УДК – 513

О ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА ГИПЕРПЛОСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

И. Х. МЕДВЕДЕВАЙТЕ

В [1] рассматривалось метрическое пространство гиперплоских элементов $\mathfrak{M}_n$ с евклидовой связностью картановского типа, а в настоящей заметке рассматривается один вариант теории гиперповерхностей этого пространства $\mathfrak{M}_n$. Гиперповерхностью $\mathfrak{M}_{n-1}$ пространства $\mathfrak{M}_n$ назовем $(n-1)$ – параметрическое многообразие гиперплоских элементов. Центры гиперплоских элементов, принадлежащих многообразию $\mathfrak{M}_{n-1}$, образуют гиперповерхность $\mathfrak{N}_{n-1}$, называемую гиперцентроидой гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$. Будем рассматривать только тот случай гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$, когда опорная гиперплоскость в каждой точке совпадает с касательной гиперплоскостью гиперцентроиды $\mathfrak{N}_{n-1}$ в этой точке.

1. *Фундаментальные квадратичные формы гиперповерхности.* Структурные уравнения метрического пространства гиперплоских элементов $\mathfrak{M}_n$ с евклидовой связностью картановского типа имеют вид [1]:

$$D\omega^i=[\omega^k,\ \tilde{\omega}_k^i]+R_{kp}^i[\omega^p,\ \omega^k]+C_k^{ip}[\tilde{\Theta}_p,\ \omega^k], \tag{1a}$$

$$D\tilde{\omega}_j^i=[\tilde{\omega}_j^k,\ \tilde{\omega}_k^i]+R_{jkp}^i[\omega^p,\ \omega^k]+K_{jk}^{ip}[\tilde{\Theta}_p,\ \omega^k]+M_j^{ikp}[\tilde{\Theta}_p,\ \tilde{\Theta}_k] \tag{1b}$$

$$(i,\ j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\quad \alpha,\ \beta,\ \gamma=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

Если корепер $\{M, e^i\}$ локального касательного пространства $A_n(M)$ выбран так, что ковектор e^n совпадает с опорным ковектором в рассматриваемой точке M, т.е. $u_i=\delta_i^n$, то структурные уравнения (1) принимают вид:

$$D\omega^i=[\omega^k,\ \tilde{\omega}_k^i]+R_{kp}^i[\omega^p,\ \omega^k]+C_k^{i\alpha}[\tilde{\omega}_\alpha^n,\ \omega^k],$$

$$D\tilde{\omega}_j^i=[\tilde{\omega}_j^k,\ \tilde{\omega}_k^i]+R_{jkp}^i[\omega^p,\ \omega^k]+K_{jk}^{i\alpha}[\tilde{\omega}_\alpha^n,\ \omega^k]+M_j^{i\alpha\beta}[\tilde{\omega}_\beta^n,\ \tilde{\omega}_\alpha^n].$$

Так как корепер частично канонизирован, то рассматриваемая гиперповерхность $\mathfrak{M}_{n-1}$ определяется уравнениями:

$$\omega^n=0,\ [\tilde{\omega}_\alpha^n+R_{\alpha\beta}^n\omega^\beta-C_\alpha^{n\beta}\tilde{\omega}_\beta^n,\ \omega^\alpha]=0. \tag{2}$$

Применив лемму Картана, мы получим

$$\tilde{\omega}_\alpha^n+R_{\alpha\beta}^n\omega^\beta-C_\alpha^{n\beta}\tilde{\omega}_\beta^n=a_{\alpha\beta}\,\omega^\beta,$$

где

$$a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}.$$

Если

$$\det \| A^{\gamma}_{\beta} \| \equiv \det \| \delta^{\gamma}_{\beta} - C^{n\gamma}_{\beta} \| \neq 0,$$

то

$$\tilde{\omega}^{n}_{\alpha} = \Lambda_{\alpha\beta}\, \omega^{\beta}, \tag{3}$$

где

$$\Lambda_{\alpha\beta} = \tilde{A}^{\gamma}_{\alpha} (a_{\gamma\beta} - R^{n}_{\gamma\beta}), \quad \tilde{A}^{\gamma}_{\alpha} A^{\beta}_{\gamma} = \delta^{\beta}_{\alpha}.$$

Очевидно, что $\Lambda_{\alpha\beta} \neq \Lambda_{\beta\alpha}$.

