VIII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

1968

УДК – 517.944

О ГОЛОМОРФНЫХ РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Ш. И. СТРЕЛИЦ, И. В. КИСЕЛЮС

В этой статье исследуются аналитические решения уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} F_{j\,k-j}(z,\ w)\, z^j w^{k-j} \frac{\partial^k u}{\partial z^j \partial w^{k-j}} = 0, \tag{I}$$

где $F_{j\,k-j}(z, w)$ – аналитические функции в бицилиндре $|z| < R$ и $|w| < R$.

В работах [1] и [2] было установлено, что в предположении необращения в нуль однородной формы

$$\sum_{k=0}^{n} F_{k\,n-k}(0,\ 0)\, \eta_1^k \eta_2^{n-k} \tag{II}$$

для всех неотрицательных η_1 и η_2; $\eta_1+\eta_2=1$, уравнение (I) имеет бесконечное множество линейно независимых решений типа

$$u = z^{\lambda} w^{\mu} f(z,\ w), \tag{III}$$

где λ и μ – комплексные числа, а $f(z, w)$ – аналитическая функция в некоторой окрестности начала координат.

Возникает естественный вопрос, насколько условие (II) существенно для того, чтобы уравнение (I) имело решения вида (III). В упомянутых нами работах [1] и [2] были приведены примеры уравнений, у которых отсутствовали решения вида (III), когда условие (II) не выполнялось.

В настоящей статье мы покажем, что в известных обстоятельствах, уравнение (I) от двух независимых переменных имеет бесконечно много линейно независимых решений вида (III), хотя условие (II) и не выполняется. При этом нам приходится предполагать, что коэффициенты $F_{j\,k-j}(z, w) \equiv \mathrm{const}$ у всех производных при $k > t$, где t-некоторое целое число, заключенное между 0 и n, которое определяется в зависимости от свойств формы (II).

Нам кажется верным следующее утверждение:

для каждой заданной формы (II), которая обращается в нуль хотя бы для одной пары неотрицательных значений η_1 и η_2; $\eta_1+\eta_2=1$, можно построить такое уравнение типа (I) с заданной формой (II), которое не имеет решений вида (III).

Вопрос о справедливости этого утверждения остается открытым.

Как показано в статьях [1] и [2], условие необращения в нуль формы (II) приводит к следующему заключению, обеспечивающему существование решений вида (III): многочлен (при выполнении указанных выше требований)

$$Q(\lambda+p,\ \mu+q)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}F_{j\,k-j}(0,\ 0)\,\frac{\Gamma(\lambda+p+1)}{\Gamma(\lambda+p-j+1)}\,\frac{\Gamma(\mu+q+1)}{\Gamma(\mu+q-k+j+1)},$$

где λ и μ — некоторые комплексные постоянные, может обращаться в нуль не более чем для конечного числа целых неотрицательных значений $p,\ q$, при $p+q>N$, с достаточно большим N, так что имеет место оценка

$$|Q(\lambda+p,\ \mu+q)|>\alpha(p+q)^n, \tag{IV}$$

где $\alpha>0$ — некоторое число.

Ниже мы покажем, что при не очень стеснительных ограничениях, наложенных на уравнение (I), верно утверждение типа (IV) с показателем степени в его правой части, равным некоторому целому числу $t:0\leqslant t\leqslant n$.

Основной результат нашей работы заключен в следующем предложении.

Теорема. *Относительно дифференциального уравнения*

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}F_{j\,k-j}(z,\ w)\,z^jw^{k-j}\,\frac{\partial^k u}{\partial z^j\,\partial w^{k-j}}=0,\quad n>1 \tag{1}$$

предположим выполненными следующие условия:

1) *функции* $F_{j\,k-j}(z,\ w)$; $j=0,1,\ldots,k,\ \ k=0,1,\ldots,n$ — *голоморфны в бицилиндре* $|z|<R$ и $|w|<R$;

2) *определяющий полином*

$$Q(\lambda,\ \mu)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}F_{j\,k-j}(0,\ 0)\,\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-j+1)}\,\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-k+j+1)} \tag{2}$$

и полином $Q(\lambda+p,\ \mu+q)$ *не имеют общих нулей ни при каких неотрицательных целых* p и q, $p+q\geqslant 1$, *хотя бы для одной пары* $(\lambda,\ \mu)$, *удовлетворяющей уравнению* $Q(\lambda,\ \mu)=0$*;

3) *определяющий полином* $Q(\lambda,\ \mu)$ *либо сам неприводим, либо имеет хотя бы один неприводимый делитель степени выше первого.*

Пусть, далее, уравнение

$$H(\zeta)=\sum_{j=0}^{n}F_{j\,n-j}(0,\ 0)\,\zeta^{n-j}=0 \tag{3}$$

имеет корни $\zeta_1,\ \zeta_2,\ \ldots,\ \zeta_m$ *кратности* $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_m$ *соответственно, причем* $\max(k_1,k_2,\ldots,k_m)=l$.

Если в этих условиях все коэффициенты уравнения (1), *при* $k>n-l$ *тождественно равны постоянным:* $F_{jk-j}(z,w)\equiv a_{00}^{(j,k-j)}=\mathrm{const}$; *причем* $F_{n0}(0,0)\neq\neq 0$ и $F_{0n}(0,0)\neq 0$, *то уравнение* (1) *имеет бесконечное множество линейно независимых решений вида*

$$u=z^{\lambda}w^{\mu}f(z,\ w), \tag{4}$$

где λ и μ — *постоянные, удовлетворяющие уравнению* $Q(\lambda,\ \mu)=0$, $f(z,\ w)$ — *голоморфная функция в некоторой окрестности начала координат.*

---

* Нулями полинома $Q(\lambda,\mu)$ называем корни уравнения $Q(\lambda,\mu)=0$.

Как будет видно из приводимого ниже доказательства, класс таких уравнений достаточно широк, причем проверку условия взаимной простоты полиномов $Q(\lambda+p, \mu+q)$ и $Q(\lambda, \mu)$ практически легко осуществить (хотя бы с помощью алгоритма Эвклида).

Настоящая статья и посвящается доказательству сформулированной выше теоремы.

1. Доказательство теоремы начнем с построения формального решения вида (4) уравнения (1).

