leqslant\bar{Y}.$$

Поэтому из непрерывности функции $f(x,y)$ в области $[0,\ \bar{X}]\times[0,\ \bar{Y}]$ следует существование $\varepsilon>0$, что

$$f(t\varepsilon,\ y)=f_B(t\varepsilon,\ y)\geqslant f_A(t\varepsilon,\ y),\qquad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

когда $y^*(t\varepsilon)<y\leqslant Y$, ибо $y^*(t\varepsilon)\geqslant\psi^*(t\varepsilon)$. Отсюда нетрудно сообразить, что подставляя $x_2+\varepsilon$ вместо x_2 соотношение (7) доказывается аналогично случаю $x_2\neq 0$.

Соотношения (6) и (7) устанавливают справедливость утверждения 1).

Докажем утверждение 2). Из соотношений $(68)_{\text{I}}$ и $(69)_{\text{I}}$, $(5)_{\text{II}}$ и $(6)_{\text{II}}$ и предположения $\varphi^*(x_2)>r_2\bar{\varphi}^*(x_2)$ следует существование $x_3>x_2$. Так как ввиду $(5)_{\text{II}}$ и $(6)_{\text{II}}$ $\bar{q}^*(x_2)=\bar{\varphi}^*(x_2)$, то соотношение (2) остается показать для $x_2<x\leqslant x_3$.

В силу утверждения 1) леммы 1_{II} и определения $\bar{q}^*(x)$

$$\bar{q}^*(x)>0 \text{ при } x_2<x\leqslant x_3,$$

ибо $x_{\bar{q}}<x_2$ и $\bar{Y}>0$. Поэтому ввиду $(66)_{\text{I}}$, $(67)_{\text{I}}$ и $\bar{q}^*(x)\geqslant r_2\bar{q}^*(x)$ следует существование функции $q(x)$ в интервале $[x_2, x_3]$. Пусть x^* – фиксированная точка интервала $(x_2, x_3]$. При помощи леммы 5_{II} имеем, что

$$f(x^*, y)=f_{B^\infty}(x^*, y) \text{ для } 0\leqslant y\leqslant q(x^*).$$

Так как

$$f_B(x^*, y)=p_2B(y)+p_2f(x^*, r_2y),$$

то ввиду последнего соотношения

$$f_B(x^*, y)=f_{B^\infty}(x^*, y) \text{ для } 0\leqslant y\leqslant \frac{q(x^*)}{r_2}. \tag{10}$$

Из предположения $\varphi^*(x_2)>r_2\bar{\varphi}^*(x_2)$ в силу лемм 1_{I} и 2_{I} заключаем, что

$$\varphi^*(x_1)>r_2\bar{\varphi}^*(x_1).$$

Поэтому согласно $(26)_{\text{II}}$

$$\psi^*(x_1)\geqslant\bar{\varphi}^*(x_1).$$

Таким образом

$$c=\min[y_1, \psi^*(x_1)]=y_1,$$

ибо $\bar{\varphi}^*(x_1)\geqslant y_1$. Так как на основании (4)

$$q(x^*)\geqslant r_2\bar{q}^*(x^*),$$

то из (10) и $(2)_{\text{II}}$ получаем, что

$$f_B(x^*, y)=f_{B^\infty}(x, y)\leqslant f_{AB^\infty}(x^*, y) \text{ при } c\leqslant y\leqslant\bar{q}^*(x^*). \tag{11}$$

Если не существует функции $\bar{q}(x)$ в точке x^*, то по определению

$$\bar{q}^*(x^*)=\bar{Y},$$

ибо $x^*>x_2$. Следовательно, используя (10), из (11) получаем доказательство (2) при $x^*\in(x_2, x_3]$, ибо $q(x^*)\geqslant r_2\bar{q}^*(x^*)$.

Рассмортим случай, когда $\exists\bar{q}(x^*)$. Из утверждения 1) леммы 1_{II} следует существование функции $\bar{q}(x)$ в интервале $[x_2, x^*]$. Покажем, что

$$f_B(x^*, y)=f_{B^\infty}(x^*, y)\geqslant f_A(x^*, y),\ \bar{q}(x^*)<y\leqslant\min\left[\frac{q(x^*)}{r_2}, \bar{Y}\right]=\bar{c}. \tag{12}$$

Пусть это не так, т. е. найдется такая точка $y^*\in(\bar{q}(x^*), \bar{c}]$, что

$$f_B(x^*, y^*)<f_A(x^*, y^*)=p_1A(x^*)+p_1f(r_1x^*, y^*). \tag{12'}$$

Если $r_1x^*\in(x_2, x_3)$, то согласно (10)