Величины $\Lambda_{\alpha\beta}$ образуют тензор, т.е.

$$\nabla \Lambda_{\alpha\beta} + \Lambda_{\alpha\beta}\, \tilde{\omega}^{n}_{n} \equiv 0\, (mod.\ \omega^{\alpha},\ \tilde{\omega}^{n}_{\alpha}).$$

При помощи метрического тензора g_{ij} пространства $\mathfrak{M}_n$, на гиперповерхности (2) индуцируется метрика, определяемая тензором $G_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\beta}$, дифференциальные уравнения которого имеют вид:

$$\nabla G_{\alpha\beta} \equiv dG_{\alpha\beta} - G_{\alpha\gamma}\, \tilde{\omega}^{\gamma}_{\beta} - G_{\gamma\beta}\, \tilde{\omega}^{\gamma}_{\alpha} = G_{\alpha\beta\gamma}\, \omega^{\gamma},$$

где

$$G_{\alpha\beta\gamma} = g_{n\beta}\, \Lambda_{\alpha\gamma} + g_{n\alpha}\, \Lambda_{\beta\gamma}.$$

В каждой точке гиперповерхности (2) можно построить репер так, чтобы вектор e_n был ортогонален к касательной гиперплоскости. Из соотношений

$$dg_{n\alpha} - g_{nk}\, \tilde{\omega}^{k}_{\alpha} - g_{k\alpha}\, \tilde{\omega}^{k}_{n} = 0$$

следует, что

$$\tilde{\omega}^{\beta}_{n}\, G_{\alpha\beta} + g_{nn}\, \tilde{\omega}^{n}_{\alpha} = 0$$

или

$$\tilde{\omega}^{\beta}_{n} = -g_{nn}\, \tilde{\omega}^{n}_{\alpha}\, G^{\alpha\beta}. \tag{4}$$

По аналогии с обычной теорией поверхностей евклидова пространства [3], введем фундаментальные квадратичные формы гиперповерхности (2), определенные следующим образом:

$$\mathrm{I} \equiv (dM,\ dM) = G_{\alpha\beta}\, \omega^{\alpha}\, \omega^{\beta},$$
$$\mathrm{II} \equiv -(dM,\ de^{n}) = \Lambda_{(\alpha\beta)}\, \omega^{\alpha}\, \omega^{\beta},$$
$$\mathrm{III} \equiv (de^{n},\ de^{n}) = \Lambda_{\alpha(\gamma}\, \Lambda_{|\sigma|\beta)}\, G^{\alpha\sigma}\, \omega^{\gamma}\, \omega^{\beta},$$

где скобки $(\ldots)$ означают скалярное произведение.

Третья фундаментальная квадратичная форма определяет квадрат дифференциала угла между касательными гиперплоскостями в бесконечно близких точках M и $M' = M + dM$.

Введем следующие обозначения:

$$\det \| \Lambda_{\alpha\beta} \| = \Lambda, \quad \det \| \Lambda_{(\alpha\beta)} \| = \Lambda^{*}, \quad \det \| \Lambda_{[\alpha\beta]} \| = \Lambda',$$
$$\det \| G_{\alpha\beta} \| = G, \quad \det \| \Lambda_{\gamma(\alpha}\, \Lambda_{|\sigma|\beta)}\, G^{\gamma\sigma} \| = \Lambda^{**}.$$

2. *Кривизны гиперповерхности.* Кривая на гиперповерхности (2) определяется системой дифференциальных уравнений [1]:

$$\omega^{n} = 0, \quad \omega^{\alpha} = l^{\alpha}_{(1)}\, ds, \tag{5}$$

где s — дуга центроиды этой кривой.