Функции $F_{j\,k-j}(z, w)$, регулярные в бицилиндре $|z|<R$ и $|w|<R$, будем считать, не ограничивая общности, заданными своими степенными разложениями:

$$F_{j\,k-j}(z, w)=\sum_{i_1+i_2=0}^{\infty} a_{i_1 i_2}^{(j,\,k-j)} z^{i_1} w^{i_2}. \tag{1.1}$$

Будем искать решения уравнения (1) вида

$$u=\sum_{p=0}^{\infty} \varphi_p(w)\, z^{\lambda+p}, \tag{1.2}$$

где λ — некоторое число, которое будет определено позже. Подставив выражения (1.1) и (1.2) в уравнение (1), найдем:

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{i_1+i_2=0}^{\infty} a_{i_1 i_2}^{(j,\,k-j)} \frac{\Gamma(\lambda+p+1)}{\Gamma(\lambda+p-j+1)}\, \varphi_p^{(k-j)}(w)\, w^{k-j+i_2} z^{\lambda+i_1+p}=0.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z к нулю, приходим к системе уравнений для определения функций $\varphi_p(w)$:

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\left(\sum_{i_2=0}^{\infty} a_{0 i_2}^{(j,\,k-j)} w^{i_2}\right)\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-j+1)}\, w^{k-j}\varphi_0^{(k-j)}(w)=0, \tag{1.3}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\left(\sum_{i_2=0}^{\infty} a_{0 i_2}^{(j,\,k-j)} w^{i_2}\right)\frac{\Gamma(\lambda+p+1)}{\Gamma(\lambda+p-j+1)}\, w^{k-j}\varphi_p^{(k-j)}(w)+$$

$$+\sum_{t=1}^{p-1}\sum_{k=0}^{n-l}\sum_{j=0}^{k}\left(\sum_{i_2=0}^{\infty} a_{p-t\, i_2}^{(j,\,k-j)} w^{i_2}\right)\frac{\Gamma(\lambda+t+1)}{\Gamma(\lambda+t-j+1)}\, w^{k-j}\varphi_t^{(k-j)}(w)=0,$$

$$p=1, 2, \ldots \tag{1.4}$$

Далее мы покажем, что приведенная система имеет решения

$$\varphi_p(w)=\sum_{q=0}^{\infty} s_{pq} w^{\mu+q}, \quad s_{00}\neq 0, \qquad p=0, 1, \ldots, \tag{1.5}$$

где μ — некоторое комплексное число, которое установим ниже.

Нетрудно найти систему алгебраических равенств для нахождения коэффициентов s_{pq} в разложениях (1.5). Для этого достаточно подставить в (1.4) ряды (1.5) и приравнять коэффициенты при одних и тех же степенях от w в правых и левых частях (1.4). Мы находим:

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_{00}^{(j,\,k-j)} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-j+1)} \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-k+j+1)} s_{00}=0, \tag{1.6}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_{00}^{(j,\,k-j)} \frac{\Gamma(\lambda+p+1)}{\Gamma(\lambda+p-j+1)} \frac{\Gamma(\mu+q+1)}{\Gamma(\mu+q-k+j+1)} s_{pq}+$$
$$+\sum_{i_1=0}^{p-1}\sum_{i_2=0}^{q-1}\sum_{k=0}^{n-l}\sum_{j=0}^{k} a_{p-i_1\,q-i_2}^{(j,\,k-j)} \frac{\Gamma(\lambda+i_1+1)}{\Gamma(\lambda+i_1-j+1)} \frac{\Gamma(\mu+i_2+1)}{\Gamma(\mu+i_2-k+j+1)} s_{i_1 i_2}+$$
$$+\sum_{i_1=0}^{p-1}\sum_{k=0}^{n-l}\sum_{j=0}^{k} a_{p-i_1\,0}^{(j,\,k-j)} \frac{\Gamma(\lambda+i_1+1)}{\Gamma(\lambda+i_1-j+1)} \frac{\Gamma(\mu+q+1)}{\Gamma(\mu+q-k+j+1)} s_{i_1 q}+$$
$$+\sum_{i_2=0}^{q-1}\sum_{k=0}^{n-l}\sum_{j=0}^{k} a_{0\,q-i_2}^{(j,\,k-j)} \frac{\Gamma(\lambda+p+1)}{\Gamma(\lambda+p-j+1)} \frac{\Gamma(\mu+i_2+1)}{\Gamma(\mu+i_2-k+j+1)} s_{p i_2}=0,$$
$$p,\ q=1,\ 2,\ \ldots \tag{1.7}$$

Для удобства коэффициент

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_{00}^{(j,\,k-j)} \frac{\Gamma(\lambda+p+1)}{\Gamma(\lambda+p-j+1)} \frac{\Gamma(\mu+q+1)}{\Gamma(\mu+q-k+j+1)}, \tag{1.8}$$

при s_{pq} обозначим через $Q(\lambda+p,\ \mu+q)$. В этих обозначениях уравнение (1.7) принимает следующий вид:

$$Q(\lambda+p,\ \mu+q)\, s_{pq}+\sum_{i_1=0}^{p-1}\sum_{i_2=0}^{q-1} Q_{p-i_1\,q-i_2}(\lambda+i_1,\ \mu+i_2)\, s_{i_1 i_2}+$$
$$+\sum_{i_1=0}^{p-1} Q_{p-i_1\,0}(\lambda+i_1,\ \mu+q)\, s_{i_1 q}+\sum_{i_2=0}^{q-1} Q_{0\,q-i_2}(\lambda+p,\ \mu+i_2)\, s_{p i_2}=0,$$
$$p,\ q=0,\ 1,\ \ldots \tag{1.7a}$$

Равенство (1.6) дает нам:

$$Q(\lambda,\ \mu)\, s_{00}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_{00}^{(j,\,k-j)} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-j+1)} \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-k+j+1)} s_{00}=0.$$

Так как уравнение (1) линейное и $s_{00}\neq 0$ (мы положим $s_{00}=1$), то, в силу последнего соотношения,

$$Q(\lambda,\ \mu)=0. \tag{1.9}$$

Для однозначного определения остальных неизвестных коэффициентов s_{pq} ряда (1.5) достаточно, как это легко увидеть из соотношений (1.7), чтобы пара корней $(\lambda,\ \mu)$ уравнения (1.9) удовлетворяла условию 2) теоремы, т.е., чтобы $Q(\lambda+p,\ \mu+q)\neq 0$, при всех целых неотрицательных p и q, $p+q\geqslant 1$.

Отметим, что в дальнейшем только о таких парах p и q будет у нас речь, поэтому каждый раз оговаривать, что „целые $p\geqslant 0$, $q\geqslant 0$, $p+q\geqslant 1$“ не будем.

2. Покажем, что при выполнении условия 2) теоремы существует бесконечное множество пар (λ, μ), удовлетворяющих вышеуказанному требованию.