$$f_B(r_1x^*, y^*)=f_{B^\infty}(r_1x^*, y^*),$$

ибо

$$y^*\leqslant\frac{q(x^*)}{r_2}<\frac{q(r_1x^*)}{r_2}.$$

Так как $\bar{q}(r_1x^*)<\bar{q}(x^*)<y^*$, то ввиду $(3)_{\mathrm{II}}$

$$f_{AB^\infty}(r_1x^*, y^*)<f_{B^\infty}(r_1x^*, y^*)=f_B(r_1x^*, y^*).$$

Следовательно, из (12′) следует, что

$$f_B(r_1x^*, y^*)\leqslant f_A(r_1x^*, y^*) \text{ при } r_1x^*\in(x_2, x_3).$$

Итак, получаем

$$f_B(r_1^{\sigma-1}x^*, y^*)\leqslant f_A(r_1^{\sigma-1}x^*, y^*)=p_1A(r_1^{\sigma-1}x^*)+p_1f(r_1^{\sigma}x^*, y^*), \tag{13}$$
$$\sigma\geqslant 1;\ r_1^{\sigma}x^*\leqslant x_2<r_1^{\sigma-1}x^*,\ x_2\neq 0.$$

В силу $(6)_{\mathrm{II}}$ и $(37а)_{\mathrm{I}}$, имеем, что

$$\bar{q}(r_1^{\sigma-1}x^*)\geqslant\bar{\varphi}^*(r_1^{\sigma-1}x^*)\geqslant\bar{\varphi}^*(r_1^{\sigma}x^*). \tag{14}$$

Кроме того, согласно $(69)_{\mathrm{I}}$ и $(38)_{\mathrm{I}}$

$$\frac{q(r_1^{\sigma-1}x^*)}{r_2}\leqslant\frac{\varphi^*(r_1^{\sigma-1}x^*)}{r_2}<\frac{\varphi^*(r_1^{\sigma}x^*)}{r_2}, \tag{15}$$

ибо $\exists\varphi(r_1^{\sigma-1}x^*)$.

Таким образом,

$$\bar{\varphi}^*(r_1^{\sigma}x^*)<y^*<\frac{\varphi^*(r_1^{\sigma}x^*)}{r_2}.$$

Применяя формулу $(28)_{\mathrm{II}}$, получаем

$$f(r_1^{\sigma}x^*, y^*)=f_B(r_1^{\sigma}x^*, y^*)=p_2B(y^*)+p_2f(r_1^{\sigma}x^*, r_2y^*).$$

Так как $r_2y^*<\varphi^*(r_1^{\sigma}x^*)$, из леммы 4_{II} выводим, что

$$f(r_1^{\sigma}x^*, r_2y^*)=f_{B^\infty}(r_1^{\sigma}x^*, r_2y^*).$$

Следовательно,

$$f(r_1^{\sigma}x^*, y^*)=f_{B^\infty}(r_1^{\sigma}x^*, y^*).$$

Подставляя выражение $f(r_1^{\sigma}x^*, y^*)$ в (13), имеем

$$f(r_1^{\sigma-1}x^*, y^*)=f_{AB^\infty}(r_1^{\sigma-1}x^*, y^*).$$

Так как $y^*>\bar{q}(r_1^{\sigma-1}x^*)$, то на основании $(63)_{\mathrm{I}}$

$$f(r_1^{\sigma-1}x^*, y^*)<f_{B^\infty}^{**}(r_1^{\sigma-1}x^*, y^*).$$

Полученное противоречие завершает доказательство (12) при $x_2\neq 0$. Если $x_2=0$, то в силу $(28)_{\mathrm{II}}$ и непрерывности функции $f(x, y)$

$$f(t\varepsilon, y)>f_A(t\varepsilon, y) \text{ для } \bar{q}^*(t\varepsilon)<y\leqslant\bar{Y},$$

где $0\leqslant t\leqslant 1$, ε — достаточно малое положительное число, ибо $\bar{q}^*(t\varepsilon)\geqslant\bar{\varphi}^*(t\varepsilon)$ (см. соотн. $(6)_{\mathrm{II}}$). Далее соотношение (12) в интервале $[\varepsilon, x_3]$ доказывается аналогично случаю $x_2\neq 0$.

Если $\frac{q(x^*)}{r_2}\geqslant\bar{Y}$, то из (11) и (12) следует (2). Остается расммотреть случай, когда

$$\frac{q(x^*)}{r_2}<\bar{Y}.$$

Так как

$$f_B\left(x^*,\ \frac{q(x^*)}{r_2}\right)=p_2B\left(\frac{q(x^*)}{r_2}\right)+p_2f\left(x^*,\ q(x^*)\right),$$

то согласно $(19)'_{\text{II}}$

$$f_B\left(x^*,\ \frac{q(x^*)}{r_2}\right)=f_{B^\infty}\left(x^*,\ \frac{q(x^*)}{r_2}\right)=f_{BAB^\infty}\left(x^*,\ \frac{q(x^*)}{r_2}\right). \tag{16}$$

Отсюда, ввиду (12),

$$f_{BAB^\infty}\left(x^*,\ \frac{q(x^*)}{r_2}\right)\geqslant f_{AB^\infty}\left(x^*,\ \frac{q(x^*)}{r_2}\right)$$

или

$$f_{BA}\left(x^*,\ \frac{q(x^*)}{r_2}\right)\geqslant f_{AB}\left(x^*,\ \frac{q(x^*)}{r_2}\right).$$