При помощи метрической связности пространства $\mathfrak{M}_n$ можно определить отображение локальных касательных пространств. Таким образом, при отображении локального касательного пространства точки $M'(x+dx)$ в локальное касательное пространство точки $M(x)$, единичный касательный вектор $\tau(x+dx)$ кривой (5) должен перейти в вектор $\tau(x, dx)$, т.е.

$$\tau(x+dx) \to \tau(x, dx) = \tau(x) + a(x)\, ds + \ldots,$$

где

$$\tau(x) = \frac{dM(x)}{ds} = l^{\alpha}_{(1)} e_{\alpha},$$

$$a(x) = l^{\alpha}_{(2)} e_{\alpha} + \frac{l^{\alpha}_{(1)} \tilde{\omega}^{n}_{\alpha}}{ds} e_n. \tag{6}$$

Коэффициент σ в рассматриваемом разложении (6) при векторе e_n назовем нормальной кривизной гиперповерхности (2). Оказывается, что нормальная кривизна σ равна отношению второй и первой фундаментальных квадратичных форм гиперповерхности:

$$\sigma = \frac{\Lambda_{(\alpha\beta)}\, \omega^{\alpha} \omega^{\beta}}{G_{\alpha\beta}\, \omega^{\alpha} \omega^{\beta}}.$$

Дифференцируя уравнение $[\sigma G_{\alpha\beta} - \Lambda_{(\alpha\beta)}]\ \omega^{\alpha}\omega^{\beta} = 0$ по ω^{γ} и считая, что $\frac{\partial\sigma}{\partial\omega^{\gamma}} = 0$, мы получим систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\omega^{\beta}(\sigma G_{\alpha\beta} - \Lambda_{(\alpha\beta)}) = 0. \tag{7}$$

Эта система совместна тогда и только тогда, когда

$$\det \| \sigma G_{\alpha\beta} - \Lambda_{(\alpha\beta)} \| = 0.$$

Последнее равенство можно переписать в следующем виде:

$$\sigma^{n-1} S_0 - \sigma^{n-2} S_1 + \cdots + (-1)^{n-2} \sigma S_{n-2} + (-1)^{n-1} S_{n-1} = 0, \tag{8}$$

где S_{α} $(a=0, 1, 2, \ldots, n-1)$ – сумма детерминантов $(n-1)$-ого порядка, составленных из матрицы $\| G_{\alpha\beta} \|$, в которых любые a столбцов матрицы $\| G_{\alpha\beta} \|$ заменены соответствующими столбцами матрицы $\| \Lambda_{(\alpha\beta)} \|$. Например, когда $n-1=3$, то S_1 и S_2 имеют вид:

$$S_1 = \begin{vmatrix} \Lambda_{(11)} & G_{12} & G_{13} \\ \Lambda_{(21)} & G_{22} & G_{23} \\ \Lambda_{(31)} & G_{32} & G_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} G_{11} & \Lambda_{(12)} & G_{13} \\ G_{21} & \Lambda_{(22)} & G_{23} \\ G_{31} & \Lambda_{(32)} & G_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & \Lambda_{(13)} \\ G_{21} & G_{22} & \Lambda_{(23)} \\ G_{31} & G_{32} & \Lambda_{(33)} \end{vmatrix},$$

$$S_2 = \begin{vmatrix} \Lambda_{(11)} & \Lambda_{(12)} & G_{13} \\ \Lambda_{(21)} & \Lambda_{(22)} & G_{23} \\ \Lambda_{(31)} & \Lambda_{(32)} & G_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Lambda_{(11)} & G_{12} & \Lambda_{(13)} \\ \Lambda_{(21)} & G_{22} & \Lambda_{(23)} \\ \Lambda_{(31)} & G_{32} & \Lambda_{(33)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} G_{11} & \Lambda_{(12)} & \Lambda_{(13)} \\ G_{21} & \Lambda_{(22)} & \Lambda_{(23)} \\ G_{31} & \Lambda_{(32)} & \Lambda_{(33)} \end{vmatrix}.$$

Замечаем, что $S_0 = G$, $S_{n-1} = \Lambda^{*}$.

Корни σ_{α} $(\alpha=1, 2, \ldots, n-1)$ уравнения (8) будем называть главными нормальными кривизнами рассматриваемой гиперповерхности [2]. По аналогии с обычной теорией поверхностей, величины L_α, определенные следующими равенствами:

$$L_\alpha A^\alpha_{n-1} = \sum_{\alpha_1=1}^{n-1} \sum_{\alpha_2=1}^{n-1} \cdots \sum_{\alpha_{n-1}=1}^{n-1} \sigma_{\alpha_1} \sigma_{\alpha_2} \ldots \sigma_{\alpha_{n-1}} \tag{9}$$

[$\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \ldots \neq \alpha_{n-1}$, $A^\alpha_{n-1} = (n-1)(n-2) \ldots (n-\alpha)$, по α не суммировать], будем называть главными кривизнами гиперповерхности. Когда $\alpha = 1$, получаем среднюю нормальную кривизну, а при $\alpha = n-1$ – полную нормальную кривизну гиперповерхности.