Уравнение $Q(\lambda, \mu)=0$, которое переписываем следующим образом

$$Q(\lambda, \mu)=\sum_{k=0}^{n} P_{n-k}(\mu)\lambda^{n-k}=0, \tag{2.1}$$

имеет при некотором значении $\mu=\mu_0$ n корней (возможно и кратных). Полином $Q(\lambda+p, \mu+q)$ мы разлагаем по степеням λ и получаем:

$$Q(\lambda+p, \mu+q)=\sum_{k=0}^{n} \Pi_{n-k}(\mu, p, q)\lambda^{n-k}, \tag{2.2}$$

где $\Pi_j(\mu, p, q)$ — соответствующие коэффициенты разложения. Будем искать общие нули полиномов (2.1) и (2.2). Мы находим следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned}
&Q(\lambda+p, \mu+q)=Q(\lambda, \mu)\cdot D_1(\lambda; \mu, p, q)+R_1(\lambda; \mu, p, q),\\
&Q(\lambda, \mu)=R_1(\lambda; \mu, p, q)\cdot D_2(\lambda; \mu, p, q)+R_2(\lambda; \mu, p, q),\\
&R_1(\lambda; \mu, p, q)=R_2(\lambda; \mu, p, q)\cdot D_3(\lambda; \mu, p, q)+R_3(\lambda; \mu, p, q),\\
&-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\\
&R_{n-2}(\lambda; \mu, p, q)=R_{n-1}(\lambda; \mu, p, q)\cdot D_n(\lambda; \mu, p, q)+R_n(\mu, p, q).
\end{aligned}$$

Полученный остаток $R_n(\mu, p, q)$, который, вообще говоря, является многочленом от μ:

$$R_n(\mu, p, q)=A_\nu(p, q)\mu^\nu+A_{\nu-1}(p, q)\mu^{\nu-1}+\ldots+A_0(p, q), \tag{2.3}$$

при $\mu=\mu_0$ и $\lambda=\lambda_0$, удовлетворяющих условию 2) теоремы, ни при каких p и q в нуль не обращается. В частности, не существует такая пара p и q, чтобы все $A_j(p, q)=0$, $j=0, 1, \ldots, \nu$.

Очевидно, для того, чтобы полиномы (2.1) и (2.2) имели общие нули, необходимо, чтобы выражение (2.3) обратилось в нуль при некоторых p и q Пары (p, q) образуют счетное множество. Подставляем теперь в (2.3) конкретные значения: $p=p_0$, $q=q_0$. Алгебраическое уравнение

$$R_n(\mu, p_0, q_0)=0 \tag{2.4}$$

имеет ровно ν корней (либо ни одного, если $\nu=0$; в этом случае, как мы показали, все $A_\nu(p, q)\equiv A_0(p, q)\neq 0$, ни при какой паре (p, q)). Для каждого корня μ_k из (2.4), найдутся точно n нулей λ_j, $j=1, 2, \ldots, n$, полинома (2.1). Наше построение показывает, что при $p=p_0$ и $q=q_0$: а) каждая пара (λ_j, μ_k); $j=1, 2, \ldots, n$, $k=1, 2, \ldots\nu$, является общим нулем полиномов (2.1) и (2.2), б) указанные многочлены других общих нулей не имеют.

Так как пары (p, q) образуют счетное множество, то число общих нулей полиномов (2.1) и (2.2) не более чем счетно. Остальные пары (λ, μ) решений уравнения $Q(\lambda, \mu)=0$, не попавшие в число общих нулей полиномов (2.1) и (2.2) и удовлетворяющие условию 2) теоремы, образуют множество мощности континуума.

Итак, при выполнении условия 2) теоремы, этому же условию удовлетворяет множество пар мощности континуума. Для каждой такой пары ни один коэффициент в системе (1.7) — $Q(\lambda+p,\ \mu+q)\neq 0$, ни при каких p и q, и все неизвестные s_{pq} из этой системы определяются однозначно. Этим и доказывается возможность формального построения решений (1.5) уравнения (1).

3. Для завершения доказательства теоремы остается показать, что полученный ряд (1.2) сходится. Для этой цели оценим снизу выражение:

$$|Q(\lambda+p,\ \mu+q)|=\left|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}a_{00}^{(j,\,k-j)}\frac{\Gamma(\lambda+p+1)}{\Gamma(\lambda+p-j+1)}\ \frac{\Gamma(\mu+q+1)}{\Gamma(\mu+q-k+j+1)}\right|. \quad (3.1)$$

В силу условия теоремы $a_{00}^{(0,\,n)}$ и $a_{00}^{(n,\,0)}$ не равны нулю. Чтобы найти нужное нам неравенство, разложим полином $Q(\lambda+p,\ \mu+q)$ по степеням $\lambda+p$ и $\mu+q$. Получаем:

$$Q(\lambda+p,\ \mu+q)=\sum_{i+j=0}^{n}Q_{ij}(\lambda+p)^{i}(\mu+q)^{j}=$$

$$=(\lambda+p)^{n}\sum_{i+j=0}^{n}Q_{ij}\frac{1}{(\lambda+p)^{n-(i+j)}}\left(\frac{\mu+q}{\lambda+p}\right)^{j}, \quad (3.2)$$

где

$$Q_{ij}=\frac{1}{i!\,j!}\ \frac{\partial^{i+j}Q(\lambda+p,\ \mu+q)}{\partial(\lambda+p)^{i}\,\partial(\mu+q)^{j}}\Bigg|_{\substack{\lambda+p=0\\ \mu+q=0}}=\text{const}.$$

Вводя обозначение в (3.2):

$$\frac{1}{\lambda+p}=x,\quad \frac{\mu+q}{\lambda+p}=y,\quad i+j=k,\quad Q(\lambda+p,\ \mu+q)=(\lambda+p)^{n}H(x,\ y),$$

приходим к соотношению

$$H(x,\ y)=\sum_{i+j=0}^{n}Q_{ij}x^{n-(i+j)}y^{j}=\sum_{j=0}^{n}A_{j}(x)\,y^{n-j},$$

где $A_j(x)=\sum\limits_{k=0}^{j}Q_{j-k,\,n-j}x^{k}$, причем $Q_{j\,n-j}=a_{00}^{(j,\,n-j)}$ и $A_0(0)=a_{00}^{(0,\,n)}\neq 0$.

