IX LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1969

УДК–519.21

ОБ ОЦЕНКЕ СПЕКТРА ГАУССОВСКОГО СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

В. Г. АЛЕКСЕЕВ

1. Вопросам, связанным с оценкой спекртальной плотности стационарного случайного процесса по эмпирическим данным, посвящена обширная литература (см., например, [1–8]). При этом, в качестве исходных предположений, при которых исследуются статистические свойства (смещение и дисперсия) оценок спектральной плотности, обычно делаются те или иные предположения относительно степени гладкости спектральной плотности. Принятые в настоящей работе предположения такого рода являются значительно менее ограничительными, чем те, которые обычно встречаются при аналогичных исследованиях (см., например, Хеннан [1]). А именно, мы будем предполагать, что все рассматриваемые нами спектральные плотности (в том числе взаимные спектральные плотности в п. 5) являются функциями из класса $\mathrm{Lip}\,\alpha$, где $0<\alpha\leqslant 1$. Вместе с тем, мы ограничимся рассмотрением оценок спектральной плотности лишь гауссовских случайных процессов. Это последнее предположение позволит нам при исследовании статистических свойств этих оценок широко использовать аппарат рядов Фурье (в том числе кратных). Методы, применяемые в настоящей работе, уже использовались автором ранее [9] при исследовании задачи о выделении случайного гауссовского сигнала на фоне случайного гауссовского шума. Сходными методами пользовался Ибрагимов [10] при исследовании асимптотического поведения оценок спектральной функции гауссовского стационарного процесса. При вычислении смещения предлагаемых оценок, которое, в отличие от дисперсии, существенно зависит от степени гладкости спектральной плотности исследуемого процесса, мы будем ссылаться на теорему 1 §4 работы Никольского [11], дающую оценки остатка сумм Фейера 2π-периодических функций при различных условиях гладкости этих функций. Как и в работе [9], мы будем эту теорему называть просто теоремой Никольского.

Итак, пусть ξ_k, $k=1, 2, \ldots,$ – гауссовский стационарный случайный процесс со средним 0 и спектральной плотностью $f_\xi(\lambda)$ $(-\pi\leqslant\lambda\leqslant\pi)$. Положим

$$r_{jk}=\mathbf{M}\,\xi_k\xi_j=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-j)\lambda} f_\xi(\lambda)\,d\lambda \qquad (j,\ k=1,\ 2,\ \ldots).$$

В дальнейшем мы неоднократно будем пользоваться тем, что величины $(2\pi)^{-1}r_{jk}$ являются коэффициентами Фурье функции $f_\xi(\lambda)$.

В п. 2 мы исследуем асимптотическое (при $n\to\infty$) поведение оценок значения спектральной плотности $f_\xi(\lambda_0)$ в точке λ_0, построенных по известным n последовательным значениям процесса ξ_k. Мы ограничимся, для удобства, рассмотрением случая $0<|\lambda_0|<\pi$, хотя применяемые нами методы исследования пригодны и для случаев $\lambda_0=0$ и $\lambda_0=\pi$.

Последующие пункты посвящены обобщению полученных в п. 2 результатов в различных направлениях. В п. 3 мы рассматриваем несколько более общую, чем в п. 2, ситуацию, когда значение ξ_k с вероятностью p регистрируется и с вероятностью $q=1-p$ теряется. В п. 4 результаты п. 2 переносятся на случай процесса с непрерывным временем $\xi(t)$. Наконец, в. п. 5 исследуется асимптотическое поведение оценок взаимной спектральной плотности двух стационарных и стационарно связанных гауссовских случайных процессов.

2. Обозначим через $\mathbf{x}_n$ вектор-столбец первых n значений случайного процесса ξ_k. Если $g(\lambda)$ $(-\pi\leqslant\lambda\leqslant\pi)$ — некоторая интегрируемая по Лебегу вещественная или комплексная функция вещественного аргумента, мы будем обозначать через $H_n(g)$ матрицу Теплица n-го порядка с элементами

$$h_{jk}(g)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(k-j)\lambda}g(\lambda)\,d\lambda\qquad(j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).\tag{2.1}$$