Пусть в локальном касательном пространстве точки $M'(x+dx)$ имеем единичный вектор $\boldsymbol{t}(x+dx)$. Тогда

$$\boldsymbol{t}(x+dx) \to \boldsymbol{t}(x, dx) = \boldsymbol{t}(x) + \boldsymbol{b}(x)\, ds + \ldots,$$

где

$$\boldsymbol{b}(x) = \frac{t^\alpha \tilde{\omega}^n_\alpha}{ds} \boldsymbol{e}_n.$$

Коэффициент при векторе $\boldsymbol{e}_n$ в этом разложении обозначим через $\bar{\rho}$, т.е.

$$\bar{\rho} = \Lambda_{\alpha\beta} \tau^\beta t^\alpha.$$

Величину ρ, определенную равенством

$$\rho = \frac{\Lambda_{\alpha\beta} t^\alpha \tau^\beta}{G_{\alpha\beta} \omega^\alpha \omega^\beta},$$

назовем нормальной кривизной гиперповерхности по двум единичным направлениям $\boldsymbol{t}$ и $\boldsymbol{\tau}$ ($\boldsymbol{\tau}$ – единичный касательный вектор кривой на гиперповерхности).

Если

$$t^\alpha = \frac{\tilde{\omega}_n}{g_{nn}},$$

то

$$\rho = \frac{\Lambda_{\alpha(\beta} \Lambda_{|\gamma|\sigma)} G^{\alpha\gamma} \omega^\beta \omega^\sigma}{G_{\beta\sigma} \omega^\beta \omega^\sigma}.$$

В этом случае величину ρ назовем сферической кривизной рассматриваемой гиперповерхности (она равна отношению третьей и первой фундаментальных квадратичных форм гиперповерхности). Выполнив такие же вычисления, как и для нормальной кривизны σ, получим, что экстремальные значения сферической кривизны являются решениями следующего уравнения:

$$\rho^{n-1} P_0 - \rho^{n-2} P_1 + \ldots + (-1)^{n-2} \rho P_{n-2} + (-1)^{n-1} P_{n-1} = 0, \tag{10}$$

где P_a ($a = 0, 1, 2, \ldots, n-1$) – сумма детерминантов $(n-1)$-ого порядка, составленных из матрицы $\| G_{\alpha\beta} \|$, в которых любые a столбцов матрицы $\| G_{\alpha\beta} \|$ заменены соответствующими столбцами матрицы $\| \Lambda_{\sigma(\alpha} \Lambda_{|\gamma|\beta)} G^{\sigma\gamma} \|$. Например, когда $n-1=3$, то P_1 и P_2 принимают вид:

$$P_1 = \begin{vmatrix} \Lambda_{\alpha(1} \Lambda_{|\beta|1)} G^{\alpha\beta} & G_{12} & G_{13} \\ \Lambda_{\alpha(2} \Lambda_{|\beta|1)} G^{\alpha\beta} & G_{22} & G_{23} \\ \Lambda_{\alpha(3} \Lambda_{|\beta|1)} G^{\alpha\beta} & G_{32} & G_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & \Lambda_{\alpha(1} \Lambda_{|\beta|3)} G^{\alpha\beta} \\ G_{21} & G_{22} & \Lambda_{\alpha(2} \Lambda_{|\beta|3)} G^{\alpha\beta} \\ G_{31} & G_{32} & \Lambda_{\alpha(3} \Lambda_{|\beta|3)} G^{\alpha\beta} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} G_{11} \Lambda_{\alpha(1} \Lambda_{|\beta|2)} G^{\alpha\beta} & G_{13} \\ G_{21} \Lambda_{\alpha(2} \Lambda_{|\beta|2)} G^{\alpha\beta} & G_{23} \\ G_{31} \Lambda_{\alpha(3} \Lambda_{\cdot\beta|)} G^{\beta} & G_{33} \end{vmatrix},$$