Представим алгебраическую функцию $H(x,\ y)$ в виде произведения:

$$H(x,\ y)=\alpha\prod_{i=1}^{n}\bigl(y-\varphi_i(x)\bigr), \quad (3.3)$$

где $\alpha=a_{00}^{(0,\,n)}$, а $\varphi_i(x)$ — корни уравнения $H(x,\ y)=0$ в окрестности точки $x=0$, которые, как известно из теории алгебраических функций (см. [3]), имеют, в силу $A_0(0)\neq 0$, следующие степенные разложения:

$$\varphi_i(x)=\zeta_i+\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{(i)}x^{\frac{k}{\sigma_i}} \quad (3.4)$$

с целым $\sigma_i>0$ (не исключено, что $a_s^{(i)}=0$, $s=1,2,\ldots,t_0$). Числа ζ_i являются корнями уравнения $H(0,\ \zeta)=0$, которое, как видно из (3.2), и является уравнением (3), указанным в условиях теоремы.

Оценим снизу теперь, с учетом того, что $y=\frac{\mu+q}{\lambda+p}$ и $x=\frac{1}{\lambda+p}$, выражение $|H(x,y)|=\left|H\left(\frac{1}{\lambda+p},\frac{\mu+q}{\lambda+p}\right)\right|$.

Имеем

$$\left|H\left(\frac{1}{\lambda+p},\frac{\mu+q}{\lambda+p}\right)\right|=\alpha\prod_{i=1}^{n}\left|\frac{\mu+q}{\lambda+p}-\zeta_i-\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{(i)}\left(\frac{1}{\lambda+p}\right)^{\frac{k}{\sigma_i}}\right|. \tag{3.5}$$

Пусть $\delta>0$ – произвольное постоянное число, удовлетворяющее неравенству:

$$\min\{|\zeta_i-\zeta_j|\}>\delta, \tag{3.6}$$

где минимум берется во множестве всех различных корней уравнения $H(0,\zeta)=0$. Допустим сейчас, что, для рассматриваемых p и q, корень ζ_1 удовлетворяет неравенству

$$\left|\frac{q}{p}-\zeta_1\right|<\frac{\delta}{2}. \tag{3.7}$$

В этом случае остальные корни ζ_i, не равные ζ_1, удовлетворяют неравенству

$$\left|\frac{q}{p}-\zeta_i\right|\geqslant\frac{\delta}{2}. \tag{3.8}$$

Оценим теперь снизу множитель

$$\left|\frac{\mu+q}{\lambda+p}-\zeta_i-\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{(i)}\left(\frac{1}{\lambda+p}\right)^{\frac{k}{\sigma_i}}\right|$$

из произведения (3.5), когда имеет место (3.8). Имеем:

$$\left|\frac{q}{p}\left(1+\frac{\mu}{q}\right)\left(1+\frac{\lambda}{p}\right)^{-1}-\zeta_i-\left(\frac{1}{\lambda+p}\right)^{\frac{1}{\sigma_i}}\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{(i)}\left(\frac{1}{\lambda+p}\right)^{\frac{k-1}{\sigma_i}}\right|=$$

$$=\left|\frac{q}{p}-\zeta_i+O\left(\frac{1}{p}\right)-\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{\sigma_i}}O(1)\right|\geqslant\left|\frac{q}{p}-\zeta_i\right|-\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{\sigma_i}}\left|O(1)-O\left(\frac{1}{p}\right)\right|\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\delta}{2}-\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{\sigma_i}}O(1)>B>0, \tag{3.9}$$

при $p>P_0$, где P_0 достаточно большое число.

Если ζ действительное отрицательное или мнимое число, то оценка выражения

$$|\psi|=\left|\frac{\mu+q}{\lambda+p}-\zeta-\sum_{k=1}^{\infty}a_k\left(\frac{1}{\lambda+p}\right)^{\frac{k}{\sigma}}\right|$$

тривиальна. Действительно, при $p>P_0$,

$$|\psi|\geqslant\gamma+O\left(\frac{1}{p}\right),$$

где постоянная γ удовлетворяет, при $p>P_0$, неравенствам:

$$0<2\gamma<\begin{cases}|\mathrm{Re}\,\psi|\leqslant|\zeta|+O\left(\frac{1}{p}\right)<2|\zeta|, & \text{когда } \zeta>0,\\ |\mathrm{Im}\,\psi|\leqslant|\mathrm{Im}\,\zeta|+O\left(\frac{1}{p}\right)<2|\mathrm{Im}\,\zeta|, & \text{когда } \zeta \text{ мнимое.}\end{cases}$$

Остается оценить множители, удовлетворяющие неравенству (3.7), т.е. когда $\zeta_1=\zeta_1$. Пусть теперь $\zeta_1\geqslant 0$. Ради простоты записи, мы ниже опускаем индексы у ζ_1, σ_1 и верхний индекс при $a_k^{(1)}$.

Предположим сперва, что в разложении

$$\psi=\frac{\mu+q}{\lambda+p}-\zeta-\sum_{k=1}^{\infty}a_k\left(\frac{1}{\lambda+p}\right)^{\frac{k}{\sigma}}, \tag{3.11}$$

$\sigma=1$. Отсюда следует:

$$\psi=\frac{\mu+q}{p}\left(1-\frac{\lambda}{p}+\sum_{k=2}^{\infty}\left(-\frac{\lambda}{p}\right)^k\right)-\zeta-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{p^k}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{k}{j}\left(-\frac{\lambda}{p}\right)^j=$$

$$=\frac{1}{p}\left(\mu-\frac{q}{p}\lambda-a_1\right)+\frac{p}{q}-\zeta+O\left(\frac{1}{p^2}\right)=\frac{\beta-\delta_0\lambda}{p}+\frac{q}{p}-\zeta+O\left(\frac{1}{p^2}\right),$$

где $\beta=\mu-\zeta\lambda-a_1$ и $\frac{q}{p}-\zeta=\delta_0$, причем в силу (3.7), $|\delta_0|\leqslant\frac{\delta}{2}$.

Ниже мы покажем, как, при выполнении условий теоремы, можно подобрать λ и μ так, чтобы комплексное число β имело неравную нулю мнимую часть. А сейчас допустим, что λ и μ уже так выбраны:

$$|\operatorname{Im}\beta|=\tau>0.$$

Можно всегда взять настолько малым δ в (3.6), чтобы было $|\lambda\delta_0|<\frac{\tau}{2}$.