Используя $(46)_{\text{I}}$ и $(47)_{\text{I}}$, получаем

$$\frac{q(x^*)}{r_2}\geqslant y(x^*). \tag{17}$$

Аналогично (7) доказывается, что

$$f_B(x^*,\ y)\geqslant f_A(x^*,\ y)\ \text{ при }\ y^*(x^*)\leqslant\frac{q(x^*)}{r_2}<y\leqslant\bar{Y}.$$

Следовательно, в силу произвольности $x^*\in(x_2,\ x_3]$ из (11), (12) и последнего соотношения вытекает (2) при $x_2<x\leqslant x_3$. Итак, утверждение 2) доказано для $x_2\leqslant x\leqslant x_3$. Остается доказать утверждение 2) для $x_3<x\leqslant\bar{X}$, когда $x_3\neq\bar{X}$.

Покажем, что

$$y^*(x_3)=\bar{q}^*(x_3)\ \text{ при }\ x_3\neq\bar{X}. \tag{18}$$

По определению

$$\frac{q^*(x_3)}{r_2}=\bar{q}^*(x_3).$$

Так как $\exists\ q(x_3)$, ибо $\bar{q}^*(x_3)>0$, то из (17) следует, что

$$\bar{q}^*(x_3)\geqslant y^*(x_3). \tag{19}$$

На основании (16) и $(2)_{\text{II}}$ имеем, что

$$f_{BAB^\infty}\left(x_3,\ \bar{q}^*(x_3)\right)=f_{B^\infty}\left(x_3,\ \bar{q}^*(x_3)\right)\leqslant f_{AB^\infty}\left(x_3,\ \bar{q}^*(x_3)\right),$$

ибо

$$\frac{q(x_3)}{r_2}=\bar{q}^*(x_3),$$

или

$$f_{BA}\left(x_3,\ \bar{q}^*(x_3)\right)\leqslant f_{AB}\left(x_3,\ \bar{q}^*(x_3)\right).$$

Таким образом, ввиду $(45)_{\text{I}}$

$$y^*(x_3)\geqslant\bar{q}^*(x_3).$$

Поэтому при помощи (19) получаем равенство (18).

Так как по определению x_3

$$r_2\bar{q}(x^*)>q^*(x^*),\quad x^*\in(x_3,\ \bar{X}],$$

то аналогично $(24)_{\text{II}}^{\bar{\ }}$ доказывается неравенстве

$$f(x^*,\ y)\neq f_{B^\infty}(x^*,\ y)\ \text{ для }\ c\leqslant y\leqslant\bar{Y}. \tag{20}$$

Имея в виду (18) и (20), соотношение (2) для $x_3 < x \leqslant \bar{X}$ доказывается аналогично (1).

Непрерывность функции $N^*(x)$ следует из непрерывности функций $\bar{q}^*(x)$, $y^*(x)$ и равенства (18). Лемма доказана.

Обозначим через y_2 максимальное решение уравнения

$$\beta(y) = \beta(r_2 y), \quad (0 \leqslant y \leqslant \bar{Y}).$$

Тогда аналогично лемме 4 доказывается следующая лемма.

Лемма 2. *Тогда и только тогда*

$$\frac{p_2 B(y)}{1-p_2} < \beta(y),$$

когда $0 < y < y_2$, *причем*

$$\frac{p_2 B(y)}{1-p_2} = \beta(y) \text{ только при } y = y_2,\ 0.$$

Лемма 3. *Если* $y^*(x^*) \leqslant \bar{q}^*(x^*)$ *при* $x^* \in [x_2, \bar{X}]$, *то*

$$y^*(x) \leqslant \bar{q}^*(x) \text{ для всех } x^* \leqslant x \leqslant \bar{X}. \tag{21}$$

Если $y^*(x^*) \geqslant \bar{q}^*(x^*)$ *при* $x^* \in [x_2, \bar{X}]$, *то*

$$y^*(x) \geqslant \bar{q}^*(x) \text{ для всех } x_2 \leqslant x \leqslant x^*. \tag{22}$$

Доказательство. Покажем соотнешение (21). Если функция $y(x)$ в точке x^* не существует, то согласно $(48)_{\mathrm{I}}$ и $(49)_{\mathrm{I}}$

$$y^*(x) = \bar{Y} \text{ для всех } x^* \leqslant x \leqslant \bar{X},$$

ибо $x_y < x_2$. Поэтому в силу $y^*(x^*) \leqslant \bar{q}^*(x^*)$ и определения $\bar{q}^*(x)$ получаем, что

$$y^*(x) = \bar{Y} = \bar{q}^*(x) \text{ для всех } x^* \leqslant x \leqslant \bar{X}.$$

Рассмотрим случай, когда $\exists\, y(x^*)$. Из $(42)_{\mathrm{I}}$ и $(2)_{\mathrm{II}}$ следует, что

$$\frac{p_1 A(x^*)}{1-p_1} = \frac{p_2 B\left(y(x^*)\right)}{1-p_2} \tag{23}$$

и

$$f_{AB^\infty}\left(x^*, \bar{q}^*(x^*)\right) \geqslant f_{B^\infty}\left(x^*, \bar{q}^*(x^*)\right).$$

