УДК — 513.15

КОНСТРУКТИВНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ НА ПЛОСКОСТЬ КОЛЛИНЕАЦИЙ, ПЕРЕВОДЯЩИХ КВАДРИКУ В СЕБЯ

М. М. ХАРАХ

Актуальным вопросом современной начертательной геометрии является разработка способов построения конструктивных моделей пространств, подчиненных определенному алгоритму.

Различные нелинейные методы отображения пространства наиболее полно исследованы З. А. Скопецом. К ним относится и отображение пространства при помощи поверхностей второго порядка (квадрик) [1].

В предлагаемой ниже работе рассматривается конструктивное отображение на плоскость изображения π коллинеаций, переводящих в себя некоторую квадрику, квадратичными кремоновыми преобразованиями [2].

1. Квадрику F_2 задаем в плоскости изображения π по методу З. А. Скопеца [I] своим следом c_2 и следом s_1 касательной плоскости в центре S стереографического проецирования, пересекающим c_2 в точках U и V, (U, V могут быть вещественными, мнимыми, совпавшими).

Пусть имеется коллинеация, оставляющая квадрику F_2 на месте. Таких коллинеаций существует ∞^6. В этой коллинеации плоскости π будет соответствовать плоскость π'_1, пересекающая квадрику F_2 по кривой второго порядка e'_2; центру проецирования S – некоторая точка $S'_1 \subset F_2$.

В плоскости π на конике c_2 возьмем три точки A, B, C, которым будут соответствовать точки A'_1, B'_1, и C'_1, лежащие на e'_2.

При стереографическом проецировании указанных выше соответствующих элементов получим в плоскости изображения π; а) кривую e_2, инцидентную с точками U и V с указанием трех точек A, B, C на c_2 и соответственных им трех точек A_1, B_1, C_1 на e_2; б) некоторую точку S_1. Для построения на плоскости π точки X_1, соответствующей X, выполняем следующее построение: *а*) проводим через X прямую a_1; б) для точек ее пересечения P и Q с кривой c_2 находим соответствующие точки P_1 и Q_1 на e_2; в) проводим кривую второго порядка a_2 через пять точек U, V, S_1, P_1, Q_1; г) повторяем это построение для прямой b_1, проходящей через X, в результате чего получаем пять точек U, V, S_1, R_1, T_1, определяющих кривую b_2; д) строим четвертую точку пересечения кривых a_2 и b_2, отличную от U, V, S_1. Это построение выполняется одной линейкой. Если точка X описывает на π прямую a_1, то соответствующая ей точка X_1 будет перемещаться по кривой второго порядка (конике) a_2. Стереометрически это можно истолковать следующим образом: прямую a_1 можно рассматривать как след плоскости α, проходящей через центр проецирования

$S \subset F_2$. Этой плоскости в нашей коллинеации будет соответствовать плоскость α_1 связки с центром в точке S_1'. Плоскость α_1 пересечет квадрику F_2 по кривой второго порядка a_2', которая проецируется из S на π в конику a_2, описываемую точкой X_1 и проходящую через точки U, V, S_1.

Следовательно, прямая a_1 в результате коллинеации, оставляющей квадрику F_2 на месте, преобразуется на плоскости изображения π в кривую второго порядка a_2. Итак, наше преобразование T_2 является квадратичным.

В обратном преобразовании T_2^{-1} точке X_1, двигающейся на π по прямой, будет соответствовать точка X, перемещающаяся по конике. Действительно, в соответствии T_2^{-1} плоскости π' соответствует плоскость π, а плоскости π – плоскость π''; точке S_1' будет соответствовать точка S, а точке S – точка S_2', проекция которой на π будет S_2. Точка S_2 на π легко находится графическим путем. Для этого проводим через точку S_1 две прямые m_1и n_1 пересекающие конику e_2 в точках M_1, $\bar{M}_1$ и N_1, $\bar{N}_1$ соответственно. Находим соответствующие им точки M, $\bar{M}$, N и $\bar{N}$ на конике C_2 в проективном соответствии двух криволинейных рядов e_2 и c_2. Точка S_2 пересечения прямых $M\bar{M}$ и $N\bar{N}$ будет являться искомой. Поэтому прямой, которую описывает точка X_1 соответствует коника, проходящая через точки U, V и S_2 в силу тех же рассуждений, которые были приведены в преобразовании T_2.