Оценки величины $f_\xi(\lambda_0)$, где $0<|\lambda_0|<\pi$, мы будем искать в виде последовательности квадратичных форм

$$Q_n(\mathbf{x}_n)=\frac{1}{n}\,\mathbf{x}_n'H_n(\varphi_n)\,\mathbf{x}_n,\tag{2.2}$$

причем n пробегает последовательность нечетных чисел, а функция $\varphi_n(\lambda)$ $(|\lambda|\leqslant\pi)$ определяется соотношением

$$\varphi_n(\lambda)=\frac{b_n}{2}\left\{w\left[b_n(\lambda_0-\lambda)\right]+w\left[b_n(\lambda_0+\lambda)\right]\right\},\tag{2.3}$$

где b_n — последовательность положительных чисел такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n}+\frac{b_n}{n}\right)=0,\tag{2.4}$$

а $w(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ — произвольная неотрицательная функция такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}w(x)\,dx=1\tag{2.5}$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[|x|^\alpha w(x)+w^2(x)\right]dx<\infty.\tag{2.6}$$

Оценка вида (2.2) есть не что иное, как интеграл от периодограммы с весовой функцией $\varphi_n(\lambda)$. На выборе функции $w(x)$, приводящей к последовательности весовых функций $\varphi_n(\lambda)$, мы здесь останавливаться не будем. Примеры таких последовательностей могут быть найдены в уже упоминавшихся работах [1–8].

Пользуясь известными результатами, относящимися к распределению квадратичных форм от гауссовских случайных величин (см., например, Гренандер и Сегё [12], § 11.5), вычислим математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Q_n(\mathbf{x}_n)$. Прежде всего,

$$\mathbf{M}\,Q_n(\mathbf{x}_n)=\frac{2\pi}{n}\ \mathrm{Sp}\,H_n(\varphi_n)\,H_n(f_\xi)=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n(\lambda_1)\,d\lambda_1\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{n(\lambda_1-\lambda_2)}{2}}{2\pi n\sin^2\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}}\,f_\xi(\lambda_2)\,d\lambda_2=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n(\lambda)\,f_\xi(\lambda)\,d\lambda+\varepsilon_n',$$

где, согласно теореме Никольского,

$$\varepsilon_n'=\begin{cases}O(n^{-\alpha}), & 0<\alpha<1\\ O(n^{-1}\ln n), & \alpha=1.\end{cases}\tag{2.7}$$

Пусть, далее,

$$\varepsilon_n''=\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n(\lambda)\,f_\xi(\lambda)\,d\lambda-f_\xi(\lambda_0).$$

Пользуясь сделанными выше предположениями, нетрудно показать, что $\varepsilon_n''=O(b_n^{-\alpha})$. Таким образом, полагая $\varepsilon_n=\varepsilon_n'+\varepsilon_n''$, находим

$$\mathbf{M}\,Q_n(\mathbf{x}_n)=f_\xi(\lambda_0)+\varepsilon_n,\tag{2.8}$$

где

$$\varepsilon_n=\begin{cases}O(b_n^{-\alpha}),\\ O\left(\frac{\ln n}{n}+\frac{1}{b_n}\right).\end{cases}\tag{2.9}$$

Переходя к вычислению дисперсии случайной величины $Q_n(\mathbf{x}_n)$, имеем:

$$\mathbf{D}\,Q_n(\mathbf{x}_n)=\frac{8\pi^2}{n^2}\ \mathrm{Sp}\left[H_n(\varphi_n)\,H_n(f_\xi)\right]^2=$$

$$=\frac{1}{2\pi^2n^2}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n(\lambda_1)\,d\lambda_1\int_{-\pi}^{\pi}f_\xi(\lambda_2)\,d\lambda_2\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n(\lambda_3)\,d\lambda_3\times$$

$$\times\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\frac{n(\lambda_1-\lambda_2)}{2}\,\sin\frac{n(\lambda_2-\lambda_3)}{2}\,\sin\frac{n(\lambda_3-\lambda_4)}{2}\,\sin\frac{n(\lambda_4-\lambda_1)}{2}}{\sin\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}\,\sin\frac{\lambda_2-\lambda_3}{2}\,\sin\frac{\lambda_3-\lambda_4}{2}\,\sin\frac{\lambda_4-\lambda_1}{2}}\,f_\xi(\lambda_4)\,d\lambda_4=$$