Если подставить выражения $f_{AB^\infty}\left(x^*, \bar{q}^*(x^*)\right)$ и $f_{B^\infty}\left(x^*, \bar{q}^*(x^*)\right)$ в последнее неравенство, то оно примет вид

$$\frac{p_1 A(x^*)}{1-p_1} \geqslant \beta\left(\bar{q}^*(x^*)\right).$$

Имея в виду (23), получаем

$$\frac{p_1 A(x^*)}{1-p_1} = \frac{p_2 B\left(y(x^*)\right)}{1-p_2} \geqslant \beta\left(\bar{q}^*(x^*)\right). \tag{24}$$

Покажем, что $y(x^*) \notin (y_1, y_2)$. Допустим противное, т.е. $y(x^*) \in (y_1, y_2)$. Тогда в силу (24) и леммы 2 имеем

$$\beta\left(\bar{q}^*(x^*)\right) \leqslant \frac{p_2 B\left(y(x^*)\right)}{1-p_2} < \beta\left(y(x^*)\right).$$

Но из монотонного возрастания функции $\beta(y)$ в интервале $(y_1, \bar{Y}]$ заключаем, что

$$y_1 \leqslant \bar{q}^*(x^*) < y^*(x^*).$$

Это противоречит предположению $\bar{q}^*(x^*) \geqslant y^*(x^*)$. Итак, либо $y(x^*) \in [y_0, y_1]$ либо $y(x^*) \in [y_2, \bar{Y}]$.

Пусть $y(x^*) \in [y_0, y_1]$. Тогда докажем, что

$$y(x) \leqslant y_1 \leqslant \bar{q}^*(x) \text{ для всех } x^* \leqslant x \leqslant \bar{X}. \tag{25}$$

Пусть последнее неверно, т.е.

$$y(x^0) > y_1 \text{ для некоторого } x^0 \in [x^*, \bar{X}].$$

Тогда из непрерывности функции $y(x)$ по теореме Коши следует существование такой точки $a \in (x^0, \bar{X})$, что

$$y(a) = \bar{y}_1 \in (y_1, y_2).$$

Последнее соотношение противоречит доказанному выше утверждению

$$y(a) \notin (y_1, y_2),$$

что устанавливает справедливость (25).

Остается рассмотреть случай, когда $y(x^*) \in (y_2, \bar{Y}]$. Согласно лемме 6_I (аналогично (24))

$$\frac{p_1 A(x)}{1-p_1} = \frac{p_2 B\left(y(x)\right)}{1-p_2} \leqslant \beta\left(\bar{q}^*(x)\right) \text{ для } x^* \leqslant x \leqslant \bar{X}. \tag{26}$$

Так как функция $y(x)$ возрастает в интервале $[x_2, \bar{x}_y)$, то $y(x) \in [y_2, \bar{Y}]$ для всех $x^* \leqslant x \leqslant \bar{x}_y$. Таким образом, используя лемму 2, из (26) получим, что

$$\beta\left(y(x)\right) \leqslant \frac{p_2 B\left(y(x)\right)}{1-p_2} = \frac{p_1 A(x)}{1-p_1} \leqslant \beta\left(\bar{q}^*(x)\right).$$

Отсюда вытекает, что

$$y(x) \leqslant \bar{q}^*(x) \text{ для всех } x^* \leqslant x \leqslant \bar{x}_y.$$

Так как

$$y(\bar{x}_y) = \bar{Y} \text{ при } \bar{x}_y \neq \bar{X},$$

то из последнего неравенства и определений $y^*(x)$ и $\bar{q}^*(x)$ заключаем, что

$$y^*(x) \leqslant \bar{q}^*(x) \text{ для } x_y \leqslant x \leqslant \bar{X}.$$

Итак, соотношение (21) доказано.

Аналогично доказывается и (22).

Теорема 1. *Пусть $A(x)$ и $B(y)$ — строго выпуклые функции. Тогда процесс $f(x, y)$ имеет не более чем три области решения. Если $\alpha(x_1) \geqslant \beta(y_1)$, то*

$$f(x, y) = \left\{ \begin{array}{l} f_{B^\infty}(x, y) \text{ для } 0 \leqslant y < u(x), \\ f_A(x, y) \text{ для } u(x) \leqslant y \leqslant v(x), \\ f_B(x, y) \text{ для } v(x) < y \leqslant \bar{Y}, \end{array} \right\} \tag{27}$$

где непрерывные функции $u(x)$ и $v(x)$ определены соотношениями

$$u(x) = \begin{cases} \varphi^*(x), \text{ когда } 0 \leqslant x \leqslant x_2, \\ q^*(x), \text{ когда } x_2 \leqslant x \leqslant \bar{X}, \end{cases}$$

и

$$v(x)=\begin{cases}\min[\bar{\varphi}^*(x),\ \psi^*(x)], & \text{когда } 0\leqslant x\leqslant x_2,\\ \min\{y^*(x),\ \bar{q}^*(x)], & \text{когда } x_2\leqslant x\leqslant \bar{X},\end{cases}$$

причем функция $u(x)$ не убывает в интервале $[0, x_1)$ и не возрастает в интервале $(x_1, \bar{X}]$, а функция $v(x)$ не возрастает в интервале $[0, x_1)$ и не убывает в интервале $(x_1, \bar{X}]$ и $v(x_1)\geqslant u(x_1)$.