$$P_2 = \begin{vmatrix} \Lambda_{\alpha(1}\Lambda_{|\beta|1)}\,G^{\alpha\beta} & \Lambda_{\alpha(1}\Lambda_{|\beta|2)}\,G^{\alpha\beta} & G_{13} \\ \Lambda_{\alpha(2}\Lambda_{|\beta|1)}\,G^{\alpha\beta} & \Lambda_{\alpha(2}\Lambda_{|\beta|2)}\,G^{\alpha\beta} & G_{23} \\ \Lambda_{\alpha(3}\Lambda_{|\beta|1)}\,G^{\alpha\beta} & \Lambda_{\alpha(3}\Lambda_{|\beta|2)}\,G^{\alpha\beta} & G_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} G_{11} & \Lambda_{\alpha(1}\Lambda_{|\beta|2)}\,G^{\alpha\beta} & \Lambda_{\alpha(1}\Lambda_{|\beta|3)}\,G^{\alpha\beta} \\ G_{21} & \Lambda_{\alpha(2}\Lambda_{|\beta|2)}\,G^{\alpha\beta} & \Lambda_{\alpha(2}\Lambda_{|\beta|3)}\,G^{\alpha\beta} \\ G_{31} & \Lambda_{\alpha(3}\Lambda_{|\beta|2)}\,G^{\alpha\beta} & \Lambda_{\alpha(3}\Lambda_{|\beta|3)}\,G^{\alpha\beta} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \Lambda_{\alpha(1}\Lambda_{|\beta|1)}\,G^{\alpha\beta} & G_{12} & \Lambda_{\alpha(1}\Lambda_{|\beta|3)}\,G^{\alpha\beta} \\ \Lambda_{\alpha(2}\Lambda_{|\beta|1)}\,G^{\alpha\beta} & G_{22} & \Lambda_{\alpha(2}\Lambda_{|\beta|3)}\,G^{\alpha\beta} \\ \Lambda_{\alpha(3}\Lambda_{|\beta|1)}\,G^{\alpha\beta} & G_{23} & \Lambda_{\alpha(3}\Lambda_{|\beta|3)}\,G^{\alpha\beta} \end{vmatrix}.$$

Корни ρ_α $(\alpha=1, 2, \ldots, n-1)$ уравнения (10) будем называть главными сферическими кривизнами рассматриваемой гиперповерхности, а величины T_α, определенные равенствами:

$$T_\alpha A^\alpha_{n-1} = \sum_{\alpha_1=1}^{n-1} \sum_{\alpha_2=1}^{n-1} \cdots \sum_{\alpha_{n-1}=1}^{n-1} \rho_{\alpha_1}\rho_{\alpha_2}\ldots\rho_{\alpha_{n-1}} \tag{11}$$

$[\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \ldots \neq \alpha_{n-1},\ A^\alpha_{n-1} = (n-1)(n-2)\ldots(n-\alpha)$, по α не суммировать$]$ — сферическими кривизнами гиперповерхности.

3. *Трехмерный случай* $(n=3)$. В таком случае уравнения (2) определяют поверхность. Формулы (9) и (11) принимают вид:

$$2L_1 \equiv 2h = \Lambda_{(\alpha\beta)}\,G^{\alpha\beta}, \quad L_2 \equiv k = \frac{\Lambda^*}{G}, \tag{12}$$

$$2T_1 \equiv 2H = \Lambda_{\alpha(\gamma}\Lambda_{|\sigma|\beta)}\,G^{\alpha\sigma}G^{\gamma\beta}, \quad T_2 \equiv K = \frac{\Lambda^{**}}{G}. \tag{13}$$

Из полученных уравнений следуют соотношения:

$$h^2 - H = 2\left(k - \frac{\Lambda'}{G}\right), \quad K = \left(k + \frac{\Lambda'}{G}\right)^2.$$