$$=\frac{2}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\varphi_n(\lambda_1)\,f_\xi(\lambda_2)\,\frac{\sin\frac{n(\lambda_1-\lambda_2)}{2}}{\sin\frac{(\lambda_1-\lambda_2)}{2}}\right]d\lambda_1\,d\lambda_2\times$$

$$\times\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{4\pi^2}\left[\varphi_n(\lambda_3)\,f_\xi(\lambda_4)\,\frac{\sin\frac{n(\lambda_4-\lambda_3)}{2}}{\sin\frac{\lambda_4-\lambda_3}{2}}\right]\frac{\sin\frac{n(\lambda_3-\lambda_2)}{2}\,\sin\frac{n(\lambda_4-\lambda_1)}{2}}{\sin\frac{\lambda_3-\lambda_2}{2}\,\sin\frac{\lambda_4-\lambda_1}{2}}\,d\lambda_3\,d\lambda_4.$$

Отсюда, пользуясь неравенствами Коши-Буняковского и Бесселя (ср. [9], доказательство теоремы 1), находим

$$\mathbf{D}\,Q_n(\mathbf{x}_n) \leqslant \frac{4\pi}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n^2(\lambda_1)\,d\lambda_1\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{n(\lambda_1-\lambda_2)}{2}}{2\pi n\sin^2\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}}f_\xi^2(\lambda_2)\,d\lambda_2=$$

$$=\frac{2\pi b_n}{n}f_\xi^2(\lambda_0)\int_{-\infty}^{\infty}w^2(x)\,dx+o\left(\frac{b_n}{n}\right). \tag{2.10}$$

К сожалению, применение неравенства Коши-Буняковского приводит к появлению в формуле (2.10) знака неравенства, в то время как другие методы (см., например, [4, 8, 13]) позволяют получить здесь асимптотическое равенство.

Мы можем теперь предложить также некоторые рекомендации относительно выбора последовательности b_n. Если исходить из стремления минимизировать величину

$$\mathbf{M}\,[Q_n(\mathbf{x}_n)-f_\xi(\lambda_0)]^2=\mathbf{D}\,Q_n(\mathbf{x}_n)+[\mathbf{M}\,Q_n(\mathbf{x}_n)-f_\xi(\lambda_0)]^2, \tag{2.11}$$

то следует выбирать последовательность b_n так, чтобы при $n\to\infty$ оба слагаемых в правой части (2.11) были одного порядка малости. Легко видеть, что полученные нами оценки сверху для обоих слагаемых в правой части (2.11) будут одного порядка, если

$$b_n\sim n^{\frac{1}{1+2\alpha}}, \tag{2.12}$$

т. е. b_n есть величина порядка $n^{\frac{1}{1+2\alpha}}$. В этом случае будем иметь

$$\mathbf{M}\,[Q_n(\mathbf{x}_n)-f_\xi(\lambda_0)]^2=O\left(n^{-\frac{2\alpha}{1+2\alpha}}\right). \tag{2.13}$$

Пусть теперь нас интересует интеграл

$$\int_{\lambda_1\leqslant|\lambda|\leqslant\lambda_2}f_\xi(\lambda)\,d\lambda\quad(0\leqslant\lambda_1<\lambda_2\leqslant\pi). \tag{2.14}$$

Положим, для нечетного n,

$$Q(\mathbf{x}_n)=\frac{1}{n}\,\mathbf{x}_n'\,H_n(\varphi)\,\mathbf{x}_n, \tag{2.15}$$

где $\varphi(\lambda)$ — характеристическая функция λ-множества $\{\lambda_1\leqslant|\lambda|\leqslant\lambda_2\}$. В этом случае легко находим (ср. Ибрагимов [10], §§ 1 и 2)

$$\mathbf{M}\,Q(\mathbf{x}_n)=\int_{\lambda_1\leqslant|\lambda|\leqslant\lambda_2}f_\xi(\lambda)\,d\lambda+\varepsilon_n', \tag{2.16}$$

где ε_n' определяется соотношением (2.7), и

$$\mathbf{D}\,Q(\mathbf{x}_n)\leqslant\frac{4\pi}{n}\int_{\lambda_1\leqslant|\lambda|\leqslant\lambda_2}f_\xi^2(\lambda)\,d\lambda+o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{2.17}$$