Если $\alpha(x_1)<\beta(y_1)$, то x и y меняются местами, (т.е. x становится функцией, а y – аргументом).

Доказательство. Леммы $4_{\rm II}$ и $5_{\rm II}$ устанавливают справедливость (27) в области $[0, \bar{X}]\times[0, c]$.

Если $\varphi^*(x_1)\leqslant r_2\bar{\varphi}^*(x_1)$, то в силу лемм $1_{\rm I}$ и $2_{\rm I}$

$$\varphi^*(x)\leqslant r_2\bar{\varphi}^*(x) \text{ для всех } 0\leqslant x\leqslant \bar{X}.$$

Таким образом, на основании $(26)_{\rm II}$

$$\psi^*(x)\geqslant\bar{\varphi}^*(x) \text{ для всех } 0\leqslant x\leqslant \bar{X}.$$

Поэтому отсюда и из $(27)_{\rm II}$ следует доказательство (27) в области

$$[0, x_2]\times[c, \bar{Y}] \text{ при } \varphi^*(x_1)\leqslant r_2\bar{\varphi}^*(x_1).$$

Если $\varphi^*(x_1)>r_2\bar{\varphi}^*(x_1)$, то в силу $(38)_{\rm II}$ и $(39)_{\rm II}$

$$\bar{\varphi}^*(x)\geqslant\psi^*(x) \text{ для } 0\leqslant x\leqslant \bar{x}_1 \text{ и } \bar{x}_2\leqslant x\leqslant x_2$$

и

$$\bar{\varphi}^*(x)\leqslant\psi^*(x) \text{ для } \bar{x}_1\leqslant x\leqslant \bar{x}_2.$$

Используя $(28)_{\rm II}$, получаем (27) в области $[0, x_2]\times[c, \bar{Y}]$ при $\varphi^*(x_1)>r_2\bar{\varphi}^*(x_1)$.

Если $\varphi^*(x_2)\leqslant r_2\bar{\varphi}^*(x_2)$, то согласно $(25)_{\rm II}$

$$\psi^*(x_2)\leqslant\bar{\varphi}^*(x_2).$$

Таким образом, в силу $(50)_{\rm I}$, $(51)_{\rm I}$, $(5)_{\rm II}$ и $(6)_{\rm II}$

$$y^*(x_2)\leqslant\bar{q}^*(x_2).$$

Отсюда и при помощи (21) выводим, что

$$y^*(x)\leqslant\bar{q}^*(x) \text{ для всех } x_2\leqslant x\leqslant \bar{X}.$$

По-видимому, из (1) вытекает (27) в области $[x_2, \bar{X}]\times[c, \bar{Y}]$ при $\varphi^*(x_2)\leqslant \leqslant r_2\bar{\varphi}^*(x_2)$.

Если $\varphi^*(x_2)>r_2\bar{\varphi}^*(x_2)$, то ввиду (18) из леммы 3 заключаем, что

$$y^*(x)\geqslant\bar{q}^*(x) \text{ для } x_2\leqslant x\leqslant x_3$$

и

$$y^*(x)\leqslant\bar{q}^*(x) \text{ для } x_3< x\leqslant \bar{X}.$$

Следовательно, согласно (2) получаем (27) в области $[x_2, \bar{X}]\times[c,\bar{Y}]$ при $\varphi^*(x_2)>r_2\bar{\varphi}^*(x_2)$.

Итак, соотношение (27) доказано.

Непрерывность функции $u(x)$ следует из $(68)_{\rm I}$ и $(69)_{\rm I}$ и непрерывности функций $\varphi^*(x)$ и $q^*(x)$. Так как функции $\min[\bar{\varphi}^*(x), \psi^*(x)]$ и $\min[y^*(x), \bar{q}^*(x)]$ непрерывны, то в силу $(50)_{\rm I}$, $(51)_{\rm I}$, $(5)_{\rm II}$ и $(6)_{\rm II}$ следует непрерывность функции $v(x)$ в интервале $[0, \bar{X}]$.

Теорема 2. *Если $A(x)$ и $B(y)$ — строго выпуклые функции, то*

$$f(x, y)=\begin{cases} f_A(x, y), \text{ когда } \alpha(x, y) \geqslant \beta(x, y), \\ f_B(x, y), \text{ когда } \alpha(x, y) \leqslant \beta(x, y), \end{cases} \tag{28}$$

где

$$\alpha(x, y)=\max[\alpha(x),\ p_1A(x)+p_1\beta(y),\ p_1A(x)+p_1p_2B(y)+p_1p_2\alpha(x)]$$

и

$$\beta(x, y)=\max[\beta(y),\ p_2B(y)+p_2\alpha(x),\ p_2B(y)+p_1p_2A(x)+p_1p_2\beta(y)].$$

Доказательство. Очевидно, по определению

$$\alpha(x, y)=\max[f_{A^\infty}(x, y),\ f_{AB^\infty}(x, y),\ f_{ABA^\infty}(x, y)] \tag{29}$$

и

$$\beta(x, y)=\max[f_{B^\infty}(x, y),\ f_{BA^\infty}(x, y),\ f_{BAB^\infty}(x, y)]. \tag{30}$$

Теорему докажем при условии $a(x_1) \leqslant \beta(y_1)$, так как в противном случае ($a(x_1) < \beta(y_1)$), считая y аргументом, а x — функцией, A меняем местами с B.