Очевидно, что, при

$$\Lambda_{\alpha\beta} = \Lambda_{\beta\alpha}, \tag{14}$$

получается:

$$\Lambda' = 0, \ h^2 - H = 2k, \ K = k^2.$$

Замечаем, что если выполнены условия (14), то три фундаментальные квадратичные формы поверхности оказываются связанными следующей линейной зависимостью (как и в обычной теории поверхностей [3]):

$$\mathrm{III} - 2h\,\mathrm{II} + k\,\mathrm{I} = 0. \tag{15}$$

Нетрудно убедиться, что условия (14) являются и необходимыми для того, чтобы три фундаментальные формы поверхности были бы связаны соотношением (15). Для этого рассмотрим квадратичную форму $\pi_{(\alpha\beta)}\,\omega^\alpha\omega^\beta$, где

$$\pi_{(\alpha\beta)} \equiv \Lambda_{\gamma(\alpha}\Lambda_{|\sigma|\beta)}\,G^{\gamma\sigma} - 2h\Lambda_{(\alpha\beta)} + kG_{\alpha\beta}.$$

Если $\pi_{(\alpha\beta)}=0$, то

$$\pi_{11}\equiv\Lambda_{11}G^{21}(\Lambda_{21}-\Lambda_{12})+G^{22}(\Lambda_{21}\Lambda_{21}-\Lambda_{11}\Lambda_{22}+\Lambda^*)=0,$$

$$\pi_{22}\equiv\Lambda_{22}G^{12}(\Lambda_{12}-\Lambda_{21})+G^{11}(\Lambda_{12}\Lambda_{12}-\Lambda_{11}\Lambda_{22}+\Lambda^*)=0,$$

$$\pi_{(12)}\equiv(\Lambda_{11}G^{11}-\Lambda_{22}G^{22})(\Lambda_{12}-\Lambda_{21})+2G^{12}(\Lambda_{12}\Lambda_{21}-\Lambda_{11}\Lambda_{22}+\Lambda^*)=0.$$

Умножая первое уравнение на G^{11}, второе — на G^{22}, третье — на G^{12} и складывая полученные уравнения, будем иметь

$$(\Lambda_{12}-\Lambda_{21})^2=0,$$

или

$$\Lambda_{\alpha\beta}=\Lambda_{\beta\alpha}.$$

Величину

$$E=h^2-k$$

назовем эйлеровой разностью рассматриваемой поверхности (см. [3]). Из определения, в силу (12), следует, что

$$4E=(\Lambda_{11}G^{11}-\Lambda_{22}G^{22})^2+4\Lambda_{(12)}G^{11}G^{22}\Lambda_{(12)}+4\Lambda_{11}\Lambda_{22}G^{12}G^{12}+$$
$$+4(\Lambda_{11}G^{11}+\Lambda_{22}G^{22})\Lambda_{(12)}G^{12}$$

или

$$4E=(\Lambda_{11}G^{11}-\Lambda_{22}G^{22})^2\frac{1}{G}+G^{11}G^{22}\left[2\Lambda_{(12)}\sqrt{G^{11}G^{22}}+\frac{G^{12}(\Lambda_{11}G^{11}+\Lambda_{22}G^{22})}{\sqrt{G^{11}G^{22}}}\right]^2.$$

Очевидно, что эйлерова разность не может иметь отрицательного значения ни в одной точке поверхности. Если же E обращается в нуль, то

$$\Lambda_{11}G^{11}-\Lambda_{22}G^{22}=0,$$

$$2\Lambda_{12}G^{11}G^{22}+G^{12}(\Lambda_{11}G^{11}+\Lambda_{22}G^{22})=0.$$

Отсюда следует, что

$$\Lambda_{11}G_{22}-\Lambda_{22}G_{11}=0,$$

$$\Lambda_{(12)}G_{11}-\Lambda_{11}G_{12}=0.$$

Это означает, что компоненты второй фундаментальной квадратичной формы пропорциональны компонентам первой формы, т.е.