3. Перейдем к рассмотрению более общей задачи (ср. [14, 15]), когда спектральную плотность $f_\xi(\lambda)$ процесса ξ_k необходимо оценить по наблюдениям

случайного процесса $\eta_k=\omega_k\xi_k$, где случайные величины ω_k $(k=1,\ 2,\ \ldots)$ независимы в совокупности, независимы с процессом ξ_k и равны единице с вероятностью p $(0<p<1)$ и нулю с вероятностью $q=1-p$. Будем обозначать через $\mathbf{y}_n$ вектор-столбец первых n значений процесса η_k и через E_n — единичную матрицу порядка n. Положим

$$S_n(\mathbf{y}_n)=\frac{1}{np^2}\ \mathbf{y}_n'\left(H_n(\varphi_n)-qh_{11}(\varphi_n)\,E_n\right)\mathbf{y}_n, \tag{3.1}$$

где n, по-прежнему, нечетно, а функция $\varphi_n(\lambda)$ $(|\lambda|\leqslant\pi)$ определяется соотношениями (2.3)–(2.6). Легко видеть, что

$$\mathbf{M}\,S_n(\mathbf{y}_n)=\frac{1}{np^2}\ \mathbf{M}\,\mathbf{x}_n'\left(p^2H_n(\varphi_n)+pqh_{11}(\varphi_n)\,E_n-pqh_{11}(\varphi_n)\,E_n\right)\mathbf{x}_n=$$
$$=\frac{1}{n}\ \mathbf{M}\,\mathbf{x}_n'\,H_n(\varphi_n)\,\mathbf{x}_n.$$

Отсюда, в соответствии с результатами п. 2, следует, что

$$\mathbf{M}\,S_n(\mathbf{y}_n)=\frac{2\pi}{n}\ \mathrm{Sp}\,H_n(\varphi_n)\,H_n(f_\xi)=f_\xi(\lambda_0)+\varepsilon_n, \tag{3.2}$$

где величина ε_n определяется соотношением (2.9). Далее, для дисперсии случайной величины $S_n(\mathbf{y}_n)$ имеет место соотношение

$$\mathbf{D}\,S_n(\mathbf{y}_n)=\mathbf{M}\,S_n^2(\mathbf{y}_n)-\left[\mathbf{M}\,S_n(\mathbf{y}_n)\right]^2=$$
$$=\frac{1}{n^2p^4}\left[\sum_{j,k,l,m}h_{jk}(\varphi_n)\,h_{lm}(\varphi_n)\,\mathbf{M}\,\eta_j\,\eta_k\,\eta_l\,\eta_m-\right.$$
$$\left.-2qh_{11}(\varphi_n)\sum_{j,k,l}h_{jk}(\varphi_n)\,\mathbf{M}\,\eta_j\,\eta_k\,\eta_l^2+q^2h_{11}(\varphi_n)\sum_{j,l}\mathbf{M}\,\eta_j^2\,\eta_l^2\right]-$$
$$-\frac{4\pi^2}{n^2}\left[\mathrm{Sp}\,H_n(\varphi_n)\,H_n(f_\xi)\right]^2, \tag{3.3}$$

где все индексы суммирования изменяются от 1 до n. Отсюда, пользуясь формулой

$$\mathbf{M}\eta_j\,\eta_k\,\eta_l\,\eta_m=(r_{jk}\,r_{lm}+r_{jl}\,r_{km}+r_{jm}\,r_{kl})\,\mathbf{M}\omega_j\,\omega_k\,\omega_l\,\omega_m, \tag{3.4}$$

получаем

$$\mathbf{D}S_n(\mathbf{y}_n)=\frac{8\pi^2}{n^2}\ \mathrm{Sp}\,[H_n(\varphi_n)\,H_n(f_\xi)]^2+$$
$$+\frac{4q}{n^2p}\sum_{j,k,m}h_{jk}(\varphi_n)\,h_{jm}(\varphi_n)\,(r_{11}\,r_{km}+2r_{jk}\,r_{jm})+$$
$$+\frac{2q^2}{n^2p^2}\sum_{j,k}h_{jk}^2(\varphi_n)\,(r_{11}^2+2r_{jk}^2)-$$
$$-\frac{12q}{n^2p}\,r_{11}\,h_{11}(\varphi_n)\sum_{j,k}h_{jk}(\varphi_n)\,r_{kj}-\frac{3q\,(2-3p)}{n^2p^2}\,h_{11}^2(\varphi_n)\sum_j r_{jj}^2. \tag{3.5}$$