Из лемм 4_{II}, 5_{II} и 7_{II} следует, что

$$f_A(x, y)=f_{A^\infty}(x, y) \text{ при } f(x, y)=f_A(x, y)$$

и

$$f_B(x, y)=f_{B^\infty}(x, y) \text{ при } f(x, y)=f_B(x, y)$$

в области

$$[0, x_2]\times[0, v(x)]\cup[x_2, \bar{X}]\times[0, q^*(x))=K.$$

Поэтому, ввиду (29) и (30), получаем (28) в области K.

Докажем соотношение (28) в области

$$[0, x_2]\times(v(x), \bar{Y}]=Q.$$

Пусть x^0 — фиксированная точка интервала $[0, x_2]$. Выделим два случая:

а) $\min[\bar{\varphi}^*(x^0), \psi^*(x^0)]=\psi^*(x^0)$. Если функция $\psi(x)$ в точке x^0 не существует, то $\psi^*(x^0)=\bar{Y}$, и интервал $(v(x^0), \bar{Y}]$ окажется пустым. Поэтому предположим, что $\exists\psi(x^0)$. Тогда согласно $(30)_{\text{I}}$, лемме 7_{II} и теореме 1

$$f\Big(x^0, \psi(x^0)\Big)=f_{A^\infty}\Big(x^0, \psi(x^0)\Big)=f_{BA^\infty}\Big(x^0, \psi(x^0)\Big)\geqslant f_{ABA^\infty}\Big(x^0, \psi(x^0)\Big)$$

или

$$f_{BA}\Big(x^0, \psi(x^0)\Big)\geqslant f_{AB}\Big(x^0, \psi(x^0)\Big).$$

Подставляя выражения $f_{BA}\Big(x^0, \psi(x^0)\Big)$ и $f_{AB}\Big(x^0, \psi(x^0)\Big)$, имеем

$$p_2(1-p_1)B\Big(\psi(x^0)\Big)-p_1(1-p_2)A(x^0)\geqslant 0.$$

Так как функция $B(y)$ монотонно возрастает в интервале $(y_0, \bar{Y}]$, то

$$f_{BA}(x^0, y)\geqslant f_{AB}(x^0, y) \text{ при } \psi(x^0)\leqslant y\leqslant \bar{Y}.$$

Таким образом, отсюда и ввиду $(29)_{\text{I}}$

$$f_{BAB^\infty}(x^0, y)\geqslant f_{AB^\infty}(x^0, y)$$

и

$$f_{BA^\infty}(x^0, y)\geqslant \max[f_{ABA^\infty}(x^0, y),\ f_{A^\infty}(x^0, y)],$$

когда $\psi(x^0) \leqslant y \leqslant \bar{Y}$. Последние два неравенства при помощи теоремы 1 устанавливают справедливость (28) при условии а);

б) $\min[\psi^*(x^0), \bar{\varphi}^*(x^0)] = \bar{\varphi}^*(x^0) > \psi^*(x^0)$. Тогда согласно лемме 7_{II} и 30_{II} следует, что $\exists\, \varphi(x^0)$, ибо $\frac{\varphi(x^0)}{r_2} > \bar{\varphi}^*(x^0)$. Следовательно, из теоремы 1 и леммы 4_{II} получаем

$$f\left(x^0, \frac{\varphi(x^0)}{r_2}\right) = f_B\left(x^0, \frac{\varphi(x^0)}{r_2}\right) = p_2 B\left(\frac{\varphi(x^0)}{r_2}\right) +$$

$$+ p_2 f\left(x^0, \varphi(x^0)\right) = f_{BA^\infty}\left(x^0, \frac{\varphi(x^0)}{r_2}\right)$$

и

$$f(x^0, y) = f_{B^\infty}(x^0, y), \text{ когда } \bar{\varphi}^*(x^0) < y < \frac{\varphi(x^0)}{r_2}.$$

Отсюда заключаем, что

$$f_{BA}(x^0, y) \geqslant f_{AB}(x^0\ y), \text{ когда } \frac{\varphi(x^0)}{r_2} \leqslant y \leqslant \bar{Y},$$

и

$$f_{B^\infty}(x^0, y) > \alpha(x^0, y), \text{ когда } \bar{\varphi}^*(x^0) < y < \frac{\varphi(x^0)}{r_2}.$$

Из предпоследнего и (24) выводим, что

$$\max[f_{BA^\infty}(x^0, y), f_{BAB^\infty}(x^0, y)] \geqslant \max[f_{AB^\infty}(x^0, y), f_{ABA^\infty}(x^0, y)]$$

и

$$f_{B^\infty}(x^0, y) > f_{A^\infty}(x^0, y),$$

когда $\frac{\varphi(x^0)}{r_2} \leqslant y \leqslant \bar{Y}$. Последние три неравенства доказывают соотношение (28) в области Q при условии б).