$\Lambda_{(\alpha\beta)}=cG_{\alpha\beta}$ (c — коэффициент пропорциональности). Заметим еще, что последние соотношения влекут за собой равенства

$$2h=\Lambda_{(\alpha\beta)}G^{\alpha\beta}=2c,\quad h=c.$$

Таким образом, получается

$$\Lambda_{(\alpha\beta)}=hG_{\alpha\beta}. \tag{16}$$

Легко проверить, что условия (16) эквивалентны уравнению $E=0$. Следовательно, эйлерова разность обращается в нуль тогда и только тогда, когда

$$\Lambda_{(\alpha\beta)}=hG_{(\alpha\beta)}.$$

Из равенств (12) и (13) очевидны следующие соотношения:

если $k=0$, то $K=\left(\frac{\Lambda'}{G}\right)^2$, т. е. всегда $K>0$. Кроме того, при $\Lambda_{\alpha\beta}=$ $=\Lambda_{\beta\alpha}$, получаем, что $K=0$.

Если же $K=0$, то $k=-\frac{\Lambda'}{G}$.

Поверхности, во всех точках которых средняя нормальная кривизна равна нулю, назовем минимальными поверхностями (по аналогии с теорией поверхностей евклидова пространства [3]). Имея в виду свойство эйлеровой разности ($E \geqslant 0$), находим, что для минимальных поверхностей всегда $k<0$.

Асимптотическими направлениями на поверхности назовем такие направления, для которых нормальная кривизна поверхности равна нулю, т.е.

$$\Lambda_{(\alpha\beta)}\,\omega^\alpha\,\omega^\beta=0. \tag{17}$$

Уравнение (17) является дифференциальным уравнением асимптотических направлений поверхности. Оказывается, что асимптотические направления минимальной поверхности всегда ортогональны.

4. *Линии кривизны.* Каждой точке кривой L на поверхности соответствует вектор e_3, а для всей кривой имеем векторное поле $e_3(L)$. Так как при помощи связности можно отобразить локальное касательное пространство точки $M'(x+dx)$ в локальное касательное пространство точки $M(x)$, то в $A_3(M)$ получаем кривую L^*, т.е. развертку кривой L, и векторное поле $e_3(L^*)$ — линейчатую поверхность, направляющая кривая которой будет L^*, а образующие параллельны образам векторов $e_3(M+dM)$.

Если развертка векторного поля $e_3(L)$ есть развертывающаяся поверхность, то кривая L называется линией кривизны второго рода рассматриваемой поверхности (см. [4]).

Пусть $e_3(L^*)$ — развертывающаяся поверхность, и вектор $M(x)+\lambda(x)\,e_3(x)$ определяет точку, в которой образующая касается ребра возврата. При отображении $A_3(M+dM)\to A_3(M)$ вектор $M(x+dx)+\lambda(x+dx)\,e_3(x+dx)$ должен перейти в вектор, параллельный вектору $M(x)+\lambda(x)\,e_3(x)$. Так как

$$\begin{aligned}M(x+dx)+\lambda(x+dx)\,e_3(x+dx)&\to M(x,dx)+\lambda(x,dx)\,e_3(x,dx)=\\&=M(x)+\lambda(x)\,e_3(x)+a(x)\,ds+\ldots,\end{aligned}$$

где

$$a(x)=\frac{\omega^\alpha+\lambda\bar\omega_3^\alpha}{ds}\,e_\alpha+\frac{d\lambda+\lambda\bar\omega_3^3}{ds}\,e_3,$$

то упомянутое условие будет выполнено тогда и только тогда, когда

$$\omega^\alpha+\lambda\bar\omega_3^\alpha=0. \tag{18}$$

Система (18) совместна тогда и только тогда, когда

$$\det\|\lambda\delta_\beta^\alpha-g_{33}\,G^{\alpha\gamma}\,\Lambda_{\gamma\beta}\|=0$$

или

$$\lambda^2-\lambda g_{33}\,G^{\alpha\beta}\,\Lambda_{\beta\alpha}+g_{33}^2\,\frac{\Lambda}{G}=0.$$

Величины $2\bar h$ и $\bar k$, определенные следующими равенствами:

$$2\bar h=G_{\alpha\beta}\,\Lambda_{\beta\alpha}\,g_{33},\qquad \bar k=g_{33}^2\,\frac{\Lambda}{G}, \tag{19}$$

назовем соответственно средней нормальной кривизной второго рода и полной нормальной кривизной второго рода рассматриваемой поверхности.