2. Найдем фундаментальные точки квадратичного преобразования T_2. Для этого рассмотрим связку плоскостей с центром S_1'. Любую прямую в π, проходящую через точку S_1, можно считать следом плоскости, принадлежащей связке. В ней содержатся пучки плоскостей, осями которых являются образующие $S_1'U_1'$ и $S_1'V_1'$. Плоскости, принадлежащие этим пучкам, пересекают F_2 по распавшимся кривым второго порядка. Прямая S_1U является следом плоскости, проходящей через проецирования S. В нашей коллинеации ей соответствует плоскость свя̆зки с центром в точке S_2', и проходящая тоже через точку S, так как S_1' переходит в S, а S – в S_2'. Следовательно, на плоскости π след этой плоскости изобразится прямой S_2U. Найдем точки, соответственные точкам Y_{1i}, лежащим на прямой S_1U. Проведем через точку Y_1 две пересекающиеся прямые, одну из которых возьмем S_1U и проделаем все те построения, которые были рассмотрены выше. Точка Y найдется, как 4-я точка пересечения, отличная от U, V, S_2 двух коник, одна из которых является совпавшей прямой S_2U. Легко видеть, что точка Y совпадает с точкой U. Следовательно, точкам Y_{1i}, лежащим на S_1U, соответствует одна точка $Y \equiv U$. То же самое можно сказать о точках, лежащих на S_1V, которым будет соответствовать одна и та же точка V. Поэтому точки U и V являются фундаментальными точками, а прямые US_1 и VS_1 – фундаментальными прямыми соответствия T_2.

Все точки Y_1 прямой UV являются проекциями одной и той же точки S – центра проецирования, которому соответствует точка S_2' (S_2). Следовательно, на плоскости π всем точкам прямой UV соответствует единственная точка S_2. Следовательно, S_2 является третьей фундаментальной точкой, которой соответствует фундаментальная прямая UV.

Определим фундаментальные точки соответствия T_2^{-1}. Рассмотрим связку плоскостей с центром в точке S_2'. Любую прямую в π, проходящую через S_2, можно считать следом плоскости, принадлежащей связке. Таковой является и прямая S_2U. Всем точкам X_i, расположенным на этой прямой, будет соответствовать одна и та же точка $X_1 \equiv U$ по той же причине, которая была изложена для соответствия T_2. Аналогично, всем точкам X_i, лежащим на S_2V, будет соответствовать единственная точка $X_1 = V$. Точки U и V являются фундаментальными точками, а прямые US_2 и VS_2 — фундаментальными прямыми соответствия T_2^{-1}. Все точки X_i прямой UV являются проекциями центра проецирования S, которому соответствует точка S_1' в нашей коллинеации. Следовательно, S_1 есть третья фундаментальная точка, а UV — третья фундаментальная прямая. Если F_2 — однополостный гиперболоид, то T_2 и T_2^{-1} имеют три действительные фундаментальные точки; если F_2 — конус, то T_2 и T_2^{-1} могут содержать сдвоенную фундаментальную точку $U \equiv V$ и S_2 или S_1 соответственно.

В случае задания конуса возможно T_2 с тремя слившимися фундаментальными точками, но при условии задания S_1' на образующей $u \equiv v$ конуса. Фундаментальная прямая также строенная и является касательной к c_2 в точке $U \equiv V \equiv S_1$. При задании двухполостного гиперболоида (эллиптического параболоида) T_2 (или T_2^{-1}) содержат одну действительную фундаментальную точку S_2 (или S_1) и две мнимых.

Если F_2 — параболический цилиндр, то S_2 (или S_1) — обыкновенная фундаментальная точка. Две другие фундаментальные точки сдвоены и совпадают с несобственной точкой прямой l, определяющей монопроекцию параболического цилиндра на π. Если F_2 — гиперболический параболоид, то S_2 (или S_1) и две несобственные точки U и V, определенные направлением асимптот следа c_2, есть обыкновенные фундаментальные точки, которым соответствует несобственная прямая и прямые асимптотического направления, проходящие через точку S_2 (или S_1).

Таким образом, рассмотрение коллинеации, переводящей квадрику в себя, в ортогональной стереографической монопроекции приводит ко всем типам квадратичных кремоновых преобразований.

Ограниченность объема статьи не дает возможности рассмотреть отображение различных частных видов коллинеаций, оставляющих F_2 на месте. Результаты, полученные в работе, могут найти приложение в начертательной геометрии, а также и в неевклидовой геометрии к изображению движений неевклидовых пространств с невырожденным абсолютом на различные неевклидовы плоскости.

Москва

Поступило в редакцию
14. III. 1968

Литература

1. З. С. Скопец, Отображение поверхностей второго порядка на плоскость, Математическое просвещение, вып. 3, 1958.
2. H. Hudson, Cremona transformations, Cambridge, 1927.

KOLINEACIJŲ, PERVEDANČIŲ KVADRIKĄ Į SAVE, KONSTRUKTYVUS ATVAIZDAVIMAS PLOKŠTUMOJE

M. HARAH

(Reziumė)

Straipsnyje nagrinėjamas kolineacijų, pervedančių į save antros eilės paviršių (kvadrikų) kvadratine kremonine transformacija, konstruktyvus atvaizdavimas plokštumoje. Darbe gauti rezultatai gali būti pritaikyti braižomojoje ir neeuklidinėje geometrijoje.

CONSTRUCTIVE REPRESENTATION AT THE PLANE COLLINEATIONS PLACING QUADRIC ITSELF

M. HARAH

(Summary)

In the present work the constructive representation at the plane collineations placing some second order surface (quadric) itself by the quadric cremona transformations is studied. Results received in the work can find application in the descriptive and noneuclidean geometry.