В сделанных предположениях имеем:

$$\left|\frac{\mu+q}{\lambda+p}-\zeta-\sum_{k=1}^{\infty}a_k\left(\frac{1}{\lambda+p}\right)^k\right|=$$

$$=\sqrt{\left[\frac{q}{p}-\zeta-\frac{1}{p}\operatorname{Re}\left(\beta-\delta_0\lambda+O\left(\frac{1}{p}\right)\right)\right]^2+\frac{1}{p^2}\left[\operatorname{Im}\left(\beta-\delta_0\lambda+O\left(\frac{1}{p}\right)\right)\right]^2}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\tau-|\delta_0\lambda|+O\left(\frac{1}{p}\right)}{p}\geqslant\frac{\tau}{2p}, \tag{3.13}$$

при достаточно большом $p: p>P_0$.

Пусть теперь $\sigma>1$. Из (3.11) находим:

$$\psi=\frac{\mu+q}{\lambda+p}-\zeta-\sum_{k=1}^{\infty}a_k\left(\frac{1}{\lambda+p}\right)^{\frac{k}{\sigma}}=$$

$$=\frac{\mu+q}{p}\sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{\lambda}{p}\right)^j-\zeta-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{p^{\frac{k}{\sigma}}}\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\binom{\frac{k}{\sigma}}{l}\left(-\frac{\lambda}{p}\right)^l=$$

$$=\frac{1}{p}\left(\mu-\frac{q}{p}\lambda\right)+\frac{q}{p}-\zeta-\sum_{k=1}^{\sigma}\frac{a_k}{p^{\frac{k}{\sigma}}}+O\left(\frac{1}{p^{1+\frac{1}{\sigma}}}\right). \tag{3.14}$$

Предположим сначала, что все a_k, $k=1, 2, \ldots, \tau$ — действительные. Тогда из (3.14) вытекает, что

$$|\psi| = \left| \frac{\mu - \frac{p}{q}\lambda - a_\sigma}{p} + \frac{q}{p} - \zeta - \sum_{k=1}^{\sigma} \frac{a_k}{p^{\frac{k}{\sigma}}} + O\left(\frac{1}{p^{1+\frac{1}{\sigma}}}\right) \right| =$$

$$= \left| \frac{\mu - \zeta\lambda - a_\sigma}{p} - \frac{\lambda\delta_\sigma}{p} + \frac{q}{p} - \zeta - \sum_{k=1}^{\sigma} \frac{a_k}{p^{\frac{k}{\sigma}}} + O\left(\frac{1}{p^{1+\frac{1}{\sigma}}}\right) \right| \geqslant$$

$$\geqslant \left| \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{p}(\mu - \zeta\lambda - a_\sigma) - \frac{\lambda\delta_\sigma}{p} - \sum_{k=1}^{\sigma} \frac{a_k}{p^{\frac{k}{\sigma}}} + O\left(\frac{1}{p^{1+\frac{1}{\sigma}}}\right) \right\} \right|.$$

Оценка последнего выражения производится в точности также, как и в предыдущем случае, когда $\sigma=1$, если только λ и μ таковы, что

$$|\operatorname{Im}(\mu - \zeta\lambda - a_\sigma)| = \tau > 0.$$

В этих предположениях, как и в (3.13), получаем

$$|\psi| \geqslant \frac{\tau}{2p}, \text{ при } p > P_0. \tag{3.15}$$

Если в разложении (3.14) a_s является первым (с наименьшим индексом) мнимым коэффициентом среди $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$, то оценку (3.15) можно улучшить, так как в этом случае (3.14) дает нам (напомним $\zeta \geqslant 0$):

$$|\psi| \geqslant |\operatorname{Im}\psi| \geqslant \frac{|\operatorname{Im} a_s|}{p^{\frac{k}{\sigma}}} + O\left(\frac{1}{p^{\frac{k+1}{\sigma}}}\right) > \frac{B^*}{p^{\frac{k}{\sigma}}}, \tag{3.16}$$

с постоянной $B^* > 0$, если только $p > P_0$.

4. Покажем сейчас, как подбирать корни определяющего уравнения $Q(\lambda, \mu) = 0$, чтобы числа

$$\beta = \mu - \zeta\lambda - a_\sigma$$

имели не равную нулю мнимую часть. Напомним, что оценки (3.13) и (3.15) были получены именно в этом предположении.

В согласии с условием 3) теоремы, существует неприводимый делитель полинома $Q(\lambda, \mu)$ степени не ниже второго. Обозначим его через $G(\lambda, \mu)$. Если $Q(\lambda, \mu)$ неприводим, то $G(\lambda, \mu) \equiv Q(\lambda, \mu)$.

Уравнение $G(\lambda, \mu) = 0$ разложим по степеням $\beta = \mu - (\zeta\lambda + a_\sigma)$, где $\zeta = \zeta_1$ — корень уравнения $H(0, \zeta) = 0$ (см. п. 3). Пусть

$$\sum_{j=0}^{m} g_j(\lambda)\beta^{m-j} = 0, \qquad m \geqslant 2, \tag{4.1}$$

будет этим разложением. При этом $g_j(\lambda) = \frac{1}{j!} \frac{\partial^j G(\lambda, \zeta\lambda + a_\sigma)}{\partial\mu^j}$ и $g_m(\lambda) \not\equiv 0$, так как $G(\lambda, \mu)$ неприводимый полином и не имеет линейных делителей.

Разложив (4.1) по степеням λ, легко получаем

$$\sum_{j=0}^{\tilde{m}} \tilde{g}_j(\beta)\lambda^{\tilde{m}-j} = 0. \tag{4.2}$$

Для всех действительных β уравнение (4.2) определяет множество $\mathfrak{E}$ значений λ. Очевидно, множество $\mathfrak{E}$ не совпадает со всей комплексной плоскостью ((4.2) явно зависит от λ), а лишь определяет на ней некоторое семейство кривых $\lambda=\psi_j(\beta)$, $j=1, 2, \ldots, m_0 \leqslant n$. Следовательно, для всех точек комплексной плоскости, не попадающих на указанные кривые, решения уравнения (4.1) — числа β будут комплексными числами с ненулевой мнимой частью. Таким образом, пара чисел: $\lambda \notin \mathfrak{E}$ и $\mu=\beta+\zeta\lambda+a_\sigma$ обеспечивает справедливость неравенства (3.12), а затем и оценок (3.13) и (3.15).

Подобным же образом мы поступаем со всеми неотрицательными корнями ζ_j, $j=1, 2, \ldots, n_0 \leqslant n$, уравнения $H(0, \zeta)=0$ и получаем множества точек $\mathfrak{E}_j$; $j=1, 2, \ldots, n$, соответствующих кривых на комплексной плоскости (λ). Для каждого значения $\lambda_0 \notin \bigcup\limits_{j=1}^{n} \mathfrak{E}_j$ мы найдем из уравнения $Q(\lambda, \mu)=0$ такие значения μ_0, что для каждой пары (λ_0, μ_0) и неотрицательного корня ζ_j: $|\operatorname{Im} B_j| = |\operatorname{Im}(\mu_0-\zeta_j\lambda_0-a_\sigma^{(j)})|>0$; $j=1, 2, \ldots, n_0 \leqslant n$.