Далее докажем (28) в области

$$[x_2, \bar{X}] \times [q^*(x), c] = \bar{Q}.$$

Пусть x^0 — произвольная точка интервала $[x_2, \bar{X}]$. Выделим два случая:

а) $\exists q(x^0)$. Тогда согласно $(19')_{\text{II}}$

$$f\left(x^0, q(x^0)\right) = f_{AB^\infty}\left(x^0, q(x^0)\right) \geqslant f_{BAB^\infty}\left(x^0, q(x^0)\right)$$

или

$$f_{AB}\left(x^0, q(x^0)\right) \geqslant f_{BA}\left(x^0, q(x^0)\right).$$

Так как

$$f_{AB}\left(x^0, q(x^0)\right) - f_{BA}\left(x^0, q(x^0)\right) = p_1(1-p_2)A(x^0) -$$

$$- p_2(1-p_1)B\left(q(x^0)\right),$$

то из монотонного убывания функции $B(y)$ в интервале $[0, y_0)$ следует, что

$$f_{AB}(x^0, y) \geqslant f_{BA}(x^0, y), \text{ когда } q(x^0) \leqslant y \leqslant y_0 \qquad (31)$$

при $q^*(x^0) \leqslant y_0$;

б) не существует функции $q(x)$ в точке x^0. Тогда по определению $q^*(x)$

$$q^*(x^0) = 0.$$

Таким образом, согласно $(64)_{\text{I}}$ имеем, что

$$f_{AB^\infty}(x^0, 0) \geqslant f_{B^\infty}(x^0, 0).$$

Подставляя выражения $f_{AB^\infty}(x^0,\ 0)$ и $f_{B^\infty}(x^0,\ 0)$, получаем

$$p_1(1-p_2)A(x^0)\geqslant p_2(1-p_1)B(0).$$

Так как

$$f_{AB}(x^0,\ y)-f_{BA}(x^0,\ y)=p_1(1-p_2)A(x^0)-p_2(1-p_1)B(y),$$

то

$$f_{AB}(x^0,\ y)\geqslant f_{BA}(x^0,\ y) \text{ для } q^*(x^0)=0\leqslant y\leqslant y_0. \tag{32}$$

Используя соотношения $(45)_{\text{I}}$, (31) и (32), выводим

$$f_{AB^\infty}(x^0,\ y)\geqslant f_{BAB^\infty}(x^0,\ y);$$

и

$$f_{ABA^\infty}(x^0,\ y)\geqslant f_{BA^\infty}(x^0,\ y),$$

когда $q^*(x^0)\leqslant y\leqslant c$, ибо ввиду $(51)_{\text{I}}$ $c\leqslant\psi^*(x^0)\leqslant y^*(x^0)$. Отсюда при помощи $(64)_{\text{I}}$, $(64)'_{\text{I}}$, и определения $\alpha(x,y)$, $\beta(x,y)$ выводим (28) в области $\overline{Q}$.

Остается доказать (28) в области

$$[x_2,\ \bar{X}]\times(c,\ \bar{Y}]=L.$$

Фиксируя точку x^0 интервала $[x_2,\ \bar{X}]$, выделим два случая:

а) $v(x^0)=\bar{q}^*(x^0)$. В силу неравенства $y^*(x^0)\geqslant\bar{q}^*(x^0)$ и соотношения $(45)_{\text{I}}$

$$\max[f_{AB^\infty}(x^0,\ y),\ f_{ABA^\infty}(x^0,\ y)]\geqslant\max[f_{BAB^\infty}(x^0,\ y),\ f_{BA^\infty}(x^0,\ y)],$$

когда $c\leqslant y\leqslant\bar{q}^*(x^0)$. Отсюда в силу $(2)_{\text{II}}$ вытекает, что

$$\alpha(x^0,y)\leqslant\beta(x^0,y) \text{ при } c<y\leqslant\bar{q}^*(x^0). \tag{33}$$

Согласно (12) имеем, что

$$\beta(x^0,\ y)\geqslant\alpha(x^0,\ y) \text{ при } \bar{q}^*(x^0)<y\leqslant\min\left[\frac{q(x^0)}{r_2},\ \bar{Y}\right]. \tag{34}$$

Если $\dfrac{q(x^0)}{r_2}<\bar{Y}$, то ввиду (17)

$$y^*(x^0)\leqslant\frac{q(x^0)}{r_2}.$$

Поэтому из $(46)_{\text{I}}$ и $(47)_{\text{I}}$ следует, что

$$\max[f_{BA^\infty}(x^0,\ y),\ f_{BAB^\infty}(x^0,\ y)]\geqslant\max[f_{ABA^\infty}(x^0,y),\ f_{AB^\infty}(x^0,\ y)], \tag{35}$$