Будем оценивать отдельно каждое слагаемое в правой части (3.5). Как было установлено в . . 2,

$$\frac{8\pi^2}{n^2}\,\mathrm{Sp}\,[H_n(\varphi_n)\,H_n(f_\xi)]^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2\pi b_n}{n}\, f_\xi^2(\lambda_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} w^2(x)\,dx + o\left(\frac{b_n}{n}\right). \tag{3.6}$$

Так как при любом $j=1, 2, \ldots$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |r_{jk}|^{\frac{2(1+\alpha)}{1+2\alpha}} < K < \infty$$

(см., например, Зигмунд [16], гл. VI, теорема (3.10)), то, в силу неравенства Гёльдера,

$$\frac{8q}{n^2 p}\sum_j\left(\sum_k h_{jk}(\varphi_n)\,r_{jk}\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{8q}{n^2 p}\sum_j\left(\sum_k |h_{jk}(\varphi_n)|^{2(1+\alpha)}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}\left(\sum_k |r_{jk}|^{\frac{2(1+\alpha)}{1+2\alpha}}\right)^{\frac{1+2\alpha}{1+\alpha}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{L}{n^2}\sum_j\left(\sum_k h_{jk}^2(\varphi_n)\right)^{\frac{1}{1+\alpha}},$$

где L — некоторая постоянная. Отсюда следует

$$\frac{8q}{n^2 p}\sum_j\left(\sum_k h_{jk}(\varphi_n)\,r_{jk}\right)^2 \leqslant \frac{L}{n}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi_n^2(\lambda)\,d\lambda\right)^{\frac{1}{1+\alpha}} = O\left(n^{-1} b_n^{\frac{1}{1+\alpha}}\right). \tag{3.7}$$

Далее, полагая $e(\lambda)\equiv 1$ ($|\lambda|\leqslant\pi$), находим

$$\frac{4qr_{11}}{n^2 p}\sum_{j,k,m} h_{jk}(\varphi_n)\,r_{km}\,h_{mj}(\varphi_n) = \frac{8\pi q r_{11}}{n^2 p}\,\mathrm{Sp}\,H_n(\varphi_n)\,H_n(f_\xi)\,H_n(\varphi_n) =$$
$$= \frac{8\pi q r_n}{n^2 p}\,\mathrm{Sp}\,H_n(\varphi_n)\,H_n(f_\xi)\,H_n(\varphi_n)\,H_n(e) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{4qr_{11}}{np}\left\{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi_n^2(\lambda_1)\,d\lambda_1\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{n(\lambda_1-\lambda_2)}{2}}{2\pi n\sin^2\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}}\,f_\xi^2(\lambda_2)\,d\lambda_2\right\}^{\frac{1}{2}} \times$$
$$\times\left\{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi_n^2(\lambda_1)\,d\lambda_1\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{n(\lambda_1-\lambda_2)}{2}}{2\pi n\sin^2\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}}\,d\lambda_2\right\}^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{4qr_{11}}{np}\left[f_\xi(\lambda_0)+o(1)\right]\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi_n^2(\lambda)\,d\lambda.$$

Следовательно,

$$\frac{4qr_{11}}{n^2 p}\sum_{j,k,m} h_{jk}(\varphi_n)\,r_{km}\,h_{mj}(\varphi_n) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2qr_{11}b_n}{np}\, f_\xi(\lambda_0)\int\limits_{-\infty}^{\infty} w^2(x)\,dx + o\left(\frac{b_n}{n}\right). \tag{3.8}$$

Далее,

$$\frac{2q^2r_{11}^2}{n^2p^2}\sum_{j,k}h_{jk}^2(\varphi_n)\leqslant\frac{q^2r_{11}^2}{\pi np^2}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n^2(\lambda)\,d\lambda=$$

$$=\frac{q^2r_{11}^2b_n}{2\pi np^2}\int_{-\infty}^{\infty}w^2(x)\,dx+o\left(\frac{b_n}{n}\right). \qquad (3.9)$$