Очевидно, мощность множества таких пар — континуум. В пункте 2, чтобы обеспечить выполнение условия 2) теоремы, нам пришлось из множества решений уравнения $Q(\lambda, \mu)=0$ исключить не более чем счетное множество $\mathfrak{E}_0$ пар (λ, μ). Очевидно, что после удаления всех не подходящих пар корней уравнения $Q(\lambda, \mu)=0$, оставшаяся совокупность корней λ и μ, удовлетворяющих условиям 2) и 3) теоремы, тоже имеет мощность континуума. Это множество пар (λ, μ) обозначим через $\mathfrak{N}$.

5. Ниже все рассуждения будут проводиться для некоторой конкретной пары $(\lambda_0, \mu_0) \in \mathfrak{N}$. Ради простоты будем опускать индексы и писать просто γ и μ.

Оценим теперь снизу выражение $|Q(\lambda+p, \mu+q)|$ — коэффициент при неизвестных s_{pq} в системе уравнений (1.7).

Пусть ζ_1 — корень уравнения $H(0, \zeta)=0$ кратности k_1, а p и q таковы, что

$$\left|\frac{q}{p}-\zeta_1\right|<\frac{\delta}{2}.$$

Тогда в разложении (3.5),

$$Q(\lambda+p, \mu+q)=\alpha(\lambda+p)^n \prod_{l=1}^{n}\left(\frac{\mu+q}{\lambda+p}-\zeta_l-\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(l)}\left(\frac{1}{\lambda+p}\right)^{\frac{k}{\sigma_l}}\right)$$

имеется k_1 множителей, в которые входит корень ζ_1. Для каждого такого множителя справедливо неравенство (3.13) (или же более точно (3.16)), и для каждого из оставшихся — соотношение (3.9)). В итоге получаем: при $p>P_0$

$$|Q(\lambda+p, \mu+q)| \geqslant |\alpha||\lambda+p|^n \left(\frac{\tau}{2p}\right)^{k_1} B^{n-k_1}. \tag{5.1}$$

Подобные неравенства мы получаем для всех $\frac{q}{p}$, удовлетворяющих хотя бы одному из неравенств:

$$\left|\frac{q}{p}-\zeta_j\right|<\frac{\delta}{2}; \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ m_0 \leqslant n,$$

и, именно, для корня ζ_j, кратности k_j, при $\left|\frac{q}{p}-\zeta_j\right|<\frac{\delta}{2}$, имеем:

$$|Q(\lambda+p,\ \mu+q)|>|\alpha||\lambda+p|^n\left(\frac{\tau}{2p}\right)^{k_j}B^{n-k_j},\qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \quad (5.2)$$

Так как $\max(k_1, k_2, \ldots, k_n)=l$, то, очевидно, что при условии (5.2)

$$|Q(\lambda+p,\ \mu+q)|>C_0p^{n-l}, \quad (5.3)$$

где $C_0>0$ — некоторая постоянная.

Если $\frac{p}{q}$ не удовлетворяет ни одному из соотношений (5.2), то в соответствии с (3.9),

$$|Q(\lambda+p,\ \mu+q)|>C_0p^n\geqslant C_0p^{n-l}.$$

Из соображений симметрии следует также и неравенство

$$|Q(\lambda+p,\ \mu+q)|>\tilde{C}_0q^{n-l},\ \mathrm{const}=\tilde{C}_0>0,$$

которое вместе с (5.3) дает нам окончательную оценку: при $p>P_0$ и $q>Q_0$

$$|Q(\lambda+p,\ \mu+q)|>C(p+q)^{n-l}, \quad (5.4)$$

где $C>0$ — некоторая постоянная.

Так как $Q(\lambda+p,\ \mu+q)\neq 0$ ни при каких целых p и $q, p\geqslant 0,\ q\geqslant 0;\ p+q\geqslant 1$ то и неравенство (5.4) будет иметь место для всех таких p и q, если только C — достаточно малое число.

6. Нам остается показать, что ряд (1.2)

$$u=\sum_{p=0}^{\infty}\varphi_p(w)\,z^{\lambda+p}, \quad (6.1)$$

который является формальным решением уравнения (1), сходится в некоторой окрестности начала координат. Учитывая соотношение (1.5), определяющее функции $\varphi_p(w)$ — коэффициенты ряда (6.1), имеем:

$$u=z^{\lambda}w^{\mu}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}s_{pq}z^pw^q, \quad (6.2)$$

причем числа s_{pq} устанавливается из системы (1.7). Последнюю перепишем в следующем виде:

$$Q(\lambda+p,\ \mu+q)s_{pq}=-\left[\sum_{i_1=0}^{p-1}\sum_{i_2=0}^{q-1}Q_{p-i_1\,q-i_2}(\lambda+i_1,\ \mu+i_2)\,s_{i_1i_2}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i_1=0}^{p-1}Q_{p-i_1\,0}(\lambda+i_1,\ \mu+q)\,s_{i_1q}+\sum_{i_2=0}^{q-1}Q_{0\,q-i_2}(\lambda+p,\ \mu+i_2)\,s_{pi_2}\right],$$

$$p,\ q=0,\ 1,\ \ldots;\ p+q\geqslant 1,$$

где

$$Q_{p-i_1\,q-i_2}(\lambda+i_1,\ \mu+i_2)=\sum_{k=0}^{n-l}\sum_{j=0}^{k}a^{(j,\,k-j)}_{p-i_1\,q-i_2}\,\frac{\Gamma(\lambda+i_1+1)}{\Gamma(\lambda+i_1-j+1)}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(\mu+i_2+1)}{\Gamma(\mu+i_2-k+j+1)}. \quad (6.3)$$

Из этой системы следует, что

$$|s_{pq}| \leqslant \frac{\sum_{i_1=0}^{p-1} \sum_{i_2=0}^{q-1} |Q_{p-i_1\, q-i_2}(\lambda+i_1,\ \mu+i_2)|\,|s_{i_1 i_2}|}{|Q(\lambda+p,\ \mu+q)|} +$$
$$+ \frac{\sum_{i_1=0}^{p-1} |Q_{p-i_1\, 0}(\lambda+i_1,\ \mu+q)|\,|s_{i_1 q}|}{|Q(\lambda+p,\ \mu+q)|} + \frac{\sum_{i_2=0}^{q-1} |Q_{0\, q-i_2}(\lambda+p,\ \mu+i_2)|\,|s_{p i_2}|}{|Q(\lambda+p,\ \mu+q)}. \tag{6.4}$$