когда $\dfrac{q(x^0)}{r_2}\leqslant y\leqslant\bar{Y}$. Кроме того, в силу $(51)_{\text{I}}$

$$y^*(x^0)\geqslant\psi^*(x^0).$$

Отсюда на основании $(29)_{\text{I}}$ и $(30)_{\text{I}}$ заключаем, что

$$f_{A^\infty}(x^0,\ y)\leqslant f_{BA^\infty}(x^0,\ y), \tag{36}$$

когда $y^*(x^0)\leqslant\dfrac{q(x^0)}{r_2}\leqslant y\leqslant\bar{Y}$. Следовательно, соотношения (33), (34), (35), (36) и теорема 1 доказывают (28) в области L при условии а);

б) $v(x^0)=y^*(x^0)$. По-видимому, согласно $(45)_{\text{I}}$ и $(46)_{\text{I}}$ можно написать

$$\max[f_{AB^\infty}(x^0,\ y),\ f_{ABA}(x^0,\ y)]\geqslant\max[f_{BAB^\infty}(x^0,\ y),\ f_{BA^\infty}(x^0,\ y)],$$

когда $c\leqslant y\leqslant y^*(x^0)$, и

$$\max[f_{BAB^\infty}(x^0,\ y),\ f_{BA^\infty}(x^0,\ y)]\geqslant\max[f_{AB^\infty}(x^0,\ y),\ f_{ABA^\infty}(x^0,\ y)],$$

когда $y^*(x^0)<y\leqslant\bar{Y}$. Используя (2), выводим, что

$$f_{AB^\infty}(x^0,\ y)\geqslant f_{B^\infty}(x^0,\ y) \text{ при } c\leqslant y\leqslant y^*(x^0),$$

ибо $y^*(x^0) \leqslant \bar{q}^*(x^0)$. Кроме того, ввиду $(51)_{\mathrm{I}}$ и $(29)_{\mathrm{I}}$

$$f_{BA^\infty}(x^0, y) > f_{A^\infty}(x^0, y) \text{ для } y^*(x^0) < y \leqslant \bar{Y}.$$

Из последних четырех неравенств при помощи теоремы 1 вытекает (28) в области L при условии б).

Итак, теорема доказана.

Замечание. Небольшое усложнение проведенных выкладок позволяет доказать теорему 2 для нестрого выпуклых функций $A(x)$ и $B(y)$.

Политомический выбор

Пусть

$$f(x_1\ x_2, \ldots, x_n) = \max\,[A_i\colon p_i\,[A_i(x_i) + f(x_1,\ x_2, \ldots, r_i x_i, \ldots, x_n)], \qquad (37)$$

где $x_i \geqslant 0$; $0 \leqslant p_i$, $r_i < 1$; $A_i(x_i)$ — непрерывные функции, определенные для $x_i \geqslant 0$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Обозначим

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Теорема 3. *Если $A_i(x_i)$ — строго выпуклые функции, то*

$$f(x) = f_{A_m}(x), \text{ когда } \alpha_{mj}(x) \geqslant \alpha_{jm}(x)$$

для всех $j \neq m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $1 \leqslant m \leqslant n$;
где

$$\alpha_{ji}(x) = \max\,[f_{A_j^\infty}(x),\ f_{A_jA_i^\infty}(x),\ f_{A_jA_iA_j^\infty}(x)];$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, n; \qquad i \neq j; \qquad 0 \leqslant x_i < \infty.$$

Доказательство следует из теоремы 2.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
27.III.1968

Литература

1. В. Б. Бистрицкас, Лит. матем. сб., VIII, № 3 (1968).
2. В. Б. Бистрицкас, Лит. матем. сб., VIII, № 4 (1968).

DICHOTOMINIS DINAMINIO PROGRAMAVIMO UŽDAVINYS GRIEŽTAI IŠKILOMS FUNKCIJOMS. III

V. BISTRICKAS

(*Reziumė*)

Sakykime,

$$f(x, y) = \max\begin{bmatrix} A: p_1\,[A(x) + f(r_1 x, y)], \\ B: P_2\,[B(y) + f(x, r_2 y)] \end{bmatrix}, \qquad (\gamma)$$

$0 \leqslant p_1, p_2, r_1, r_2, < 1$; $0 \leqslant x, y < \infty$. Įrodoma teoremos apie proceso $f(x, y)$ sprendimo sričių išsidėstymą ir apie jo elgesį, kai funkcijos $A(x)$ ir $B(y)$ — griežtai iškilos. Teorema apie proceso $(f(x, y)$ elgesį apibendrinama (37) funkcionalinei lygčiai.

DICHOTOMIC PROBLEM OF DYNAMIC PROGRAMMING FOR THE STRICTLY CONVEX FUNCTIONS. III

V. BISTRICKAS

(*Summary*)

Theorems about decision regions and about behaviour of solution are proved for the functional equation (γ) when functions $A(x)$ and $B(y)$ are strictly convex. Theorem about behaviour of solution is generalized for the equation (37).