Наконец, нетрудно показать, что

$$\frac{4q^2}{n^2p^2}\sum_{j,k}h_{jk}^2(\varphi_n)\,r_{jk}^2-\frac{12q}{n^2p}\,r_{11}\,h_{11}(\varphi_n)\sum_{j,k}h_{jk}(\varphi_n)\,r_{kj}-$$

$$-\frac{3q(2-3p)}{n^2p}\,h_{11}^2(\varphi_n)\sum_j r_{jj}^2=O\left(\frac{1}{n}\right). \qquad (3.10)$$

Сопоставляя теперь (3.5) – (3.10) и замечая, что

$$r_{11}=\int_{-\pi}^{\pi}f_\xi(\lambda)\,d\lambda,$$

находим

$$\mathbf{D}\,S_n(\mathbf{y}_n)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2\pi b_n}{n}\int_{-\infty}^{\infty}w^2(x)\,dx\left[f_\xi(\lambda_0)+\frac{q}{2\pi p}\int_{-\pi}^{\pi}f_\xi(\lambda)\,d\lambda\right]^2+o\left(\frac{b_n}{n}\right). \qquad (3.11)$$

Результат (3.11), после замены в нем знака неравенства на приближенное равенство, совпадает с результатом Шейнока [15], полученным, однако, при заметно более сильных ограничениях (которые автор, впрочем, даже точно не формулирует, ограничиваясь требованием „достаточной гладкости“ спектральной плотности и последовательности весовых функций).

4. Предположим теперь, что $\xi(t)$ $(-\infty<t<\infty)$ – гауссовский стационарный случайный процесс со средним 0 и спектральной плотностью $f_\xi(\lambda)$ $(-\infty<\lambda<<\infty)$. Несколько видоизменяя рассуждения п. 2 и пользуясь вместо рядов Фурье их непрерывным аналогом – интегралом Фурье, нетрудно для процесса $\xi(t)$ получить результаты, аналогичные тем, которые были получены в п. 2 для процесса с дискретным временем ξ_k. Пусть по конечной реализации $x(t)$ случайного процесса $\xi(t)$ требуется оценить величину $f_\xi(\lambda_0)$, где $\lambda_0\neq0$. Положим, для натурального n,

$$Q_n(x)=\frac{1}{2\pi n}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n(\lambda)\,d\lambda\int_0^n\int_0^n e^{i(s-t)\lambda}\,x(s)\,x(t)\,ds\,dt, \qquad (4.1)$$

где функция $\varphi_n(\lambda)$ $(-\infty<\lambda<\infty)$ определяется соотношениями (2.3) – (2.6). Тогда с помощью несложного перенесения теоремы Никольского (или хотя бы лишь предшествующих им менее точных результатов Бернштейна [17] о сходимости сумм Фейера для функций из класса Lip α) на случай интегралов Фурье можно показать, что

$$\mathbf{M}\,Q_n(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n(\lambda_1)\,d\lambda_1\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{n(\lambda_1-\lambda_2)}{2}}{2\pi n\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}\right)^2}f_\xi(\lambda_2)\,d\lambda_2=f_\xi(\lambda_0)+\varepsilon_n, \quad (4.2)$$

где величина ε_n определяется соотношением (2.9). Далее, для дисперсии $Q_n(x)$ находим

$$\mathbf{D}Q_n(x)=\frac{2}{n^3}\int\int_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi_n(\lambda_1)f_\xi(\lambda_2)\frac{\sin\frac{n(\lambda_1-\lambda_2)}{2}}{\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}}\right]d\lambda_1\,d\lambda_2\times$$

$$\times\int\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4\pi^2}\left[\varphi_n(\lambda_3)f_\xi(\lambda_4)\frac{\sin\frac{n(\lambda_4-\lambda_3)}{2}}{\frac{\lambda_4-\lambda_3}{2}}\right]\frac{\sin\frac{n(\lambda_3-\lambda_2)}{2}\sin\frac{n(\lambda_4-\lambda_1)}{2}}{\frac{\lambda_3-\lambda_2}{2}\cdot\frac{\lambda_4-\lambda_1}{2}}\,d\lambda_3\,d\lambda_4.$$