Из (12) и (19) следуют соотношения:

$$\bar{h} = g_{33}(h + \Lambda_{(12)} G^{12}), \quad \bar{k} = g_{33}^2 \left(k + \frac{\Lambda'}{G}\right).$$

Очевидно, что, если $\Lambda_{\alpha\beta} = \Lambda_{\beta\alpha}$ и $q_{33} = 1$, то

$$\bar{k} = k, \quad \bar{h} = h + \Lambda_{(12)} G^{12}.$$

Чтобы получить дифференциальное уравнение линий кривизны второго рода для рассматриваемой поверхности, следует, очевидно, из уравнений (18) исключить величину λ:

$$(\omega^1)^2 G^{2\alpha} \Lambda_{\alpha 1} + \omega^1 \omega^2 (G^{2\alpha} \Lambda_{\alpha 2} - G^{1\alpha} \Lambda_{\alpha 1}) - (\omega^2)^2 G^{1\alpha} \Lambda_{\alpha 2} = 0.$$

Оказывается, что линии кривизны второго рода ортогональны тогда и только тогда, когда $\Lambda_{\alpha\beta} = \Lambda_{\beta\alpha}$.

Линиями кривизны первого рода для поверхности назовем такие линии, которые соответствуют экстремальным значениям нормальной кривизны рассматриваемой поверхности (см. [4]).

Из (7) получаем следующее дифференциальное уравнение для линий кривизны первого рода:

$$(\omega^1)^2 G^{2\alpha} \Lambda_{(\alpha 1)} + \omega^1 \omega^2 (G^{2\alpha} \Lambda_{(\alpha 2)} - G^{\alpha 1} \Lambda_{(\alpha 1)}) - (\omega^2)^2 G^{\alpha 1} \Lambda_{(\alpha 2)} = 0.$$

Нетрудно убедиться, что линии кривизны первого рода всегда ортогональны. Кроме того, если $\Lambda_{\alpha\beta} = \Lambda_{\beta\alpha}$, то линии кривизны первого рода и второго рода для рассматриваемой поверхности совпадают.

Считаю своим приятным долгом поблагодарить доц. В. Близникаса за руководство и помощь.

Вильнюсский Государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
20. III. 1968

Литература

1. И. Х. Медведевайте, Некоторые вопросы геометрии метрического пространства гиперплоских элементов, Лит. мат. сб., VI, № 4 (1966), 533–539.
2. В. И. Близникас, Некоторые внутренние аффинные связности на гиперповерхности пространства аффинной связности, Труды I респ. конф. математиков БССР, Минск, 1965, 259–266.
3. В. Ф. Каган, Основы теории поверхностей, т. I, Москва, 1947.
4. Н. И. Кованцов, Теория комплексов, Киев, 1963.

APIE METRINĖS HIPERPLOKŠTUMINIŲ ELEMENTŲ ERDVĖS HIPERPAVIRŠIUS

I. MEDVIEDEVAITĖ

(Reziumė)

Metrinėje hiperplokštuminių elementų erdvėje su Kartano tipo euklidiniu sąryšiu nagrinėjamas toks hiperpaviršius, kurio kiekviename taške liečiamoji hiperplokštuma sutampa su atramine hiperplokštuma tame taške. Įvedamos hiperpaviršiaus trys pagrindinės kvadratinės formos, nagrinėjami normaliniai ir sferiniai kreivumai, taip pat atitinkamos kreivumo linijos. Trimačiu atveju surasta priklausomybė tarp trijų paviršiaus pagrindinių kvadratinių formų ir priklausomybė tarp atitinkamų paviršiaus kreivumų.

ÜBER HOLOMORPHE LÖSUNGEN PARTIELLER VON HYPEREBENENELEMENTEN

I. MEDVIEDEVAITĖ

(Zusammenfassung)

In diesem Artikel wird die Hyperfläche des metrischen Raumes von Hyperebenenelementen mit dem euklidischen Zusammenhang des Typus von Cartan erklärt. Die Tangentialebene fällt in jedem Punkt der Hyperfläche mit der Stützebene in diesem Punkt zusammen. Es werden die drei Fundametalformen der Hyperfläche eingeführt, die normale und sphärische Krümmungen definiert. Im dreidimensionalen Fall sind die Relationen zwischen diesen drei Fundamentalformen, auch zwischen normalen und sphärischen Krümmungen bestimmt. Ausserdem werden die Krümmungslinien der Fläche behandelt.