Оценим теперь сверху $|Q_{p-i_1 q-i_2}(\lambda+i_1,\ \mu+i_2)|$ из (6.3). Применяя известные оценки гамма-функции:

$$\left|\frac{\Gamma(\lambda+i_1+1)}{\Gamma(\lambda+i_1-j+1)}\right| < |\lambda+i_1|^j; \quad \left|\frac{\Gamma(\mu+i_2+1)}{\Gamma(\mu+i_2-k+j+1)}\right| < |\mu+i_2|^{k-j}$$

и неравенство Коши

$$|a^{(j,\ k-j)}_{p-i_1\, q-i_2}| \leqslant \frac{M}{R_1^{(p+q)-(i_1+i_2)}},$$

где $M=\max\{|F_{jk-j}(z,\ w)|\}$ при $j=0,\ 1,\ \ldots,\ k,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-l$, в бицилиндре $|z|\leqslant R_1<R$ и $|w|\leqslant R_1<R$, приходим к неравенству:

$$|Q_{p-i_1\, q-i_2}(\lambda+i_1,\ \mu+i_2)| < \frac{M}{R_1^{(p+q)-(i_1+i_2)}} \sum_{k=0}^{n-l} \sum_{j=0}^{k} |\lambda+i_1|^j |\mu+i_2|^{k-j} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C_1(i_1+i_2)^{n-l}}{R_1^{(p+q)-(i_1+i_2)}},$$

где $C_1>0$ — постоянная.

Теперь воспользуемся оценкой знаменателя $|Q(\lambda+p,\ \mu+q)|$ снизу, которая дается неравенством (5.4). Первое слагаемое в правой части соотношения (6.4), оценивается следующим образом:

$$\sum_{i_1=0}^{p-1} \sum_{i_2=0}^{q-1} \frac{|Q_{p-i_1\, q-i_2}(\lambda+i_1,\ \mu+i_2)|\,|s_{i_1 i_2}|}{|Q(\lambda+p,\ \mu+q)|} <$$
$$< \frac{C_2}{R_1^{p+q}} \sum_{i_1=0}^{p-1} \sum_{i_2=0}^{q-1} \left(\frac{i_1+i_2}{p+q}\right)^{n-l} R_1^{i_1+i_2} |s_{i_1 i_2}|. \tag{6.5}$$

Аналогично оцениваются и остальные слагаемые в правой части (6.4):

$$\sum_{i_1=0}^{p-1} \frac{|Q_{p-i_1\, 0}(\lambda+i_1,\ \mu+q)|\,|s_{i_1 q}|}{|Q(\lambda+p,\ \mu+q)|} < \frac{C_3}{R_1^p} \sum_{i_1=0}^{p-1} \left(\frac{i_1+q}{p+q}\right)^{n-l} R_1^{i_1} |s_{i_1 q}| \tag{6.6}$$

и

$$\sum_{i_2=0}^{q-1} \frac{|Q_{0\, q-i_2}(\lambda+p,\ \mu+i_2)|\,|s_{p i_2}|}{|Q(\lambda+p,\ \mu+q)|} < \frac{C_4}{R_1^q} \sum_{i_2=0}^{q-1} \left(\frac{p+i_2}{p+q}\right)^{n-l} R_1^{i_2} |s_{p i_2}|, \tag{6.7}$$

где C_2, C_3 и C_4 — положительные постоянные.

Положив вместо множителей $\frac{i_1+i_2}{p+q}$ единицы и вместо C_2, C_3 и C_4 число $D=\max(C_2, C_3, C_4)$ мы только усилим неравенства (6.5), (6.6) и (6.7).

Из (6.4) получаем:

$$|s_{pq}|<\frac{D}{R_1^{p+q}}\sum_{i_1=0}^{p-1}\sum_{i_2=0}^{q-1}R_1^{i_1+i_2}|s_{i_1 i_2}|+\frac{D}{R_1^p}\sum_{i_1=0}^{p-1}R_1^{i_1}|s_{i_1 q}|+$$

$$+\frac{D}{R_1^q}\sum_{i_2=0}^{q-1}R_1^{i_2}|s_{pi_2}|. \tag{6.8}$$

Пусть $\max\limits_{i_1+i_2=k}|s_{i_1 i_2}|\leqslant A_k$, $k=1, 2, \ldots, \nu-1$; $p+q=\nu$.

Положим $A_k<\left(\frac{B}{R_1}\right)^k$, $k=1, 2, \ldots, \nu-1$, что будет, очевидно, верно при некоторой достаточно большой постоянной $B>1$. Из неравенства (6.8) теперь следует:

$$|s_{pq}|<\frac{D}{R_1^{p+q}}\left[\sum_{i_1=0}^{p-1}\sum_{i_2=0}^{q-1}B^{i_1+i_2}+\sum_{i_1=0}^{p-1}B^{i_1}+\sum_{i_2=0}^{q-1}B^{i_2}\right]<$$

$$<\frac{3D}{R_1^{p+q}}\sum_{k=0}^{\nu-1}\sum_{i_1+i_2=k}B^{\nu-(i_1+i_2)-1}=\frac{3D}{R_1^{p+q}}\sum_{k=0}^{\nu-1}kB^{\nu-k-1}=$$

$$=\frac{3DB^{\nu-1}}{R_1^\nu}\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{k}{B^k}<\left(\frac{B}{R_1}\right)^\nu\frac{3DB}{(B-1)^2}.$$

Выбрав $B\geqslant 1+\frac{3D}{2}+\sqrt{3D+\left(\frac{3D}{2}\right)^2}$, приходим к неравенству

$$A_\nu<\left(\frac{B}{R_1}\right)^\nu.$$

При этом B от ν не зависит.

Теперь соотношение

$$|f(z, w)|=\left|\sum_{p+q=0}^{\infty}s_{pq}z^p w^q\right|\ll\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\left(\frac{B}{R_1}\right)^{p+q}|z|^p|w|^q$$

($\ll$ знак можорации) показывает, что ряд $\sum\limits_{p+q=0}^{\infty}s_{pq}z^p w^q$ сходится равномерно в бицилиндре $|z|<\frac{R}{B}$, $|w|<\frac{R}{B}$ и, тем самым, является голоморфной функцией. Теорема доказана.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Вильнюсский Государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
1968. III. 26

Литература

1. Ш. И. Стрелиц, Аналог теоремы Фукса для решений линейных уравнений в частных производных, Мат. сб., т. 60, 102, № 2 (1962).
2. И. В. Киселюс, Аналитические решения одного класса линейных уравнений в частных производных, Лит. мат. сб., V, № 1, (1965), 85—96.
3. Р. Неванлина, Униформизация, М., 1965.
4. Н. Г. Чеботарев, Собрание сочинений, т. 3, М.—Л., 1950.