Отсюда, аналогично выводу формулы (2.10), получается неравенство

$$\mathbf{D}Q_n(x)\leqslant\frac{4\pi}{n}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n^2(\lambda_1)\,d\lambda_1\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{n(\lambda_1-\lambda_2)}{2}}{2\pi n\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}\right)^2}f_\xi^2(\lambda_2)\,d\lambda_2=$$

$$=\frac{2\pi b_n}{n}f_\xi^2(\lambda_0)\int_{-\infty}^{\infty}w^2(x)\,dx+o\left(\frac{b_n}{n}\right).\tag{4.3}$$

5. Предположим теперь, что (ξ_k,η_k), $k=1,2,\ldots,$ – двумерный вещественный гауссовский стационарный случайный процесс со средним 0 и матрицей спектральных плотностей

$$\Phi(\lambda)=\begin{pmatrix}f_{\xi\xi}(\lambda) & f_{\xi\eta}(\lambda)\\ f_{\eta\xi}(\lambda) & f_{\eta\eta}(\lambda)\end{pmatrix}\quad(|\lambda|\leqslant\pi).\tag{5.1}$$

Известно, что $\Phi(\lambda)$ – эрмитова неотрицательно определенная матрица. Задача об оценке взаимной спектральной плотности $f_{\xi\eta}(\lambda)$ случайных процессов ξ_k и η_k рассматривалась в работах [13, 18]. Нас будет интересовать величина $f_{\xi\eta}(\lambda_0)$ где $0<|\lambda_0|<\pi$. В качестве оценки величины $f_{\xi\eta}(\lambda_0)$ рассмотрим, для нечетного n, билинейную форму

$$Q_n(\mathbf{x}_n,\mathbf{y}_n)=\frac{1}{n}\mathbf{x}_n'H_n(\psi_n)\mathbf{y}_n,\tag{5.2}$$

где $\mathbf{x}_n$ $(\mathbf{y}_n)$ – вектор-столбец первых n значений случайного процесса ξ_k (соответственно, η_k), а функция $\psi_n(\lambda)$ $(|\lambda|\leqslant\pi)$ определяется соотношением

$$\psi_n(\lambda)=b_n w\left[b_n(\lambda-\lambda_0)\right].\tag{5.3}$$

Легко видеть, что

$$\mathbf{M}Q_n(\mathbf{x}_n,\mathbf{y}_n)=\frac{2\pi}{n}\operatorname{Sp}H_n(\psi_n)H_n(f_{\xi\eta})=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\psi_n(\lambda_1)\,d\lambda_1\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{n(\lambda_1-\lambda_2)}{2}}{2\pi n\sin^2\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}}f_{\xi\eta}(\lambda_2)\,d\lambda_2.$$

Отсюда, как и в п. 2, следует

$$\mathbf{M}Q_n(\mathbf{x}_n,\mathbf{y}_n)=f_{\xi\eta}(\lambda_0)+\varepsilon_n,\tag{5.4}$$

где ε_n — комплексная величина, порядок малости которой определяется соотношением (2.9). Далее, нетрудно показать, что

$$\mathbf{D}\,Q_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) = \mathbf{M}\,|\,Q_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) - \mathbf{M}\,Q_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)\,|^2 =$$

$$= \frac{4\pi^2}{n^2}\,\mathrm{Sp}\Big[H_n(\psi_n)\,H_n(f_{\xi\eta})\,\overline{H_n(\psi_n)}\,H_n(f_{\xi\eta}) +$$

$$+ H_n(\psi_n)\,H_n(f_{\xi\xi})\,H_n(\psi_n)\,H_n(f_{\eta\eta})\Big].$$

Отсюда, пользуясь теми же приемами, что и в п. 2, находим

$$\mathbf{D}Q_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\pi b_n}{n}\Big[|f_{\xi\eta}(\lambda_0)|^2 + f_{\xi\xi}(\lambda_0) f_{\eta\eta}(\lambda_0)\Big] \int_{-\infty}^{\infty} w^2(x)\,dx + o\left(\frac{b_n}{n}\right). \tag{5.5}$$

Если нас интересует только вещественная (мнимая) часть величины $f_{\xi\eta}(\lambda_0)$, то, в целях уменьшения дисперсии оценки, в качестве функции $\psi_n(\lambda)$ может быть выбрана четная (соответственно, нечетная) функция.

Результаты настоящего пункта, как и в одномерном случае, могут быть перенесены на случай процессов с непрерывным временем. Мы не будем на этом останавливаться.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность А. М. Яглому за внимание к работе.

Москва

Поступило в редакцию
13.XII.1967

Литература

1. Э. Хеннан, Анализ временных рядов, перевод с английского под ред. Ю. А. Розанова, «Наука», М., 1964.
2. R. B. Blackman : : I. W. Tukey, The measurement of power spectra from the point of view of communication engeneering, Dover Publications, New York, 1959.
3. E. Parzen, Mathematical considerations in the estimation of spectra, Technometrics, 3, 1961, 167–190.
4. U. Grenander and M. Rosenblatt, Statistical analysis of stationary time series, Wiley, New York, 1957.
5. R. H. Jones, Spectral estimates and their distributions, p. 1, Skand. Aktuarietidskr., 1962, No. 1–2, 36–69; p. II, *ibid.*, 1962, No. 3–4, 135–153.
6. D. R. Cox and P. A. W. Lewis, The statistical analysis of series of events, London—New York, 1966.
7. W. Freiberger and U. Grenander, Approximate distributions of noise power measurements, Quarterly of applied mathematics, **XVII**, No. 3 (1959), 271–283.
8. M. Rosenblatt, Random processes, Oxford university press, New York, 1962.
9. В. Г. Алексеев, Новые теоремы о свойствах «почти наверное» реализаций гауссовских случайных процессов, Лит. матем. сб. **III**, № 2 (1963), 5—15.
10. И. А. Ибрагимов, Об оценке спектральной функции стационарного гауссовского процесса, Теория вероят. и ее примен., **VIII**, № 4 (1963), 391—430.
11. С. М. Никольский, Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, XV, 1945.
12. У. Гренандер и Г. Сегё, Теплицевые формы и их приложения, перевод с английского Н. С. Ландкофа, ИЛ, М., 1961.

13. M. Rosenblatt, Statistical analysis of stochastic processes with stationary residuals, Probability and Statistics, The Harald Cramér Volume (ed. by U. Grenander), Stockholm—New York, 1959, 246–275.
14. E. Parzen, On spectral analysis with missing observations and amplitude modulation Sankhyā, ser. A, 25, 1963, 383–392.
15. P. A. Scheinok, Spectral analysis with random missed observations: the binomial case, Ann. Math., Statist., 36, No. 3, (1965), 971–977.
16. А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, т. 1, перевод с английского под ред. Н. К. Бари, «Мир», М., 1965.
17. S. Bornstein, Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes de degré donné, Mém. de, l'Acad. Roy. de Belgique, 2-me ser., 4, 1912, 1–104.
18. W. Freiberger, Approximate distribution of cross-spectral estimates for Gaussian proceses, Proc. Symp. Time Series Analysis (ed. by M. Rosenblatt), Wiley, New York, 1963, 244–259.

APIE ATSITIKTINIO STACIONARINIO GAUSO PROCESO SPEKTRO ĮVERTINIMĄ.

V. ALEKSEJEVAS

(*Reziumė*)

Remiantis Furje integralu ir eilutėmis, nagrinėjamos atsitiktinio stacionarinio Gauso proceso (diskretinio ir tolydinio) spektrinio tankio įvertinimo statistinės savybės (poslinkis ir dispersija). Reikia, kad spektrinis tankis būtų Lip α klasės $(0<\alpha\leqslant 1)$ funkcija.

Atskirai išnagrinėtas atvejis, kai atsitiktinio proceso reikšmės registruojamos su atsitiktiniais praleidimais.

ON SPECTRUM ESTIMATION OF A GAUSSIAN STATIONARY RANDOM PROCESS

V. ALEKSEEV

(*Summary*)

Using the technique of trigonometric series and Fourier integral, we investigate the statistical properties (bias and variance) of the estimate for the spectral density function of the Gaussian random process of discrete or continuous parameter. The case of randomly missed observations is especially considered. Concerning the spectral density of all the considered processes it is only assumed, that they are functions of the Lip α class, where $0<\alpha\leqslant 1$.