APIE DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SU DALINĖMIS IŠVESTINĖMIS HOLOMORFINIUS SPRENDINIUS

S. STRELICAS, J. KISIELIUS

(Reziumė)

Šiame straipsnyje įrodyta šitokia teorema.

Teorema. *Tarkime, kad diferencialinės lygties atžvilgiu*

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} F_{j\,k-j}(z,\ w)\, z^j w^{k-j}\frac{\partial^k u}{\partial z^j\partial w^{k-j}}=0, \qquad n\geqslant 2 \tag{1}$$

priimtos šitokios prielaidos:

1) *funkcijos* $F_{jk-j}(z,w)$; $j=0,1,\ldots,k$, $k=0,1,\ldots n$, *yra analizinės bicilindre* $|z|<R$ ir $|w|<R$;

2) *egzistuoja bent viena skaičių* λ *ir* μ *pora, tenkinanti lygtį*

$$Q(\lambda,\ \mu)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} F_{j\,k-j}\,(0,\ 0)\ \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-j+1)}\ \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-k+j+1)}=0$$

ir tokia, kad, visiems sveikiems neneigiamiems skaičiams p *ir* q, $p+q\geqslant 1$, *polinomai* $Q(\lambda,\mu)$ ir $Q(\lambda+p,\ \mu+q)$ *neturi bendrų daliklių;*

3) *polinomas* $Q(\lambda,\mu)$ *yra arba pirminis, arba turi bent vieną pirminį daliklį, kurio laipsnis* $n\geqslant 2$.

Sakykime, lygtis

$$H(\zeta)=\sum_{j=0}^{n} F_{j\,n-j}\,(0,\ 0)\,\zeta^{n-j}=0$$

turi šaknis $\varsigma_1\ \zeta_2,\ldots,\ \varsigma_m$, kurių kartotinumas yra atitinkamai $k_1,\ k_2,\ldots,\ k_m$ ir $\max(k_1,\ k_2,\ldots,k_m)=l$.

Jei prie šių sąlygų visi (1) lygties koeficientai $F_{jk-j}(z,w)\equiv\mathrm{const}$, kai $k>n-l$ ir, be to, $F_{n,0}(0{,}0)\neq 0$ ir $F_{0n}(0{,}0)\neq 0$, tai lygtis (1) turi begalinę aibę tiesiškai nepriklausomų sprendinių pavidalo

$$u=z^{\lambda}w^{\mu}f(z,\ w), \tag{2}$$

kur λ ir μ — konstantos, kurios tenkina lygtį $Q(\lambda,\mu)=0$, o $f(z,w)$ — analizinė funkcija taško (0,0) aplinkoje.

Šis straipsnis yra tęsinys darbų [1] ir [2], kuriuose įrodėme, kad lygtis (1) turi sprendinius (2), esant sąlygai, kad forma

$$\sum_{k=0}^{n} F_{k\,n-k}\,(0,\ 0)\ \eta_1^k\eta_2^{n-k},$$

kur $\eta_1\geqslant 0$, $\eta_2\geqslant 0$, $\eta_1+\eta_2=1$, nevirsta nuliu, kai galioja šios teoremos prielaida 1).

ÜBER HOLOMORPHE LÖSUNGEN PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

S. STRELITZ, J. KISIELIUS

(Zusammenfassung)

Im vorliegenden Artikel beweisen wir den folgenden

Satz. In Bezug auf die Differentialgleichung

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} F_{j\,k-j}(z, w)\, z^j w^{k-j} \frac{\partial^k u}{\partial z^j \partial w^{k-j}} = 0 \qquad (1)$$

haben wir die folgenden Voraussetzungen angenommen:

1) $F_{jk-j}(z, w)$, $j=0, 1, \ldots, k$, $k=0, 1, \ldots, n$ sind analytische Funktionen im Bizylinder $|z|<R$ und $|w|<R$;

2) es gibt wenigstens ein Paar der Zahlen λ und μ, das die Gleichung

$$Q(\lambda, \mu) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} F_{j\,k-j}(0, 0) \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-j+1)} \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-k+j+1)} = 0$$

befriedigt, und ein solches, dass die Polynomen $Q(\lambda, \mu)$ und $Q(\lambda+p, \mu+q)$, für alle nichtnegativen Zahlen p und q, $p+q \geqslant 1$, teilerfremde sind;

3) das Polynom $Q(\lambda, \mu)$ ist entweder irreduzibel, oder hat wenigstens einen irreduziblen Teiler, dessen Potenz $n \geqslant 2$, ist. Nehmen wir an, dass die Gleichung

$$H(\zeta) = \sum_{j=0}^{n} F_{j\,n-j}(0, 0)\, \zeta^{n-j} = 0$$

die Wurzeln $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$ hat, die sich wiederholen dementsprechend $k_1, k_2, \ldots, k_m$ Mal, und $\max(k_1, k_2, \ldots, k_m) = l$.

Falls bei diesen Annahmen die Koeffizienten $F_{jk-j}(z, w) \equiv \text{const}$, wenn $k > n-l$, und dabei $F_{n0}(0,0) \neq 0$ und $F_{0n}(0,0) \neq 0$, so hat die Gleichung (1) eine unendliche Menge von linear unabhängigen Lösungen der Form

$$u = z^{\lambda} w^{\mu} f(z, w), \qquad (2)$$

wo λ und μ die Konstanten sind, die die Gleichung $Q(\lambda, \mu) = 0$ befriedigen und $f(z, w)$ eine holomorphe Funktion in der Umgebung des Anfangspunktes der Koordinatsystems ist.

Dieser Artikel ist die Fortsetzung der Arbeiten [1] und [2], in denen wir bewiesen haben, dass die Gleichung (1) die Lösungen der Form (2) hat, bei der Annahme, dass die Form

$$\sum_{k=0}^{n} F_{k\,n-k}(0, 0)\, \eta_1^k \eta_2^{n-k},$$

mit $\eta_1 \geqslant 0$, $\eta_2 \geqslant 0$, $\eta_1 + \eta_2 = 1$, sich von Null unterscheidet, wenn die Bedingung 1) befriedigt ist.